目 录

第一篇　初 等 代 数

第一章　实　　数

第一节　正数和负数

一、正负数的概念

1.正数和负数

在三大革命运动实践中，我们经常会遇到具有相反意义的量，例如：

温度的零上与零下；水位的上升与下降；产量的增加与减少；财政的收入与支出；……

为了区别这些相反意义的量，我们把一种意义的量看作是正量，用算术中的数表示它们，有时也在这些数前面添上"+"（读作"正"）号，如$+\frac{1}{2}$，+4，+6等，这样的数叫正数；把另一种和它相反意义的量看作是负的量，用算术中的数前面添上"−"（读作"负"）号来表示它们，如$-\frac{1}{2}$，−4，−6等，这样的数叫负数.

例1　用正数和负数来表示下列具有相反意义的量：

（1）摄氏零上4度与摄氏零下4度；

（2）水位上升4厘米与水位下降5厘米；

（3）某生产队卖余粮收入1000元与买化肥支出36元.

解：（1）如果把摄氏零上4度记作+4（°C），那末摄氏零下4度就记作−4（°C）；

（2）如果把水位上升4厘米记作+4（厘米），那末水位下降5厘米就记作−5（厘米）；

（3）如果把收入1000元记作+1000（元），那末支出36元就记作−36（元）.

例2　工人师傅加工一根直径为30毫米的轴，规定加工后，轴的直径最大不能比30毫米大0.02毫米，最小不能比30毫米小0.01毫米，试用正负数表示这两种偏差.

解：如果把比30毫米大0.02毫米的偏差记作+0.02（毫米），那么比30毫米小0.01毫米的偏差就记作−0.01（毫米）.

在图纸上一般用$\phi30^{+0.02}_{-0.01}$表示.+0.02叫做上偏差，−0.01叫做下偏差.

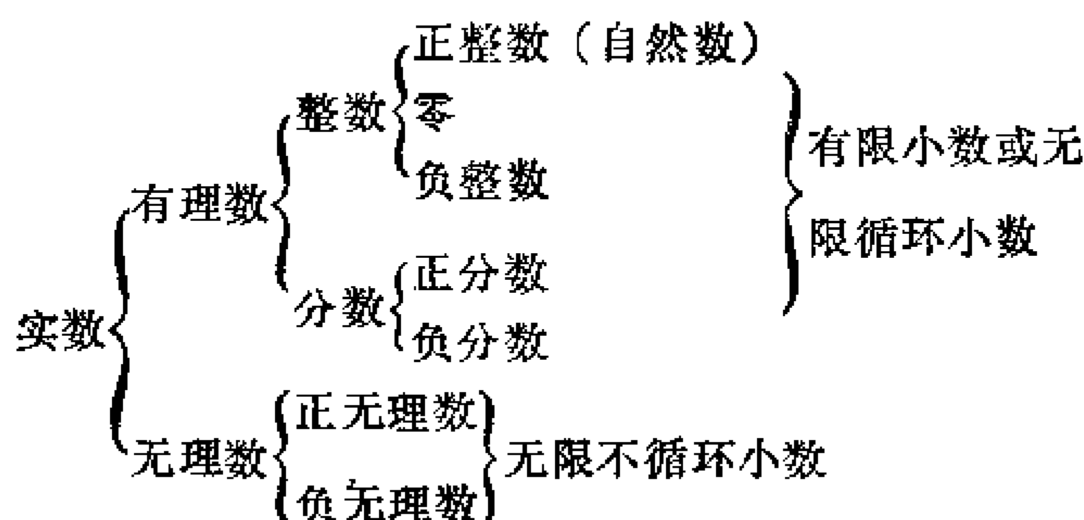
注意：零既不是正数，也不是负数.负数前面的"−"号不可省略.正数前面的"+"号一般可以省略不写，如+15就写成15.

有了正负数以后，我们把正整数、零、负整数称为整数.整数和分数统称为有理数.

所有这些有理数都可以写成有限小数或无限循环小数.例如，$3=3.0$，$-\frac{1}{2}=-0.5$，$\frac{1}{3}=0.333\cdots=0.\dot{3}$ 等.

另外，在实际问题中还会遇到一种形式为无限不循环小数，这种数叫做无理数.例如，$\pi=3.14159\cdots\cdots$，$e=2.71828\cdots\cdots$ 等.

有理数和无理数统称为实数.现在把它们归纳如下：



2.数轴

我们把一个温度计如图 1—1 那样横放，以 $0°C$ 为标准，那末，零度右边的刻度就表示零下的温度，零度左边的刻度就表示零上的温度.

一般地说，我们画一条直线(图1—2)，规定从左到右的方向为正向(用箭头表示)；在这条直线上任取一点 O，表示零，叫做原点;再取定一个适当的长度单位.象这种规定了正向、原点和长度单位的直线叫做数轴.



图 1—1

建立了数轴以后，任何一个实数在数轴上都能用一个确定的点来表示.如图1—2中，+5，就用数轴上原点右边距原点5个单位的点A表示；−2，就用数轴上原点左边距原点2个单位的点B表示；π（取近似值3.1)用C点表示.反之，数轴上任何一个点也都能用一个确定的实数来表示.如图 1—2 中，D点和E点分别用−5和+2.5表示.

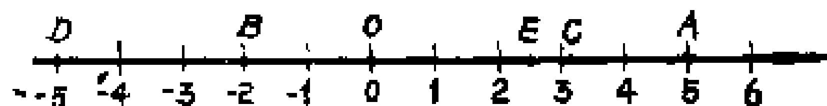


图 1—2

例 3 把下列各数用数轴上的点来表示：

$$+3,\ -3,\ -1.5,\ +1.5,\ +4\frac{1}{2},\ -4\frac{1}{2}.$$

解： 先画出数轴，然后在数轴上找出与以上各数相对应的点。

$+3$，-3，-1.5，$+1.5$，$+4\frac{1}{2}$，$-4\frac{1}{2}$，分别用A，B，C，D，E，F各

点来表示（图1—3）．

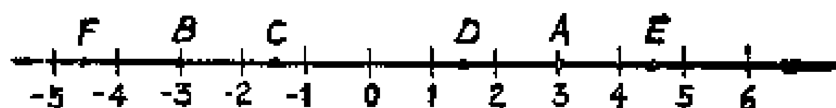


图 1 — 3

例 4　用实数表示图 1—4中A，B、C、D各点．

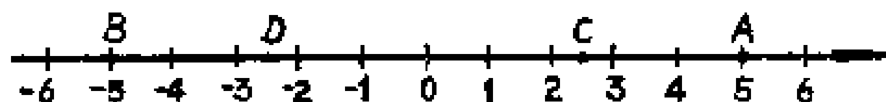


图 1 — 4

解： A点用＋5表示；B点用－5表示；C点用＋2.5表示；D点用－2.5表示．

从图 1 — 4 中可以看出，表示＋5和－5的两个点A和B，到原点的距离是相等的．象这样的两个点所表示的数叫做互为相反数．例如＋5和－5，＋2.5和－2.5都是互为相反数．

例 5　写出＋9、$-3\frac{1}{2}$，－8.7各数的相反数．

解： ＋9的相反数是－9；

$-3\frac{1}{2}$的相反数是$-3\frac{1}{2}$；

－8.7的相反数是＋8.7．

3.绝对值

在数轴上表示一个数的点，它离开原点的距离叫做这个数的绝对值．例如＋5和－5的绝对值都是5；＋2.5和－2.5的绝对值都是2.5；0的绝对值是0．

一个数的绝对值，通常在这个数的两旁各画一条短竖线来表示．例如－5的绝对值记作$|-5|$（读作－5的绝对值）；＋5的绝对值记作$|+5|$（读作＋5的绝对值）．

根据绝对值的意义可知：正数和零的绝对值是它们本身；负数的绝对值是它的相反数；互为相反数的绝对值相等．

例 6　求下列各数的绝对值：

$$+8,\ -8,\ -3.7,\ +7\frac{2}{3},\ -\frac{11}{100}.$$

解： $|+8|=8$；　$|-8|=8$；$|-3.7|=3.7$；

$\left|+7\frac{2}{3}\right|=7\frac{2}{3}$；$\left|-\frac{11}{100}\right|=\frac{11}{100}$．

例 7　写出绝对值等于$3\frac{1}{3}$的数．

解： 绝对值等于$3\frac{1}{3}$的数是$+3\frac{1}{3}$和$-3\frac{1}{3}$．

4.有理数大小的比较

我们知道：＋5（°C）的温度比＋2（°C）的温度要高，所以＋5＞＋2，（“＞”读作“大于”）；0（°C）的温度比＋1（°C）的温度要低，所以0＜＋1（“＜”读作“小于”）；0（°C）的温度比－2（°C）的温度高，所以0＞－2；－5（°C）的温度比－2（°C）的温度低，所以－5＜－2．

通过温度高低的比较，我们进一步认识到，数轴上的点越往右边，它表示的数就越大．因此，正数大于零；而零大于负数；两个负数相比较，绝对值大的反而小，绝对值小的反而大．

例 8　比较下列每对数的大小：

(1) $+0.001$和-100；　　(2) 0和-2；

(3) -0.99和-0.9；　　(4) $-\frac{6}{7}$和$-\frac{7}{8}$.

解：(1) $+0.001>-100$（正数大于一切负数）；

(2) $0>-2$（零大于一切负数）；

(3) $-0.99<-0.9$（两个负数相比较，绝对值大的反而小）；

(4) $\left|-\frac{6}{7}\right|=\frac{6}{7}=\frac{48}{56}$,

$\left|-\frac{7}{8}\right|=\frac{7}{8}=\frac{49}{56}$,

$\because$ $\frac{48}{56}<\frac{49}{56}$, 即$\left|-\frac{6}{7}\right|<\left|-\frac{7}{8}\right|$,

$\therefore$ $-\frac{6}{7}>-\frac{7}{8}$（两个负数相比较，绝对值小的反而大）.

符号“∵”读作“因为”；符号“∴”读作“所以”.

二、正负数的加减法

下面我们从实际例子出发，总结出正负数加减的运算规律.

1.加法

例　水库在拦蓄洪水时，水位就上升；灌溉农田时，水位就下降. 水库工作人员需要经常观测水库水位的变化情况.

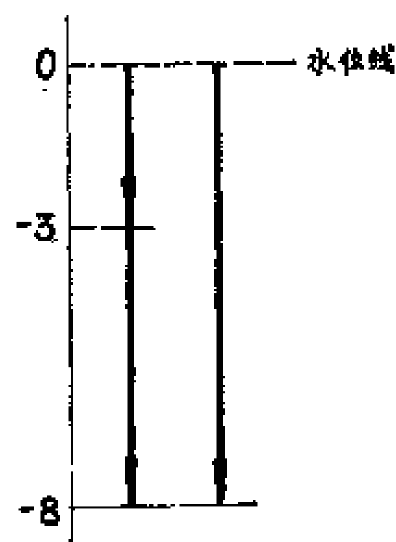


图 1—5

(1) 水库的水位第一天由水位线下降 3 厘米，第二天继续下降 5 厘米，由图 1—5 可以看出，两天水位共下降 8 厘米. 如果水位上升用正数表示，水位下降用负数表示，那末

$$(-3)+(-5)=-8=-(3+5).$$

(2) 水库的水位第一天由水位线上升 3 厘米，第二天却下降 5 厘米，由图 1—6 可以看出，两天水位共下降 2 厘米. 如果仍旧把水位上升用正数表示，水位下降用负数表示，那末

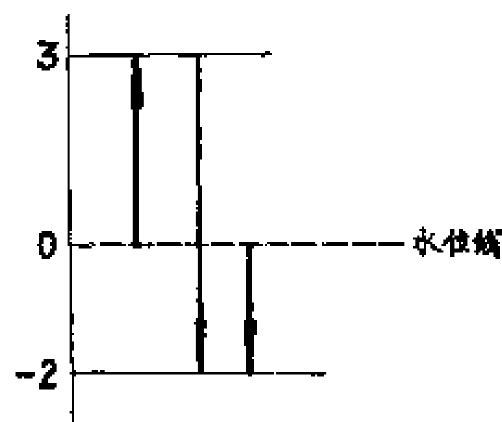


图 1—6

$$(+3)+(-5)=-2=-(5-3).$$

由此我们可以归纳出正负数加法的法则：

同号两数相加，和的符号不变，并把绝对值相加；

异号两数相加，和的符号与绝对值大的符号相同，并把绝对值相减（大的减小的）.

例 1　计算：

(1) $(+7)+(+4)$；　　(2) $(-7)+(-4)$；

(3) $(+7)+(-4)$;　　　(4) $(-7)+(+4)$;

(5) $\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(+\frac{1}{3}\right)$.

解: (1) $(+7)+(+4)=+(7+4)=+11$;

(2) $(-7)+(-4)=-(7+4)=-11$;

(3) $(+7)+(-4)=+(7-4)=+3$;

(4) $(-7)+(+4)=-(7-4)=-3$;

(5) $\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(+\frac{1}{3}\right)=\left(-\frac{3}{6}\right)+\left(+\frac{2}{6}\right)=-\left(\frac{3}{6}-\frac{2}{6}\right)=-\frac{1}{6}$.

2.减法

例 2　济南市去年冬天某一天室内温度是+10（°C），室外温度是－5（°C），则室内温度比室外温度高15（°C），即

$(+10)-(-5)=+15$.

又　$(+10)+(+5)=+15$.

∴　$(+10)-(-5)=(+10)+(+5)$.

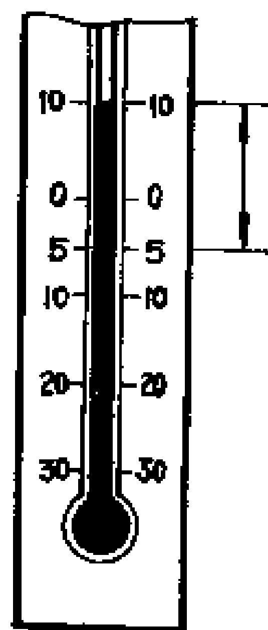


图 1－7

这就是说，减去－5等于加上－5的相反数+5。

由此，我们得到下面减法的法则：

减去一个数，等于加上这个数的相反数.

这样，减法就转化为加法."**一切矛盾都依一定条件向它们的反面转化着。**"改变减数的符号，是减法转化为加法的条件.

例 3　计算：

(1) $(+3)-(-3)$;

(2) $\left(-3\frac{1}{2}\right)-\left(+5\frac{1}{4}\right)$;

(3) $0-(+4.3)$.

解: (1) $(+3)-(-3)=(+3)+(+3)=+6$;

(2) $\left(-3\frac{1}{2}\right)-\left(+5\frac{1}{4}\right)=\left(-3\frac{1}{2}\right)+\left(-5\frac{1}{4}\right)=-8\frac{3}{4}$;

(3) $0-(+4.3)=0+(-4.3)=-4.3$.

例 4　泰山—25拖拉机的活塞直径 $\phi 95^{-0.19}_{-0.22}$，气缸套直径 $\phi 95^{+0.035}$（下偏差为零），求气缸套与活塞配合时的间隙.

解: 气缸套与活塞配合时的最小间隙＝气缸套的下偏差－活塞的上偏差＝$0-(-0.19)=+0.19$,

气缸套与活塞配合时的最大间隙＝气缸套的上偏差－活塞的下偏差＝$+0.035-(-0.22)=+0.255$,

∴　气缸套与活塞配合时间隙：+0.19到+0.255.

例 5　计算$(-20)-(+5)+(+3)-(-7)$.

解:　$(-20)-(-5)+(+3)-(-7)=(-20)+(-5)+(+3)+(+7)$

$=(-25)+(+3)+(+7)=-15$.

从这些例子中可以看出，运用正负数减法法则之后，因为减法都转化成加法，所有的数都变成了加数．通常把加号省略不写，如$(-20)+(-5)+(+3)+(+7)$可以写成$-20-5+3+7$，这样的和叫代数和．

例 6 计算：

(1) $10+(6-2)$；　　　　(2) $10+6-2$；

(3) $\frac{1}{8}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)$；　　　　(4) $\frac{1}{8}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$．

解： (1) $10+(6-2)=10+4=14$；

(2) $10+6-2=16-2=14$；

(3) $\frac{1}{8}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{8}-\left(\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{8}$；

(4) $\frac{1}{8}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=-\frac{3}{8}+\frac{1}{4}=-\frac{1}{8}$．

在例 6 中，(1)与(2)、(3)与(4)结果都相等，所以

$$10+(6-2)=10+6-2；$$

$$\frac{1}{8}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{8}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}．$$

由此，我们得到去括号的法则：

括号前是“＋”号时，把括号连同它前边的“＋”号去掉，括号内各数都不变；括号前是“－”号时，把括号连同它前边的“－”号去掉，括号内各数都变号．

三、正负数的乘除法

1.乘法

正负数的乘法运算，有如下的法则：

同号两数相乘，积的符号取正号，并把绝对值相乘；

异号两数相乘，积的符号取负号，并把绝对值相乘．

例如：

$(+2)\times(+3)=+6$；　　　　$(-2)\times(-3)=+6$；

$(+2)\times(-3)=-6$；　　　　$(-2)\times(+3)=-6$．

为了说明法则的实际意义，我们来看下面的例子：

有一冷仓，假设仓内温度在不断变化，并且现在的温度是$0°C$.我们规定现在以后的时间为正，现在以前的时间为负．

(1) 如果温度每小时上升$2°C$,那末3小时以后的温度就是零上$6°C$.列出式子就是

$$(+2)\times(+3)=+6$$

(2) 如果温度每小时下降$2°C$,那末3小时以后的温度就是零下$6°C$,列出式子就是

$$(-2)\times(+3)=-6$$

(3) 如果温度每小时上升$2°C$,那末3小时以前的温度就是零下$6°C$,列出式子就是

$$(+2)\times(-3)=-6$$

(4) 如果温度每小时下降$2°C$,那末3小时以前的温度就是零上$6°C$,列出式子就是

$$(-2)\times(-3)=+6$$

从上面的例子可以看出，正负数的乘法法则是符合实际的。

例1 计算：

(1) $(+3.58)\times(+2.05)$；　　(2) $\left(+1\frac{2}{3}\right)\times\left(-1\frac{1}{5}\right)$；

(3) $(-6.5)\times\left(-\frac{5}{6}\right)$；　　(4) $\left(-\frac{2}{3}\right)\times(+13.65)$。

解： (1) $(+3.58)\times(+2.05)=7.339$；

(2) $\left(+1\frac{2}{3}\right)\times\left(-1\frac{1}{5}\right)=-\left(\frac{5}{3}\times\frac{6}{5}\right)=-2$；

(3) $-(6.5)\times\left(-\frac{5}{6}\right)=\frac{13}{2}\times\frac{5}{6}=\frac{65}{12}=5\frac{5}{12}$；

(4) $\left(-\frac{2}{3}\right)\times(+13.65)=-\frac{2\times13.65}{3}=-(2\times4.55)=-9.1$。

例2 计算：

(1) $2\times(-6)\times5$；　　(2) $2\times(-7)\times(-3)$；

(3) $(-7)\times(-2)\times(-5)$。

解： (1) $2\times(-6)\times5=(-12)\times5=-60$；

(2) $2\times(-7)\times(-3)=(-14)\times(-3)=42$；

(3) $(-7)\times(-2)\times(-5)=(+14)\times(-5)=-70$。

由例2可以看出，几个正负数相乘时，积的符号可以根据式子中负数的个数来决定：若负数的个数是奇数，则积的符号为负；若负数的个数是偶数，则积的符号为正。

2.除法

我们知道，除法是乘法的逆运算，因此，

由　　$(-2)\times(+3)=-6$，得

$(-6)\div(+3)=-2$，

$(-6)\div(-2)=+3$。

由此得到正负数除法法则：

同号两数相除，商的符号取正号，并把绝对值相除；

异号两数相除，商的符号取负号，并把绝对值相除。

注意：零除以任何一个不等于零的数都等于零，但是零不能做除数。

例3 计算：

(1) $\left(-\frac{3}{10}\right)\div9$；　　(2) $\frac{2}{7}\div\left(-\frac{3}{4}\right)$；

(3) $\left(-\frac{5}{8}\right)\div\left(-\frac{2}{15}\right)$；　　(4) $(-81)\div2\frac{1}{4}\times\frac{4}{9}$。

解： (1) $\left(-\frac{3}{10}\right)\div9=-\left(\frac{3}{10}\div9\right)=-\left(\frac{3}{10}\times\frac{1}{9}\right)=-\frac{1}{30}$；

(2) $\frac{2}{7}\div\left(-\frac{3}{4}\right)=-\left(\frac{2}{7}\div\frac{3}{4}\right)=-\left(\frac{2}{7}\times\frac{4}{3}\right)=-\frac{8}{21}$;

(3) $\left(-\frac{5}{8}\right)\div\left(-\frac{2}{15}\right)=+\left(\frac{5}{8}\div\frac{2}{15}\right)=\frac{5}{8}\times\frac{15}{2}=\frac{75}{16}=4\frac{11}{16}$;

(4) $(-81)\div2\frac{1}{4}\times\frac{4}{9}=(-81)\div\frac{9}{4}\times\frac{4}{9}$

$=\left(-81\times\frac{4}{9}\right)\times\frac{4}{9}=-36\times\frac{4}{9}=-16$。

四、正负数的四则混合运算

正负数四则混合运算的法则和算术里的数的运算法则相同，即先乘除后加减；先括号内后括号外；如有多重括号，则先算小括号（ ），后算中括号〔 〕，再算大括号｛ ｝。

例 计算：

(1) $(-15)\times\left(-\frac{2}{5}\right)+(-8)\div\frac{4}{5}$;

(2) $-1\frac{2}{5}+\left[-\frac{4}{9}\times\left(1+\frac{4}{5}\right)\right]$;

(3) $\frac{1}{4}-\left\{\frac{1}{4}-\left[\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right]\right\}$.

解： (1) $(-15)\times\left(-\frac{2}{5}\right)+(-8)\div\frac{4}{5}=6+(-8)\times\frac{5}{4}=6-10=-4$;

(2) $-1\frac{2}{5}+\left[-\frac{4}{9}\times\left(1+\frac{4}{5}\right)\right]=-1\frac{2}{5}+\left[-\frac{4}{9}\times\frac{9}{5}\right]=-1\frac{2}{5}+\left[-\frac{4}{5}\right]$

$=-\frac{7}{5}-\frac{4}{5}=-\frac{11}{5}=-2\frac{1}{5}$;

(3) $\frac{1}{4}-\left\{\frac{1}{4}-\left[\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}-1\right)\right]\right\}=\frac{1}{4}-\left\{\frac{1}{4}-\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1\right]\right\}$

$=\frac{1}{4}-\left\{\frac{1}{4}-1\right\}=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+1=1$.

习　　题

1. 用正数和负数表示下列具有相反意义的量：

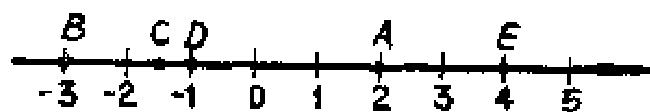
   (1) 水位在水位线上 8 厘米；水位在水位线下 2 厘米。

   (2) 高于海面8000米的上空；低于海面3000米的海底。

2. 用数轴上的点表示下列各数：

   $6,\ -3,\ 2.5,\ -5\frac{1}{2},$

   $0,\ 4.5,\ 3\frac{1}{2},\ -0.5.$



(第 3 题)

3. 用实数表示右面数轴上A,B,C,D,E各点。

4. 在数轴上表示出下列各数和它们的相反数：

$+3.5$，-6，$+2\frac{3}{4}$，-1，$-1\frac{2}{5}$，0。

5. 求下列各数的绝对值：

$+15$，-3.14，$+2\frac{1}{3}$，0，$-\frac{1}{2}$。

6. 比较下列各对数的大小：

$+1$和0；-1和0；$+4$和-5；-18和-17；

-0.27和-0.73；$-\frac{2}{3}$和$-\frac{3}{4}$；$-\frac{3}{10}$和$\frac{33}{100}$。

7. 计算：

(1) $(+13)+(+72)$；　　(2) $(-4.5)+(\ \ 8.7)$；

(3) $(-0.2)+(+3.8)$；　　(4) $(-1.2)+0$；

(5) $\left(-\frac{1}{5}\right)+\left(-\frac{2}{5}\right)$；　　(6) $\left(+2\frac{6}{7}\right)+\left(-\frac{4}{7}\right)$；

(7) $\left(+6\frac{8}{9}\right)+\left(-4\frac{2}{3}\right)$；　　(8) $(+1)+\left(-\frac{5}{11}\right)$。

8. 计算：

(1) $(+4)-(+9)$；　　(2) $(+4)-(-9)$；

(3) $(-4)-(+9)$；　　(4) $(-4)-(-9)$；

(5) $(-13)-0$；　　(6) $0-(-13)$；

(7) $(-4.2)-(-3.5)$；　　(8) $(-1.764)-(+3.675)$；

(9) $\left(+\frac{3}{8}\right)-\left(-\frac{1}{4}\right)$；　　(10) $\left(-\frac{3}{10}\right)-\left(-\frac{7}{15}\right)$。

9. 计算：

(1) $(-15)+(+7)-(-12)$；

(2) $(+7.2)-(+3.6)+(-3.6)$；

(3) $(-3)-\left(-1\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{4}\right)-\left(+3\frac{1}{8}\right)$；

(4) $81.26+8.72-29.64$；

(5) $-4\frac{2}{3}+1\frac{11}{12}-17\frac{1}{4}-2\frac{5}{6}$。

10. 已知公差＝（上偏差）－（下偏差），计算下列公差：

(1) $\phi25^{+0.025}_{-0.025}$；　　(2) $\phi50^{-0.03}$(上偏差为零)；　　(3) $400^{+0.3}_{+0.1}$。

11. 泰山—25拖拉机的主轴径$\phi70^{-0.02}$（上偏差为零），主轴瓦直径$\phi70^{+0.118}_{+0.070}$，求主轴瓦与主轴径配合的间隙。

12. 应用去括号法则，计算下列各式：

(1) $56+(-6-2+1)$;　　(2) $8.13-\left(8.13-1\frac{1}{3}\right)$;

(3) $0.49+(0.51+0.23-0.03)$;　　(4) $4\frac{2}{7}-\left(1\frac{2}{7}-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}\right)$;

(5) $1.56-\left(-3.14-6\frac{1}{5}\right)-0.2$.

13.计算:

(1) $(+6)\times(-8)$;　　(2) $(-0.7)\times(-100)$;

(3) $(-0.3)\times 0$;　　(4) $(-1.2)\times(+3.1)$;

(5) $\left(-\frac{2}{3}\right)\times\left(+\frac{4}{5}\right)$;　　(6) $\left(-\frac{2}{7}\right)\times(-2)$;

(7) $\left(-1\frac{1}{3}\right)\times\left(+1\frac{4}{5}\right)$;　　(8) $(+0.6)\times\left(+\frac{1}{6}\right)$;

(9) $(-1)\times(-2)\times(-4)\times(-8)$;

(10) $\left(-\frac{5}{6}\right)\times(+2.4)\times\left(+\frac{2}{5}\right)$.

14.计算:

(1) $\left(-\frac{2}{5}\right)\div\left(-\frac{2}{3}\right)$;　　(2) $\left(-\frac{1}{2}\right)\div\frac{2}{3}$;

(3) $\left(-12\frac{1}{4}\right)\div 1\frac{1}{6}$;　　(4) $(-0.75)\div\left(-5\frac{3}{8}\right)$;

(5) $(-3.81)\div(-0.015)\times(-0.02)$;

(6) $(-6)\div\frac{2}{3}\div\frac{3}{4}$.

15.计算:

(1) $-1.6+0.12\times\left(-\frac{4}{5}\right)$;　　(2) $-2-0.3\times 5-4\times(-0.5)$;

(3) $\left[-3\frac{1}{2}+5\frac{3}{5}\times(-2)\right]\div(-7)$;　　(4) $\left(-\frac{1}{3}\right)\times\left(-\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{2}{3}\right)$;

(5) $-6\frac{7}{9}-\left[\frac{3}{2}\times\left(-\frac{4}{5}\right)+\frac{1}{5}\right]$;

(6) $20\frac{2}{3}-\left\{60+\left[\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(+\frac{1}{6}\right)-\left(-2\frac{2}{3}\right)\right]\times(-24)\right\}$.

16.水库的水位第一天由水位线上升 8 厘米，第二天又下降 5 厘米，第三天继续下降10厘米，第四天又上升了 4 厘米.问这四天里水库的水位一共下降多少厘米（规定上升为正）?

17. 一冷藏仓库的室温是 $-2°C$，现在有一批食品需要在 $-23°C$ 下冷藏，如果库房每小时平均能降温 $4°C$，问经过几小时才能降到所要求的温度（降温 $4°C$ 记为 -4）？

第二节　乘方和开方

一、乘　方

在乘法的运算中，有时会遇到相同因数相乘的情况．例如，边长为5厘米的正方形钢板的面积是 5×5 平方厘米；棱长为7厘米的立方体钢块的体积是 $7\times7\times7$ 立方厘米．

为了表达和计算的方便，在遇到这种情况时，我们只写一个因数，而在它的右上角写上相同因数的个数．

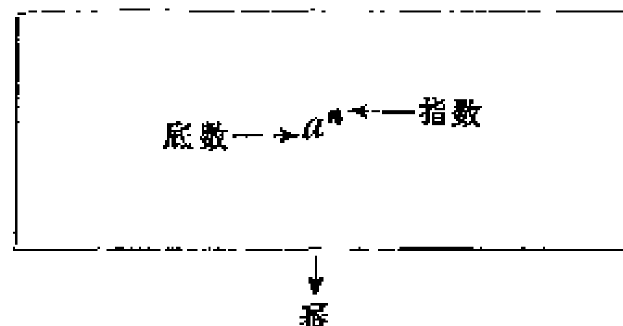
例如：5×5 可写成 5^2，即 $5\times5=5^2$，"5^2"读作"5的平方"或"5的二次方"；$7\times7\times7$ 可写成 7^3，即 $7\times7\times7=7^3$．"7^3"读作"7的立方"或"7的三次方"．

一般说，如果用 a 表示某一个数，那末 $\underbrace{a\times a\times\cdots\cdots\times a}_{n个}$ 可写成 a^n，即

$$\underbrace{a\times a\times\cdots\cdots\times a}_{n个}=a^n$$

"a^n"读作"a 的 n 次方"或"a 的 n 次幂"．

几个相同因数相乘的运算叫做乘方，乘方所得到的结果叫做幂，相同因数叫做底数，相同因数的个数叫做指数．



a^1 就是 a，指数1通常省略不写．

例　计算：

(1) 2^1，2^2，2^3，2^4，2^5；

(2) $(-2)^1$，$(-2)^2$，$(-2)^3$，$(-2)^4$，$(-2)^5$．

解：(1) $2^1=2$，　　$2^2=2\times2=4$，

$2^3=2\times2\times2=8$，　　$2^4=2\times2\times2\times2=16$，

$2^5=2\times2\times2\times2\times2=32$；

(2) $(-2)^1=-2$，　　$(-2)^2=(-2)\times(-2)=4$，

$(-2)^3=(-2)\times(-2)\times(-2)=-8$，

$(-2)^4=(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)=16$，

$(-2)^5=(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)\times(-2)=-32$．

由此可知：正数的任何次幂都是正数；负数的奇次幂是负数，负数的偶次幂是正数.

二、开　方

上面介绍了乘方的概念，但在实际问题中我们还会遇到乘方的逆运算.

例如，要截一块正方形钢板，使其面积为 9 平方分米，问边长应是多少分米.

设正方形的边长为a分米，由题意知$a^2=9$.

我们知道：$3^2=9$；$(-3)^2=9$，

所以$a=3$，或$a=-3$（不符合题意，应舍去）.

因此，正方形的边长是 3 分米.

我们把 3 和 -3 叫做 9 的平方根.

一般地说，如果$a^2=b(b\geq 0)$，那么，a叫做b的平方根.

例如：因为$4^2=16$，$(-4)^2=16$，所以16的平方根是 4 和 -4；

因为$\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$，　$\left(-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$，　所以$\frac{4}{9}$的平方根是$\frac{2}{3}$和$-\frac{2}{3}$.

由此可知：一个正数有两个平方根，它们互为相反数.

因为　$0^2=0$，所以，零的平方根是零.

因为任何数的平方都不能是负数，所以负数的平方根没有意义.

求平方根的运算叫做开平方（或开二次方）. 开平方是平方的逆运算.

正数b的两个平方根用符号$\pm\sqrt[2]{b}$表示，“$\sqrt{\ }$”读做“根号”，b叫做被开方数，2 叫做根指数. 根指数是 2 时，通常省略不写，例如 9 的平方根记作$\pm\sqrt{9}=\pm 3$.

正数b的正的平方根叫做b的算术平方根（简称为算术根），用符号$\sqrt{b}$表示. 例如25的算术平方根记做$\sqrt{25}=5$. 零的算术根是零.

例 1　计算下列各数的平方根：

(1) 36；　(2) $\frac{49}{100}$；　(3) 0.04.

解：$\because (\pm 6)^2=36$，　$\therefore$36的平方根是± 6，即$\pm\sqrt{36}=\pm 6$；

$\because \left(\pm\frac{7}{10}\right)^2=\frac{49}{100}$；　$\therefore \frac{49}{100}$的平方根是$\pm\frac{7}{10}$，即$\pm\sqrt{\frac{49}{100}}=\pm\frac{7}{10}$；

$\because (\pm 0.2)^2=0.04$，　$\therefore$0.04的平方根是± 0.2，即$\pm\sqrt{0.04}=\pm 0.2$.

例 2　求下列各数的算术平方根：

(1) 64；　(2) $\frac{1}{4}$；　(3) 0.09.

解：(1) $\because 8^2=64$，　$\therefore$64的算术平方根是 8，即$\sqrt{64}=8$；

(2) $\because \left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，　$\therefore \frac{1}{4}$的算术平方根是$\frac{1}{2}$，即$\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$；

(3) $\because (0.3)^2=0.09$，　$\therefore$0.09的算术平方根是0.3，即$\sqrt{0.09}=0.3$.

在实际问题中，我们还会遇到立方的逆运算.

例如，要做一个 8 立方米的正方体电镀槽，问电镀槽的边长应是多少米？

设电镀槽的边长为 a 米，由题意知 $a^3=8$．

因为　$2^3=8$，　　　　所以　$a=2$．

因此，电镀槽的边长是 2 米．

我们把 2 叫做 8 的立方根（或三次方根），记作$\sqrt[3]{8}$，即$\sqrt[3]{8}=2$．

如果$a^3=b$，那末，a叫做b的立方根（或三次方根），记作$\sqrt[3]{b}$，即$\sqrt[3]{b}=a$．

b叫做被开方数，3 叫做根指数．

例如：$\because\ 4^3=64$，　　　　$\therefore\ \sqrt[3]{64}=4$；

　　　$\because\ (-2)^3=-8$，　　　$\therefore\ \sqrt[3]{-8}=-2$；

　　　$\because\ 0^3=0$，　　　　　$\therefore\ \sqrt[3]{0}=0$．

由此可知：正数的立方根是一个正数；负数的立方根是一个负数；零的立方根是零．

求一个数的立方根的运算叫做开立方．开立方是立方的逆运算．

一般地说，如果$a^n=b$，那末a叫做b的n次方根．当$b\geqslant0$时，用$\sqrt[n]{b}$表示 b 的 n 次算术根．

求一个数的方根的运算叫做开方，开方是乘方的逆运算．

三、《平方表》和《立方表》的查法

1.《平方表》的查法

由《平方表》可以查出任意一个四位数的平方．查表所得的结果，一般是近似值（它的第四位数是由四舍五入得到的），通常仍用等号表示．

（1）1 到10之间的数的平方，可以在表上直接查得．

例 1　查表求：（1）2.46^2；（2）2.468^2．

解：（1）先在《平方表》中标有N的直列里找到前两位数字2.4，再在标有N的横行中找到第三位数字 6，行和列交叉地方的数6.052就是2.46的平方（见下表），即

$$2.46^2=6.052;$$

N	0 1 2 3 4 5 6 7 8 9	1 2 3 4 5 6 7 8 9
⋮	— — — — — ↓ — — —	— — — — ↓
2.4	— — — → 6.052 —	— — — — 39
⋮	— — — — — — — — —	— — — —

（2）先查表得　$2.46^2=6.052$．

再在修正值栏内标有N的横行中找到第四位数字 8 所对应的修正值39（见上表），实际是0.039，把6.052的最后一位和0.039最后一位对齐相如，得

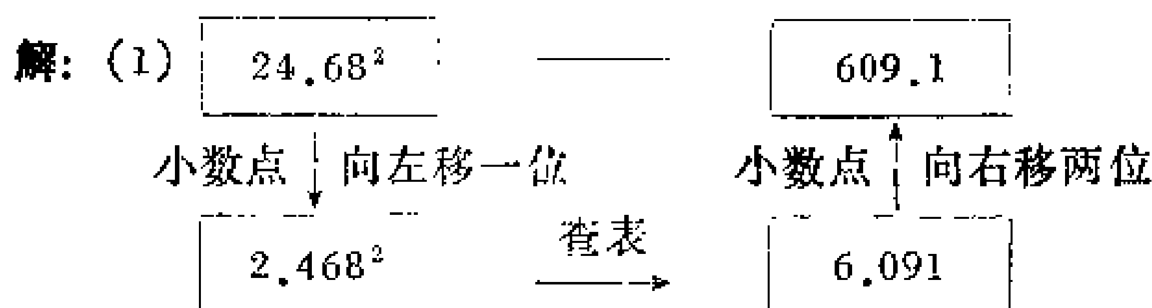
$$\begin{array}{r} 2.46^2=6.052 \\ \underline{\text{修正值}\cdots0.039(+} \\ 2.468^2=6.091 \end{array}$$

（2）查小于 1 或大于10的数（这些数叫表外数）的平方，要先移动底数的小数点的

位置，使之化为表中可以查到的数．查表前底数的小数点每移动一位，查到的平方数的小数点要向相反的方向移动两位．

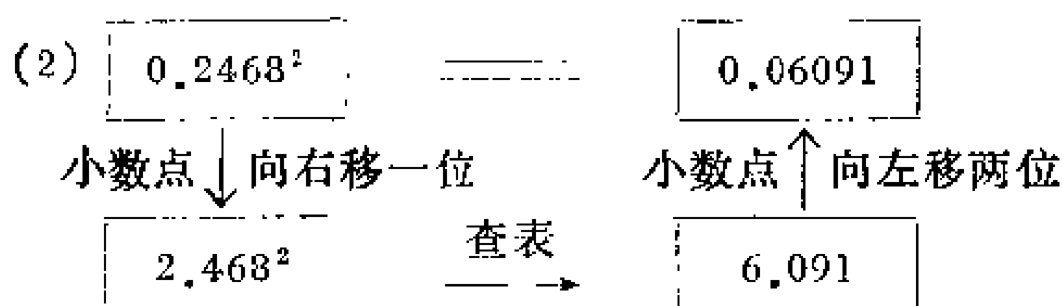
例 2　查表求：(1) 24.68^2；(2) 0.2468^2．

解：(1)



$\therefore\ 24.68^2 = 609.1$；

(2)



$\therefore\ 0.2468^2 = 0.06091$．

请学员思考一下，小数点移动位数的规律的根据是什么？

2．《立方表》的查法

查《立方表》的方法和查《平方表》的方法类似．

(1) 1到10之间的数的立方，可以从表上直接查得．

例 3　查表求：(1) 2.127^3；(2) 2.1274^3．

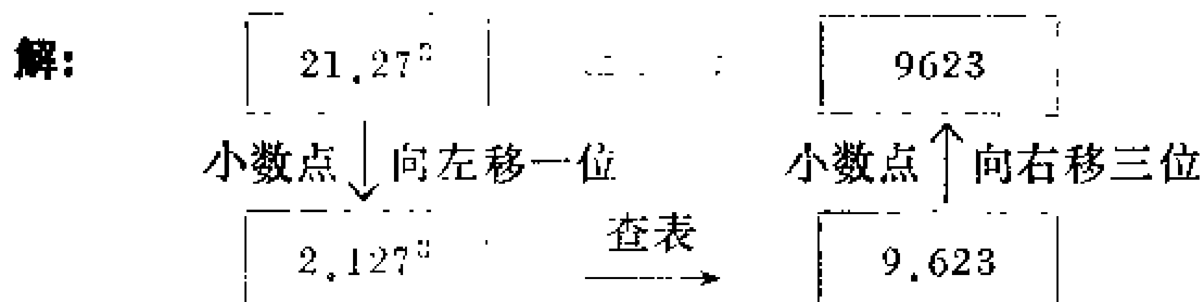
解：(1) $2.127^3 = 9.623$；

(2) $2.1274^3 = 9.628$．

(2) 小于1或大于10的数（叫做表外数）的立方，和查《平方表》一样，掌握小数点的移动规律，就能使表外数的立方借助于《立方表》求得．在这里小数点的移动规律是：查表前底数小数点每移动一位，查得的立方数的小数点就向相反方向移动三位．

例 4　查表求21.27^3．

解：



$\therefore\ 21.27^3 = 9623$．

四、《平方根表》和《立方根表》的查法

1．《平方根表》的查法

由《平方根表》可以查出任意一个四位数的平方根．查表所得的结果，一般是近似值（它的第四位数是由四舍五入得到的），通常仍用等号表示．

(1) 1到100之间的数的平方根，可以在表上直接查得.

例1 查表求：(1) $\sqrt{4.32}$； (2) $\sqrt{43.21}$.

解：(1) $\sqrt{4.32}=2.078$；

(2) $\sqrt{43.21}=6.574$.

(2) 查小于1或大于100的数（叫做表外数）的平方根，要先移动被开方数的小数点的位置，使它化为表中可以查到的数.

由于开平方是平方的逆运算，因此，被开方数的小数点每移动两位，查得平方根的小数点要向相反的方向移动一位.

例2 查表求：(1) $\sqrt{0.527}$； (2) $\sqrt{52700}$.

解：(1) $\boxed{\sqrt{0.527}}$ —— $\boxed{0.7259}$

小数点向↓右移二位　　小数点向↑左移一位

$\boxed{\sqrt{52.7}}$ —查表→ $\boxed{7.259}$

∴ $\sqrt{0.527}=0.7259$；

(2) $\boxed{\sqrt{52700}}$ —— $\boxed{229.6}$

小数点向↓左移四位　　小数点向↑右移二位

$\boxed{\sqrt{5.27}}$ —查表→ $\boxed{2.296}$

∴ $\sqrt{52700}=229.6$.

2.《立方根表》的查法

《立方根表》的查法和《平方根表》的查法类似.

(1) 0.1到99.9之间的数的立方根，可以在表上直接查到.

例如， $\sqrt[3]{0.734}=0.9021$；

$\sqrt[3]{7.34}=1.943$；

$\sqrt[3]{73.4}=4.187$.

(2) 小于0.1或大于100的数的立方根，在表内不能直接查到，要先移动被开方数的小数点的位置，使它化为表中可以查到的数.

由于开立方是立方的逆运算，因此被开方数小数点每移动三位，查得立方根的小数点要向相反的方向移动一位.

例3 查表求：(1) $\sqrt[3]{73400}$； (2) $\sqrt[3]{0.00734}$； (3) $\sqrt[3]{734000}$.

解：(1) $\boxed{\sqrt[3]{73400}}$ —— $\boxed{41.87}$

小数点向↓左移三位　　小数点向↑右移一位

$\boxed{\sqrt[3]{73.400}}$ —查表→ $\boxed{4.187}$

∴ $\sqrt[3]{73400}=41.87$；

(2) ∵ $\sqrt[3]{7.34}=1.943$,

∴ $\sqrt[3]{0.00734}=0.1943$;

(3) ∵ $\sqrt[3]{0.734}=0.9021$,

∴ $\sqrt[3]{734000}=90.21$.

*** 五、开平方的一般方法**

下面通过例题说明开平方的一般方法.

1. 整数开平方

例1 求625的算术平方根$\sqrt{625}$.

解: (1) 分段: 把被开方的数从右向左每隔两位用撇号分开成一段（最后不到两位也算一段）例如625可分成6'25，所分的段数就是所求算术平方根的整数的位数.

(2) 由第一段求得根的第一位数，这里第一段是6，平方不超过6的最大整数是2，因此根的第一位数是2.

(3) 把根的第一位数2的平方4写在第一段6的下边，再把6减去4得2和第二段的数25落下来，写在一起得余数225.

(4) 根的第一位数2乘20得40，用40去试除225得试商5，40加上试商5得45，再乘试商5得225，将225写在余数225的下边，相减得$225-225=0$，刚好开尽，因此625的算术平方根是25. 即

$$\sqrt{625}=25.$$

演算式子如右:

```
                   2  5
                √ 6'25
                  4
2 × 20 = 40     | 2 25
 +  ) 5         |
     45         | 2 25
                     0
```

例2 求 $\sqrt{1156}$.

解:

```
                   3  4
                √ 11'56
                   9
3 × 20 = 60     |  2 56
 +  ) 4         |
     64         |  2 56
                      0
```

∴ $\sqrt{1156}=34$.

2. 小数开平方

小数开平方的方法和整数开平方的方法一样，只是分段不同，小数部分由小数点起，从左向右每隔两位用撇号分开。

注意: 所得的算术平方根的小数点的位置要和被开方数的小数点对齐.

例3 求 $\sqrt{0.5329}$.

解:

```
                    0. 7  3
                 √ 0.53′29
                     49
  7 × 20 = 140  |    4 29
    + )    3    |
         143    |    4 29
                        0
```

$\therefore \quad \sqrt{0.5329}=0.73$.

例4 求 $\sqrt{322.5616}$.

解:

```
                        1  7. 9  6
                     √ 3′22.56′16
                        1
      1 × 20 = 20    | 2 22
        + )  7       |
            27       | 1 89
     17 × 20 = 340   | 33 56
        + )    9     |
             349     | 31 41
    179 × 20 = 3580  | 2 15 16
        + )      6   |
              3586   | 2 15 16
                             0
```

$\therefore \quad \sqrt{322.5616}=17.96$.

3.近似平方根

前面讲到的被开方数都是开得尽的数，但更多的是开不尽的数.对这样的数可以用下面例题方法求出它们的近似平方根（平方根的近似值）.

例5 求 $\sqrt{2}$.

解:

```
                        1. 4  1  4
                     √ 2.00′00′00
                        1
      1 × 20 = 20    | 1 00
        + )  4       |
            24       |   96
     14 × 20 = 280   |   4 00
        + )    1     |
             281     |   2 81
    141 × 20 = 2820  |   1 19 00
        + )      4   |
              2824   |   1 12 96
                           6 04
```

按照这个方法继续计算下去，可得

$$\sqrt{2}=1.4142135\cdots.$$

由此看出，$\sqrt{2}$ 是一个无限不循环小数，即$\sqrt{2}$是一个无理数.同样，$\sqrt{3}=1.732\cdots$ 也是一个无理数.

习　　题

1.把下列各式写成乘方的形式:

(1) $(-4)\times(-4)$;　　(2) $\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right)$;

(3) $(-1.2)\times(-1.2)\times(-1.2)\times(-1.2)$;

(4) $10\times10\times10+\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}$;　　(5) $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}$.

2.计算:

(1) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$, $\left(\frac{1}{2}\right)^3$, $(-3)^5$, $(3)^5$, $(-1)^{10}$, $(-1)^{11}$, 0^{100};

(2) $(-0.3)^2$, $(-0.3)^3$, $(-1.3)^2$, $(-1.3)^3$.

3.利用带一位整数的小数和10的幂的积的形式(即$a\times10^n$),表示下列各数:

(1) 10000; (2) 3400000; (3) 42500;

(4) 我国的领土面积约9600000(平方公里);

(5) 光的速度是300000000(米/秒).

4.求下列各数的平方根:

(1) 81;　(2) 0.01;　(3) $\frac{25}{64}$;　(4) $\frac{144}{121}$.

5.求下列方根:

(1) $\sqrt{0.25}$;　(2) $\sqrt{400}$;　(3) $\sqrt{\frac{1}{256}}$;　(4) $\sqrt{\frac{36}{169}}$;

(5) $\sqrt[3]{-64}$;　(6) $\sqrt[3]{0.001}$;　(7) $\sqrt[3]{-0.008}$.

6.查表求下列各数的平方:

(1) 7.61; (2) 7.612; (3) 76.12; (4) 0.7612;

(5) 164.5; (6) 0.01645; (7) 0.16458.

7.查表求下列各数的立方:

(1) 2.86; (2) 2.863; (3) 28.63; (4) 0.2863;

(5) 58.04; (6) 0.05816; (7) $\frac{5}{6}$; (8) $2\frac{3}{7}$.

8.查表求下列方根:

(1) $\sqrt{8.237}$;　(2) $\sqrt{32.46}$;　(3) $\sqrt{0.03849}$;

(4) $\sqrt{0.001205}$;　(5) $\sqrt{674350}$;　(6) $\sqrt{275800}$;

(7) $\sqrt[3]{0.734}$;　(8) $\sqrt[3]{4.57}$;　(9) $\sqrt[3]{92.57}$;

(10) $\sqrt[3]{22400}$;　(11) $\sqrt[3]{0.00328}$;　(12) $\sqrt[3]{0.05674}$.

9.利用开平方的方法,求下列各数的算术平方根:

(1) 3969; (2) 279841; (3) 6.4516;

(4) 538.24; (5) 3.

复 习 题

1.计算：

(1) $10-85+2-15+100$;

(2) $-7.8+2.3\times(-8)-(-6.9)\div0.23$;

(3) $2-2\frac{1}{2}+1\div3-5\frac{1}{2}\times3-4\frac{1}{4}$;

(4) $5\times(-1)^3+(3\times2^5)\div4-7$;

(5) $1\frac{1}{2}\times\left[3\times\left(-\frac{2}{3}\right)^2-1\right]-8\times\left[(-2)^2-(-4.5+3)\right]$;

(6) $3.81\div[(-0.015)\times2]-(0.4)^2\times8.5$;

(7) $(-1)^3-\left(-5\frac{1}{2}\right)\times\frac{4}{11}+(-2)^3\div[(-3)^2+3]$;

(8) $\left(3\frac{1}{3}\right)^2-\left(6\frac{1}{2}\right)\times\frac{4}{13}+(-2)^4\div[(-2)^3+2]$.

2.气象台测得7天内每天的最高气温分别是$+2.5°C$，$1°C$，$0°C$，$-2°C$，$-2.5°C$，$-1°C$，$-0.5°C$，求这7天的平均最高气温.

3.图纸上标注轴的直径为$50^{+0.15}_{-0.10}$，问加工后的直径在什么范围内才是合格品？现制成三根轴，测得直径尺寸分别为：50.12；49.98；50.18．问这三根轴是否合格？

4.泰山—25拖拉机的连杆轴径$\phi65^{-0.02}$（上偏差为零），连杆瓦$\phi65^{+0.098}_{+0.050}$，求连杆瓦与连杆轴径配合时的间隙.

5.查表求：

(1) $(32.41)^2+(-57.82)^2$;

(2) $(14.2)^3+(-42.52)^3$;

(3) $\sqrt{52700}+\sqrt[3]{73400}$;

(4) $\sqrt{0.0034}+\sqrt[3]{-0.00451}$.

第二章　代　数　式

第一节　代数式的概念

一、用字母表示数

毛主席教导我们："**就人类认识运动的秩序说来，总是由认识个别的和特殊的事物，逐步地扩大到认识一般的事物。**"

我们知道：长方形的面积等于长乘宽，即

长方形的面积＝长×宽.

例如，长方形的长是10厘米，宽是5厘米，那么它的面积是

$10\times5=50$（平方厘米）.

又如，另一个长方形的长是6厘米，宽是4厘米，那么它的面积是

$6\times4=24$（平方厘米）.

如果我们用字母A表示长方形的面积，用a和b分别表示它们的长和宽，那么

$$A=a\times b$$

在这里，字母a可以取10厘米、6厘米等；字母b可以取5厘米、4厘米等.

由此可以看出，用数字表示的式子，只能表示具体的个别的数量关系；而用字母表示数，列出的式子，就可以表示一般的数量关系.这就为我们解决实际问题带来很大方便.用字母表示数时，乘号常用"·"来代替或省略不写.例如$a\times b$可以写成$a\cdot b$或ab.

同样，如果用a表示正方形的边长，A表示正方形的面积，那么

$$A=a\cdot a=a^2.$$

如果用a表示正方体的棱长，V表示正方体的体积，那么

$$V=a\cdot a\cdot a=a^3.$$

如果用b和h分别表示三角形的底边长和高，A表示三角形的面积，那么

$$A=\frac{1}{2}bh.$$

二、代数式

在上述例子中，ab、a^2、a^3、$\frac{1}{2}bh$等都是用运算符号把字母与字母或者字母与数字连接而成的式子.于是我们给出：

凡是用运算符号(加、减、乘、除、乘方、开方)，把字母与字母或者字母与数字连接而成的式子叫做代数式.例如$2xy$，$\frac{1}{3}x^2$，$\frac{1}{2}x-3$，x^2+5x+6，$\frac{1}{x}$，$\frac{2x+y}{x-y}$，$\sqrt{x+2y}$等都是代数式.

用数值代替代数式的字母，计算所得的结果叫做代数式的值.

例1　求下列代数式的值：

（1）在$\frac{1}{2}bh$中，当$b=10$，$h=6$时；

(2) 在$ax-(x-3)^2$中，当$a=4$，$x=5$时。

解： (1) $\frac{1}{2}bh=\frac{1}{2}\times10\times6=30$；

(2) $ax-(x-3)^2=4\times5-(5-3)^2=20-4=16$。

例 2 车床照明灯常采用36伏特的安全工作电压，已知灯丝电阻为33欧姆，求通过灯丝的电流是多少安培？

解： 根据欧姆定律，电压U，电阻R与电流I的关系为：

$$I=\frac{U}{R}.$$

把$R=33$欧姆，$U=36$伏特代入上式，得

$$I=\frac{36}{33}=1.09\text{（安培）}.$$

答： 灯丝通过的电流是1.09安培.

例 3 在铣床上铣削工件时，如果铣刀的直径$D=63$毫米，铣刀每分钟的转数是190转，求切削速度（即单位时间内刀具切削刃在工件的加工表面所通过的路程）.

解： 我们知道，铣刀转一转，铣刀的切削刃在工件的加工表面通过的路程为πD. 如果铣刀每分钟转n转，那末铣刀切削刃通过的路程每分钟为πDn. 所以切削速度$V=\pi Dn$. 在生产上常用的直径D的单位是毫米，速度V的单位是米/分，而1毫米$=\frac{1}{1000}$米，

$$\therefore\quad V=\frac{\pi Dn}{1000}.$$

把$D=63$毫米，$n=190$转/分，$\pi=3.14$代入上式，得：

$$V=\frac{3.14\times63\times190}{1000}=37.6\text{（米/分）}.$$

答： 所求切削速度为37.6米/分.

〔注〕 在车床和钻床上加工时，切削速度的计算公式与铣床一样，但D和n所表示的意义不同。

车床：D表示工件的直径（毫米），n表示工件每分钟的转数（转/分）；

钻床：D表示钻头的直径（毫米），n表示钻头每分钟的转数（转/分）.

三、代数式的分类

按照字母在代数式中的不同情况，分类如下：

字母不在根号内的代数式叫做有理式；根号内含有字母的代数式叫做无理式（或根式）.

例如：$2ab$，$\frac{1}{3}x^2$，$\frac{1}{2}a-3$，x^2+5x+6，$\frac{1}{a}$，$\frac{2x+y}{x-y}$等都是有理式；而$\sqrt{x+2y}$是无理式.

分母中不含字母的代数式叫做整式；分母中含有字母的代数式叫做分式.

例如：$2ab$，$\frac{1}{3}x^2$，$\frac{1}{2}a-3$，x^2+5x+6等都是整式；而$\frac{1}{a}$，$\frac{2x+y}{x-y}$等都是分式.

不含加减运算的整式叫做单项式；含有加减运算的整式叫做多项式.

例如：$2ab$，$\frac{1}{3}x^2$等都是单项式，而$\frac{1}{2}a-3$，x^2+5x+6等都是多项式．

在单项式中，数字因数叫做字母因数的系数，简称系数．例如：在$2ab$中，2是ab的系数；在$\frac{1}{3}x^2$中，$\frac{1}{3}$是x^2的系数．通常系数“1”省略不写，如$1x$只写x；$1xy$只写xy．

多项式中的各个单项式叫做多项式的项．多项式有几项叫做几项式．例如：$\frac{1}{2}a-3$是二项式；x^2+5x+6是三项式．

习　题

1．用代数式表示：

（1）a的2倍与b的5倍的和；

（2）a与b的和的平方；

（3）a与b的差的平方；

（4）a的平方与b的平方之差；

（5）比x的5倍少7的数．

2．如果用A表示圆的面积，C表示圆的周长，R表示圆的半径，试用代数式表示圆的面积公式及圆的周长公式．

3．设$\frac{a}{b}$和$\frac{c}{d}$表示两个分数，试用代数式表示两个分数的乘除法则．

4．当$a=2$，$b=-3$，$c=4$时，求下列各代数式的值：

（1）$(a+b)c$；　　（2）a^2c+bc；

（3）$a-(b+c)^2$；　　（4）$a+(b-c)^2$；

（5）$(a+b)(a-b)$；　　（6）$(a+b)\div c$；

（7）a^2-b^2；　　（8）$\frac{2(b+c)}{3a^2}$；

（9）$\frac{2bc}{3a}-[ab-(b+c)^2]$；　　（10）$\sqrt{a^2-bc}$．

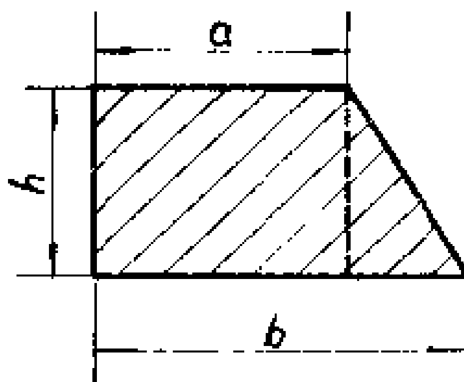
5．当$x=2$，$y=1$时，求下列各代数式的值：

（1）$3x-4$；　　（2）x^2-2x-1；

（3）$\frac{x^2-1}{x^2-1}$；　　（4）x^2y+xy^2；

（5）$\frac{1-x^2}{1-xy}$；　　（6）$4x^2-2xy+y^2$．

6．用长方形和三角形面积公式，推导出图中梯形面积公式．若$a=0.4$米，$b=0.6$米，$h=0.3$米，面积S是多少平方米？



（第6题）

7．车一根直径为100毫米的轴，车床主轴每分钟转375转，求切削速度．

8．在钻床上加工箱体通孔时，使用直径为6.3毫米的钻头，若钻头的转数为1220转/分，求这时的钻削速度．

9. 有一个电器，所用的电压是220伏特，电阻是44欧姆，求这个电器通过的电流.

10. 一只灯丝电阻为120欧姆的灯泡，若通过的电流是0.3安培，问灯泡两端的电压是多少？

11. 下列代数式中，哪些是有理式？哪些是无理式？

$2x^3-1$，$\frac{3}{x}$，$\frac{x^2+3}{x+2}$，$\sqrt[3]{5x}$，$\sqrt{12ax^3}$，$\sqrt{a^2-x^2}$.

12. 下列代数式中，哪些是整式？哪些是分式？

$-2x$，$\frac{3}{4}x^2y+7xy^2$，$-\frac{3a}{7}$，$\frac{3}{x+4}$，$\frac{1}{x}$，$\frac{5+x}{6}$，$-\frac{5x^2}{y^2+2}$.

13. 下列代数式中，哪些是单项式？哪些是多项式？如果是单项式，指出它的系数；如果是多项式，指出它是几项式.

$-2x^2$，$2x^2+1$，$x^3-2x+x-1$，$\frac{7}{8}x^4$，$2x^2+3xy+y^2$.

第二节 整式的加减法

要掌握整式的加减法，必须学习合并同类项和去括号的方法.

一、合并同类项

例1 一个没有盖的长方形铁盒，它的长为a，宽为$2b$，高为b（图2—1）. 求这个铁盒的表面积.

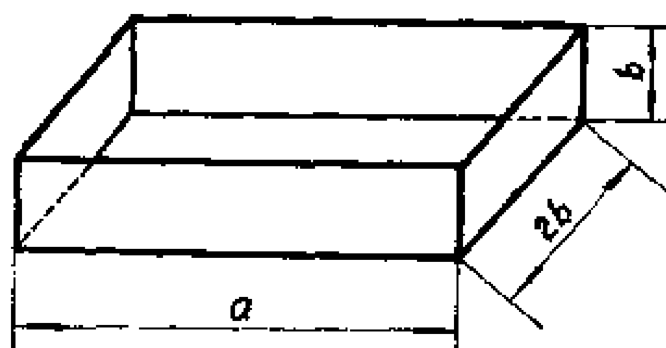


图2—1

解：从图2—2中可以看出，铁盒的表面积是：

$$ab+2ab+ab+2b^2+2b^2.$$

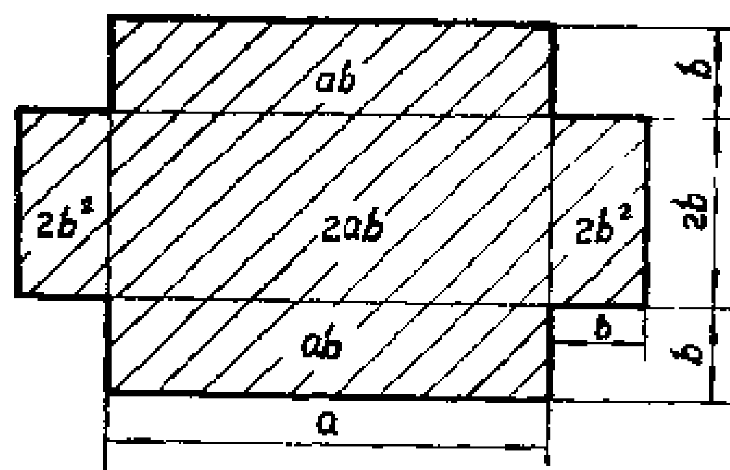


图2—2

上式中，前三项只是系数不同；后两项完全相同，我们分别把它们叫做同类项.

一般地说，在多项式里，如果有些项完全相同，或者只是系数不同，那么，这些项叫做同类项.

例如，在多项式$3x^2+2x-2x^2-x-2xy-3x$中，$3x^2$和$-2x^2$是同类项，$2x$、$-x$和$-3x$也是同类项；而$-2xy$没有同类项.

由图2—2可以看出：

$$ab+2ab+ab=4ab,$$

$$2b^2+2b^2=4b^2,$$

$$\therefore\quad ab+2ab+ab+2b^2+2b^2=4ab+4b^2.$$

由此可见，在多项式里，几个同类项可以合并成一项，而合并同类项的法则是：把

同类项的系数相加.

例 2 合并下列各式的同类项:

(1) $4x^2+5-7x+2-3x^2+6x$;

(2) $ac^2-bc^2+3ac^2+ac+bc^2-ac$.

解: (1) $4x^2+5-7x+2-3x^2+6x$

$=(4-3)x^2+(-7+6)x+(5+2)=x^2-x+7$;

(2) $ac^2-bc^2+3ac^2+ac+bc^2-ac$

$=(1+3)ac^2+(-1+1)bc^2+(1-1)ac=4ac^2$.

二、去括号

在第一章正负数的加减法中，我们介绍过的去括号的法则对于整式也同样适用，即括号前是"+"号时，把括号连同它前面的"+"号去掉，括号内各项都不变；括号前是"−"号时，把括号连同它前面的"−"号去掉，括号内各项都变号.

例 1 计算: $(3a^2+2ab+5b^2)-(-2b^2+14ab)$.

解: $(3a^2+2ab+5b^2)-(-2b^2+14ab)$

$=3a^2+2ab+5b^2+2b^2-14ab$ (去括号)

$=3a^2+(2-14)ab+(5+2)b^2$ (合并同类项)

$=3a^2-12ab+7b^2$.

例 2 求: (1) $3x^2+6x+5$ 与 $4x^2-7x-6$ 的和;

(2) $x^3-3x^2y+2y^3$ 与 $3x^3-7x^2y-3y^3$ 的差.

解: (1) $(3x^2+6x+5)+(4x^2-7x-6)$

$=3x^2+6x+5+4x^2-7x-6=7x^2-x-1$;

(2) $(x^3-3x^2y+2y^3)-(3x^3-7x^2y-3y^3)$

$=x^3-3x^2y+2y^3-3x^3+7x^2y+3y^3=-2x^3+4x^2y+5y^3$.

例 3 求图 2—3 中阴影部分的面积.

解: 从图 2—3 中可以看出，阴影部分是由一个半圆和两个长方形所组成. 设半圆的面积为 S_1，一个长方形的面积为 S_2，总面积为 S.

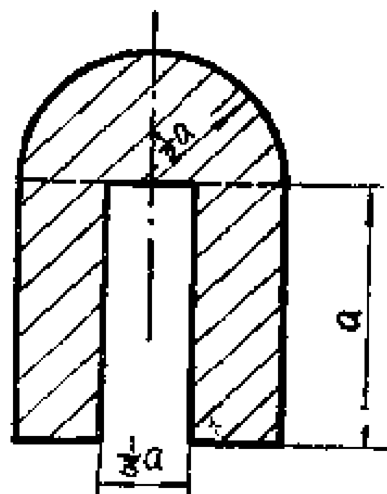


图 2—3

$\because \quad S_1=\frac{1}{2}\pi\left(\frac{1}{2}a\right)^2=\frac{1}{8}\pi a^2$,

$S_2=a\cdot\frac{1}{3}a=\frac{1}{3}a^2$,

$\therefore \quad S=S_1+2S_2=\frac{1}{8}\pi a^2+2\times\frac{1}{3}a^2$

$=\frac{1}{8}\pi a^2+\frac{2}{3}a^2=\left(\frac{1}{8}\pi+\frac{2}{3}\right)a^2$.

答: 阴影部分的面积为 $\left(\frac{1}{8}\pi+\frac{2}{3}\right)a^2$.

习　题

1. 下列各多项式中哪些是同类项？

(1) $-2x+\frac{1}{3}ab^2+5x-\frac{1}{3}ab^2$；

(2) $4x^2+\frac{1}{2}x^2y-3xy^2-5x^2+6ax^2y+\frac{1}{8}xy^2$；

(3) $3n^2m^2+\frac{1}{2}abc-7m^2n^2-\frac{1}{3}abc^2$.

2. 合并下列多项式的同类项：

(1) $25x-1+13x-3-37x$；

(2) $10y^2+4y+1-y^2-4y-5$；

(3) $10ab+c^2-3ab-6c^2$；

(4) $0.3x^2-0.8x+0.2x^3-1.3x^2-0.2x-\frac{1}{5}x^3+3$；

(5) $0.1y^2-0.22y+0.05y^2+0.22y+\frac{1}{20}y^2$；

(6) $\frac{1}{3}b^2-a^2-ab-\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{3}ab-\frac{2}{3}b^2$.

3. 下面去括号有没有错误？如果有错误，应当怎样改正？

(1) $x^2+(54x+2y-1)=x^2+54x+2y-1$；

(2) $a^2-(2a-b+c)=a^2-2a-b+c$；

(3) $(a+1)-(b+c)=a+1-b+c$；

(4) $(2x-y)+(a-1)=2x-y+a+1$；

(5) $x^2-2(x-1)=x^2-2x+1$；

(6) $x^2-2(x-1)=x^2-2x-2$.

4. 化简下列各式：

(1) $4x-(x-3)+x$；

(2) $2x+10-(12-x)+3-8(x-1)$；

(3) $(2m-3n)+(-m-n)$；

(4) $8x-[3x-(-5+x)]$；

(5) $(9xy+2y)-(10xy+8y-2x)$；

(6) $3a-\{2c-[6a-(c-b)+c+(a+8b-6c)]\}$；

(7) $6x-\{4x+[2x-(3x+5x+7-1)+3]-8\}$.

5. 求：

(1) $7a^2+2a-b^2$与$3a+b^2-2a^2$的和；

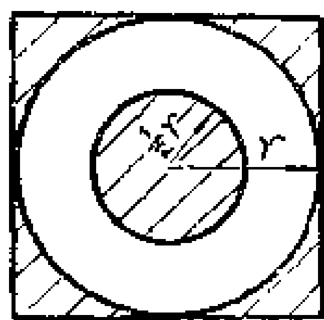
(2) $3x^2-5x+6$，x^2+2x-8与$-4x^2+3x-7$的和；

(3) $4a^3+a^2b-5b^3$，$\frac{2}{3}a^3-6ab^2-a^2b$与$\frac{1}{3}a^3+10b^3$的和；

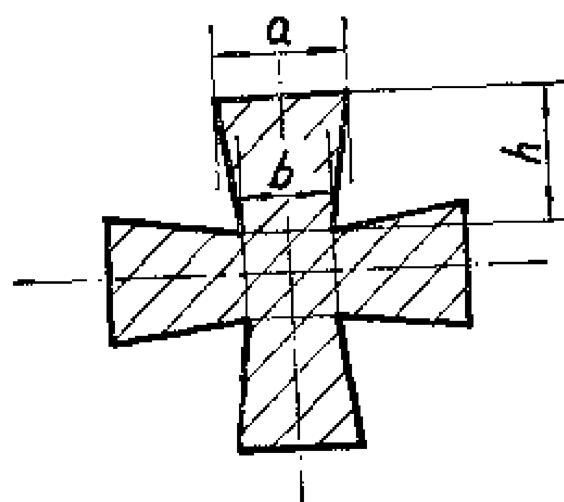
(4) $3a+b-c$与$4a-2b+6c$的差；

(5) x^3+6x^2+5 与 $2x^2-5x+7$ 的差.

6.求图中阴影部分的面积.



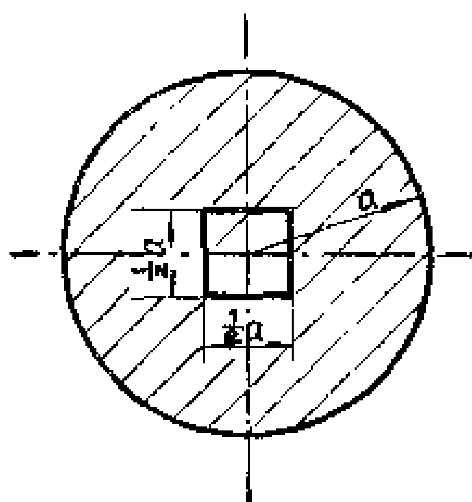
(1)



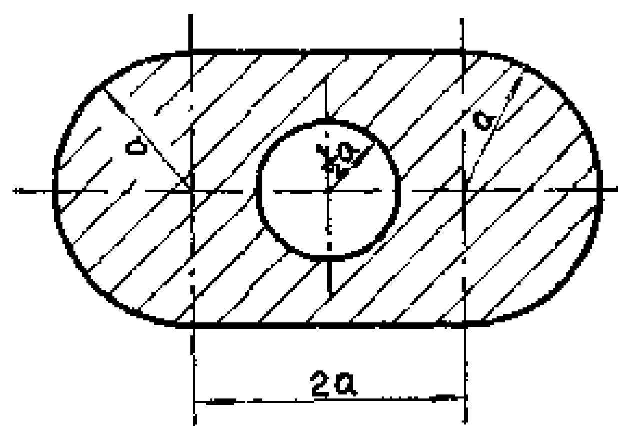
(2)

(第6题)

7.红旗钢管厂的工人制造了许多异型钢管，下面是其中两种钢管的截面，写出计算截面积的代数式.



(1)



(2)

(第7题)

第三节　整式的乘法

在这一节里，先介绍幂的运算法则，然后再介绍整式的乘法.

一、幂的运算法则

1.同底数幂的乘法

例1　计算：$a^2\cdot a^3$.

解：　$a^2\cdot a^3=aa\cdot aaa=a^5=a^{2+3}$.

一般地说，当m，n为正整数时，

$$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$$

即同底数的幂相乘，底数不变，指数相加.

例2　计算：(1) $x^5\cdot x^4$；(2) $b^3\cdot b^5\cdot b$.

解：　(1) $x^5\cdot x^4=x^{5+4}=x^9$；

（2）$b^3 \cdot b^5 \cdot b = b^{3+5+1} = b^9$。

注意：当指数相加时，不能漏掉b的指数 1 。

2.同底数幂的除法

例 3　计算：$a^5 \div a^3$。

解：　$a^5 \div a^3 = \dfrac{a^5}{a^3} = \dfrac{aaaaa}{aaa} = \dfrac{aa}{1} = a^2 = a^{5-3}$。

一般地说，当m，n为正整数时，且$m>n$时，

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \qquad (a \neq 0)$$

即同底数幂相除，底数不变，指数相减。

例 4　计算：（1）$a^6 \div a^2$；（2）$x^5 \div x^4$；（3）$y^6 \div y^6$。

解：　（1）$a^6 \div a^2 = a^{6-2} = a^4$；

（2）$x^5 \div x^4 = x^{5-4} = x$；

（3）$y^6 \div y^6 = 1$。

3.幂的乘方

例 5　计算：$(a^3)^2$；$(a^3)^3$。

解：　$(a^3)^2 = a^3 \cdot a^3 = a^6 = a^{3\times2}$；

$(a^3)^3 = a^3 \cdot a^3 \cdot a^3 = a^9 = a^{3\times3}$。

一般地说，当m，n为正整数时，

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

即幂的乘方，底数不变，指数相乘。

例 6　计算：（1）$(x^4)^2$；（2）$(y^5)^4$。

解：　（1）$(x^4)^2 = x^{4\times2} = x^8$；

（2）$(y^5)^4 = y^{5\times4} = y^{20}$。

4.积的乘方

例 7　计算$(ab)^2$；$(ab)^3$。

解：　$(ab)^2 = ab \cdot ab = aa \cdot bb = a^2b^2$；

$(ab)^3 = ab \cdot ab \cdot ab = aaa \cdot bbb = a^3b^3$。

一般地说，当m为正整数时，

$$(ab)^m = a^m b^m$$

即积的乘方等于乘方的积。

例 8　计算：（1）$(a^2b^3)^3$；（2）$(-ab)^3$。

解：　（1）$(a^2b^3)^3 = (a^2)^3 \cdot (b^3)^3 = a^6b^9$；

（2）$(-ab)^3 = (-1)^3 \cdot a^3 \cdot b^3 = -a^3b^3$。

5. 商的乘方

例 9 计算：$\left(\frac{a}{b}\right)^2$； $\left(\frac{a}{b}\right)^3$.

解： $\left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}=\frac{a^2}{b^2}$；

$\left(\frac{a}{b}\right)^3=\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}=\frac{a^3}{b^3}$.

一般地说，当m为正整数时，

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m=\frac{a^m}{b^m}\quad(b\neq 0)$$

即商的乘方等于乘方的商.

例10 计算：(1) $\left(\frac{3}{x}\right)^2$； (2) $\left(\frac{-2}{ab}\right)^3$； (3) $\left(-\frac{c}{d^2}\right)^4$.

解： (1) $\left(\frac{3}{x}\right)^2=\frac{3^2}{x^2}=\frac{9}{x^2}$；

(2) $\left(\frac{-2}{ab}\right)^3=\frac{(-2)^3}{(ab)^3}=\frac{-8}{a^3b^3}=-\frac{8}{a^3b^3}$；

(3) $\left(-\frac{c}{d^2}\right)^4=\frac{(-c)^4}{(d^2)^4}=\frac{c^4}{d^8}$.

例11 求下列各式的幂：

(1) $10^2\cdot10^3$；(2) $(10^3)^2$；(3) $(400)^3$.

解： (1) $10^2\cdot10^3=10^{2+3}=10^5=100000$；

(2) $(10^3)^2=10^{3\times2}=10^6=1000000$；

(3) $(400)^3=(4\times10^2)^3=4^3\times10^6=64000000$.

二、整式的乘法

1. 单项式乘以单项式

根据幂的运算法则，我们可以进行单项式相乘的运算.

例 1 计算： $(3ax)\cdot(5a^2x^3)$.

解： $(3ax)\cdot(5a^2x^3)=(3\times5)\cdot(a\cdot a^2)\cdot(x\cdot x^3)=15a^3x^4$.

由此可知，单项式乘以单项式，所得的乘积仍然是一个单项式，其相乘的法则是：系数与系数相乘，同底数的幂相乘，再与其它因式相乘.

例 2 计算：(1) $(4b^2y^2)\cdot(-7aby)$；

(2) $\left(\frac{2}{9}xy\right)\cdot(-5x^2y^2)\cdot(6x^2yz^2)^2$.

解： (1) $(4b^2y^2)\cdot(-7aby)=[4\times(-7)]a\cdot(b^2\cdot b)(y^2\cdot y)=-28ab^3y^3$；

(2) $\left(\frac{2}{9}xy\right)\cdot(-5x^2y^2)\cdot(6x^2yz^2)^2=\left(\frac{2}{9}xy\right)(-5x^2y^2)(36x^4y^2z^4)$

$=\left[\frac{2}{9}\times(-5)\times36\right](x\cdot x^2\cdot x^4)(y\cdot y^2\cdot y^2)\cdot z^4=-40x^7y^5z^4$.

2.单项式乘以多项式

我们知道，数的乘法满足分配律：

$$m(a+b+c)=ma+mb+mc.$$

如果把m看成是单项式，$a+b+c$看成是多项式，那么就得到下面的法则：

单项式乘以多项式，就是把单项式乘以多项式的各项，再将所得的积相加.

例 3 计算：(1) $4x(2x^2+3x-1)$；

(2) $\frac{1}{2}a^2b(2ab+3a^2c+abc)$.

解： (1) $4x(2x^2+3x-1)=4x\cdot 2x^2+4x\cdot 3x+4x\cdot(-1)=8x^3+12x^2-4x$；

(2) $\frac{1}{2}a^2b(2ab+3a^2c+abc)=\frac{1}{2}a^2b\cdot 2ab+\frac{1}{2}a^2b\cdot 3a^2c+\frac{1}{2}a^2b\cdot abc$

$=a^3b^2+\frac{3}{2}a^4bc+\frac{1}{2}a^3b^2c$.

3.多项式乘以多项式

例 4 计算：$(m+n)(a+b)$.

解：先把$(m+n)$看成是一个单项式，应用单项式乘以多项式的法则，得

$$(m+n)(a+b)=(m+n)a+(m+n)b.$$

再应用单项式乘以多项式的法则，得

$$(m+n)a+(m+n)b=ma+na+mb+nb.$$

$$\therefore\ (m+n)(a+b)=ma+na+mb+nb.$$

由此可知：多项式乘以多项式，就是用一个多项式的各项分别乘以另一个多项式的每一项，再把所得的积相加.

例 5 计算：(1) $(2x+3)(4x-5)$；

(2) $(x-a)(x-b)$.

解： (1) $(2x+3)(4x-5)=2x\cdot 4x+3\cdot 4x+2x\cdot(-5)+3\times(-5)$

$=8x^2+12x-10x-15=8x^2+2x-15$；

(2) $(x-a)(x-b)=x^2-ax-bx+ab=x^2-(a+b)x+ab$.

三、乘法公式

应用多项式乘法的法则，可以推导出下面三个常用的乘法公式：

1.平方差公式

例 1 计算：$(a+b)(a-b)$.

解： $(a+b)(a-b)=a^2+ab-ab-b^2=a^2-b^2$.

由此得出：两数和与这两数差的积等于这两数的平方的差，用式子表示就是：

$$\boxed{(a+b)(a-b)=a^2-b^2}$$

这个公式称为平方差公式.

例 2 利用平方差公式计算：

(1) $(x+3)(x-3)$；　(2) $(2x+1)(2x-1)$；

(3) $(3a-2b)(3a+2b)$；　(4) $(-5m-n^2)(5m-n^2)$。

解： (1) $(x+3)(x-3)=x^2-3^2=x^2-9$；

(2) $(2x+1)(2x-1)=(2x)^2-1^2=4x^2-1$；

(3) $(3a-2b)(3a+2b)=(3a)^2-(2b)^2=9a^2-4b^2$；

(4) $(-5m-n^2)(5m-n^2)=-(5m+n^2)(5m-n^2)$

$=-[(5m)^2-(n^2)^2]=-[25m^2-n^4]=n^4-25m^2$.

2.两数和与两数差的平方公式

例 3 计算：(1) $(a+b)^2$；(2) $(a-b)^2$。

解： (1) $(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+ab+ab+b^2=a^2+2ab+b^2$；

(2) $(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-ab-ab+b^2=a^2-2ab+b^2$.

由此得出：两数和与两数差的平方公式（统称完全平方公式）．用式子表示就是：

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

例 4 利用完全平方公式计算：

(1) $(3x+5y)^2$；　(2) $(-m+n^2)^2$；　(3) $\left(2a-\frac{1}{3}b\right)^2$.

解： (1) $(3x+5y)^2=(3x)^2+2(3x)(5y)+(5y)^2=9x^2+30xy+25y^2$；

(2) $(-m+n^2)^2=(-m)^2+2(-m)(n^2)+(n^2)^2=m^2-2mn^2+n^4$；

(3) $\left(2a-\frac{1}{3}b\right)^2=(2a)^2-2(2a)\left(\frac{1}{3}b\right)+\left(\frac{1}{3}b\right)^2=4a^2-\frac{4}{3}ab+\frac{1}{9}b^2$.

习　　题

1.计算：

(1) a^5+a^5；　(2) $a^5\cdot a^5$；

(3) $a^5\div a$；　(4) $(a^5)^5$；

(5) $x\cdot x^4\cdot x^0$；　(6) $b^7\div b^4$；

(7) $(y^4)^3$；　(8) $(2x^2y)^4$；

(9) $(abx^2)^4$；　(10) $\left(\frac{2a}{3b}\right)^2$.

2.计算：

(1) $(y^n)^2$；　(2) $x^n\cdot x^{n+1}$；

(3) $(a^{2n})^3$；　(4) $(s^2t)^{2n}$；

(5) $\left(-\frac{m^2}{n^3}\right)^5$;　　(6) $\left(-\frac{a^n}{b^n}\right)^3$.

3.求下列各式的幂:

(1) $(10^3)^3$;　　(2) $\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right]^2$;

(3) $[(-1)^3]^2$;　　(4) $(2\times10)^4$;

(5) $(-4\times3)^4$;　　(6) $\left(-\frac{2}{3}\right)^5$.

4.下面的计算有没有错误？如果有错误，应当怎样改正？

(1) $(x^3)^2=x^5$;　　(2) $x^3\cdot x^2=x^6$;

(3) $x^4\cdot x^4=x^8$;　　(4) $(x^4)^4=x^8$;

(5) $(abx)^3=abx^3$;　　(6) $(6xy)^2=12x^2y^2$.

5.计算:

(1) $(6y^3)(-3y)$;　　(2) $(3a^3x^2)(-5abx)$;

(3) $\left(\frac{2}{5}x^2y^3\right)\left(-\frac{5}{6}xy\right)$;　　(4) $(3a^2b^3c)(-4a^3bc^2)(-5ab^2c)$;

(5) $(-3x)^2\left(-\frac{2}{3}x^2y\right)^2\left(-\frac{3}{4}y^2z^2\right)$.

6.计算:

(1) $-2x(x^2-x+1)$;　　(2) $(2ab+3a^2)\left(\frac{1}{2}a\right)$;

(3) $\frac{1}{3}ab\left(\frac{3}{4}a^2b-\frac{1}{2}ab^2-\frac{5}{6}b^3\right)$;　　(4) $(-6bx^2)(3x^2-4x-2)$;

(5) $4xyz(5xy^2z-7x^2y^3z+6x^3y^4z^3)$.

7.计算:

(1) $(a+3)(a-4)$;　　(2) $(3x+1)(x-2)$;

(3) $(2x+3)(3x+9)$;　　(4) $(a+b)(-2x-3y)$;

(5) $\left(x-\frac{1}{3}y\right)\left(\frac{1}{2}x+y\right)$;　　(6) $(x+7y)(6x-8y)$;

(7) $(3x^2y-xy^2)(y+3x)$;　　(8) $(x-2)(x^2-2x-15)$;

(9) $2x^3+9-(x+1)(x^2+x+1)$;　　(10) $(6x^2-12x+18)\left(-x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}\right)$.

8.计算:

(1) $(2y+3)(2y-3)$;　　(2) $\left(\frac{1}{2}x-2y\right)\left(\frac{1}{2}x+2y\right)$;

(3) $(3x^n+1)(3x^n-1)$;　　(4) $(x-2y)(-x-2y)$;

(5) $\left(\frac{1}{2}x+4\right)^2$;　　(6) $(2x+3a)^2$;

(7) $(2a^2-b)^2$;　　(8) $\left(\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}y\right)^2$;

(9) $(u^2-v^2)^2$;　　(10) $(2ab^2+3x^2y)^2$;

(11) $(x+y-z)(x-y+z)$.

9. 证明下列乘法公式:

(1) $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$;

(2) $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$;

(3) $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$;

(4) $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$;

(5) $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

10. 计算:

(1) $(2x+3)^3$;　　(2) $\left(\frac{1}{2}x-2y\right)^3$;

(3) $(2a+3)(4a^2-6a+9)$;　　(4) $(3x-4y)(9x^2+12xy+16y^2)$;

(5) $(2x+3y-z)^2$;　　(6) $(a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)$.

11. 利用乘法公式计算:

(1) 91×89;　　(2) 98×102.

第四节　因式分解

从上一节多项式的乘法中，我们看到几个多项式相乘其结果还是一个多项式. 但是，在学习分式化简和解代数方程时，还常常需要把一个多项式分解成几个因式乘积的形式.

把一个多项式分解成几个因式乘积的形式叫做多项式的因式分解.

下面介绍几种常用的因式分解的方法.

一、提取公因式法

由乘法分配律得: $m(a+b+c)=ma+mb+mc$，反过来，得

$$ma+mb+mc=m(a+b+c).$$

这里m叫做多项式$ma+mb+mc$各项的公因式. 从上面的等式中可以看出: 如果一个多项式各项都含有相同的因式，就可以把这个因式（公因式）提到括号外边，作为整个式子的一个因式. 这个方法叫做提取公因式法.

例　把下列各式分解因式:

(1) $bx-by$;　　(2) $-16a^2-4a^3$;　　(3) $4x^3+10x^2-2x$.

解: (1) $bx-by=b(x-y)$;

(2) $-16a^2-4a^3=-4a^2(4+a)$;

注意: 如果多项式第一项系数为负数，一般把“-”号也提到括号外边，这时括号内各项都要变号.

(3) $4x^3+10x^2-2x=2x(2x^2+5x-1)$.

二、分组提取公因式法

由多项式的乘法得:

$$(m+n)(x+y)=(m+n)x+(m+n)y=mx+nx+my+ny.$$

反过来，得

$$mx+nx+my+ny=(m+n)x+(m+n)y=(m+n)(x+y).$$

从这个等式中，我们可以看出：把一个多项式分解因式，有时可以先把它的各项适当地分组，分组的目的是使每一组都能提取公因式，并且在各组提出公因式后，每一组的另一个因式是相同的，然后再把这个公因式提出．这种方法叫做分组提取公因式法．

例1 把下列各式分解因式：

(1) $4x(m-n)-m+n$； (2) $m^2+mn-5m-5n$.

解： (1) $4x(m-n)-m+n=4x(m-n)-(m-n)=(m-n)(4x-1)$；

(2) $m^2+mn-5m-5n=(m^2+mn)-(5m+5n)$
$=m(m+n)-5(m+n)=(m+n)(m-5)$.

例2 把$3ax-4by-4ay+3bx$分解因式.

解： $3ax-4by-4ay+3bx=(3ax+3bx)-(4ay+4by)$
$=3x(a+b)-4y(a+b)=(a+b)(3x-4y)$.

思考一下本题还可以怎样分组分解因式？

三、公式法

把已学过的乘法公式反过来用，便得到下面三个因式分解的公式：

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$；

$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$；

$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$.

例1 把下列各式分解因式：

(1) x^2-25； (2) a^4-16.

解：(1) $x^2-25=x^2-5^2=(x+5)(x-5)$；

(2) $a^4-16=(a^2)^2-4^2=(a^2+4)(a^2-4)=(a^2+4)(a+2)(a-2)$.

例2 抽水机水管接口处的圆环如图2—4，内半径$r=7$厘米，外半径$R=8$厘米，求圆环的面积S（π取3.14）.

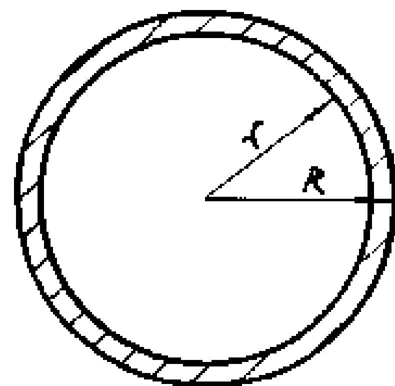


图2—4

解： $S=\pi R^2-\pi r^2=\pi(R^2-r^2)=\pi(R+r)(R-r)$

把$r=7$厘米，$R=8$厘米，代入上式，得

$S=3.14(8+7)(8-7)=47.1$（厘米²）.

答： 抽水机水管接口处的圆环面积为47.1平方厘米.

例3 把下列各式分解因式：

(1) a^2+6a+9； (2) $a^2-2ab+b^2-c^2$； (3) x^4-8x^2+16.

解： (1) $a^2+6a+9=a^2+2\cdot3\cdot a+3^2=(a+3)^2$；

(2) $a^2-2ab+b^2-c^2=(a^2-2ab+b^2)-c^2$
$=(a-b)^2-c^2=(a-b+c)(a-b-c)$；

(3) $x^4-8x^2+16=(x^2)^2-2\cdot4x^2+4^2=(x^2-4)^2$
$=[(x+2)(x-2)]^2=(x+2)^2(x-2)^2$.

例4 把$2ax^2-4axy+2ay^2$分解因式

解： $2ax^2-4axy+2ay^2=2a(x^2-2xy+y^2)=2a(x-y)^2$.

* 四、十字相乘法

在多项式$2x^2+11x+15$中，$2x^2$、$11x$和15分别叫做二次项、一次项和常数项．象这样的多项式叫做二次三项式．

下面介绍二次三项式的因式分解法．

我们分别对二次项系数等于1和不等于1两种情况加以讨论．

1．二次项系数等于1

由多项式的乘法知道：

$$(x+c_1)(x+c_2)=x^2+(c_1+c_2)x+c_1c_2,\ 其中c_1,\ c_2为常数.$$

反过来，得

$$x^2+(c_1+c_2)x+c_1c_2=(x+c_1)(x+c_2).$$

从这个等式可以看出，要把二次项系数等于1的二次三项式$x^2+(c_1+c_2)x+c_1c_2$分解因式，只要把二次项系数1分成两个因数1与1，常数项c_1c_2分成两个因数c_1与c_2，并且使它们交叉相乘所得之积的和c_1+c_2恰好等于一次项的系数，那末，这个二次三项式$x^2+(c_1+c_2)x+c_1c_2$就可以分解为$(x+c_1)(x+c_2)$．

这种分解二次三项式的方法叫做十字相乘法．

例1 把下列各式分解因式：

(1) x^2+5x+6； (2) $x^2-2x-24$.

解： (1) 本题中的常数项6，所能取的两个因数有好几对，如1与6；2与3；-1与-6；-2与-3，但是其中只有2与3它们交叉相乘所得之积的和$2+3=5$，恰好是一次项x的系数，因此

$$x^2+5x+6=(x+2)(x+3).$$

上面解题过程中的分析部分一般不写．

(2) $x^2-2x-24=(x+4)(x-6)$.

2．二次项系数不等于1

由多项式的乘法知道：

$$(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)=a_1a_2x^2+(a_1c_2+a_2c_1)x+c_1c_2,\ 反过来，得$$

$$a_1a_2x^2+(a_1c_2+a_2c_1)x+c_1c_2=(a_1x+c_1)(a_2x+c_2),\ 其中，c_1,c_2,a_1,a_2为常数.$$

从这个等式可以看出，要把二次三项式$a_1a_2x^2+(a_1c_2+a_2c_1)x+c_1c_2$分解因式，只要把二次项的系数$a_1a_2$分成两个因数$a_1$与$a_2$，常数项$c_1c_2$分成两个因数$c_1$与$c_2$，并且使它们交叉相乘所得之积的和$a_1c_2+a_2c_1$，恰好等于一次项的系数，那末，这个二次三项式$a_1a_2x^2+(a_1c_2+a_2c_1)x+c_1c_2$就可以分解为$(a_1x+c_1)(a_2x+c_2)$．

例2 把下列各式分解因式：

(1) $2x^2+11x+15$;　　(2) $6x^2-7x-20$.

解: (1) $2x^2+11x+15$
$=(x+3)(2x+5)$;

(2) $6x^2-7x-20$
$=(2x-5)(3x+4)$.

1　3
2　5
×)
$1\times5+2\times3=11$

2　−5
3　4
×)
$2\times4+3\times(-5)=-7$

习　题

1.把下列各式分解因式:

(1) $cx-cy+cz$;　　(2) $4ux+4vx-4wx$;

(3) $-16x^4-32x^3-16x^2$;　　(4) $-15xy^2+10x^2y-5xy$;

(5) $14abx-8ab^2x+2ax$;　　(6) $-7ab-14abx+49aby$;

(7) $40m^3n-25mn^2+5m^2n$;　　(8) $a(x+y)+b(x+y)-c(x+y)$;

(9) $(a+b)(x-y)-(a-b)(y-x)$;

(10) $x(a-b+c)+y(a-b+c)-(a-b+c)$.

2.把下列各式分解因式:

(1) $3a-3b+ax-bx$;　　(2) $-ax+ay+bx-by$;

(3) $5ax+6by-5ay-6bx$;　　(4) $4x^2+3y-4xy-3x$;

(5) m^3+m^2+m+1;　　(6) $4xy+4xz+4y+4z$;

(7) x^3-xy-x^3z-xyz;　　(8) $ax-bx-ay+by$;

(9) x^3-x^2+x-1;　　(10) $x^2y+y^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2+2y+1$.

3.把下列各式分解因式:

(1) $25x^2-\frac{81}{100}$　　(2) $9a^2b^2-64$;

(3) $(2x+3)^2-(x+1)^2$;　　(4) $(x^2+y^2)^2-x^2y^2$;

(5) $25m^2-(4m-3n)^2$;　　(6) $81a^4-\frac{1}{16}$;

(7) $81x^4-y^4$;　　(8) $x^{2n}-100$.

4.计算:

(1) 35^2-15^2;　　(2) 99^2-98^2;

(3) 758^2-258^2;　　(4) $\left(86\frac{7}{12}\right)^2-\left(86\frac{1}{12}\right)^2$.

5.把下列各式分解因式:

(1) x^2+4x+4;　　(2) $a^2-10a+25$;

(3) $16x^2+24x+9$;　　(4) $36x^2-4x+\frac{1}{9}$;

(5) $x^2-x+\frac{1}{4}$;　　(6) $25x^2+10x+1$;

(7) $4a^4-8a^3+4a^2$;　　(8) $2a^2x^2+4abxy+2b^2y^2$;

(9) $x^6-4x^3y+4y^2$;　　(10) $x^2y+\frac{b}{a}xy+\frac{b^2}{4a^2}y$.

6.利用乘法公式：$a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$，把下列各式分解因式：

(1) x^3+8;　　(2) $8x^3-1$;

(3) y^3+27;　　(4) m^3n^6-27;

(5) $64a^3-8$;　　(6) $y^4+x^3y-(x+y)$.

7.用十字相乘法，把下列各式分解因式：

(1) $x^2+7x+12$;　　(2) $x^2-7x-12$;

(3) $x^2-10x-24$;　　(4) x^2-6x+8;

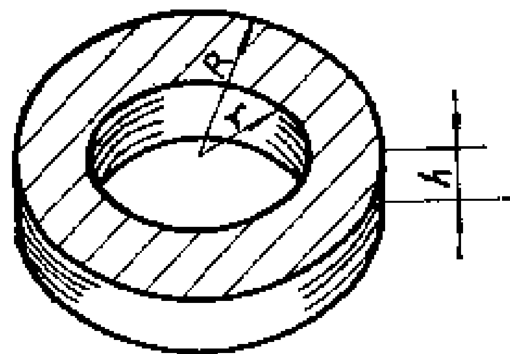
(5) $2x^2+13x+15$;　　(6) $3x^2-5x+2$;

(7) $12x^2-14x-6$;

(8) $4x^2+6x+2$.

8.镀锌时需要计算如图所示垫圈的总表面积，试证明总表面积：

$$S=2\pi(R+r)(R-r+h).$$



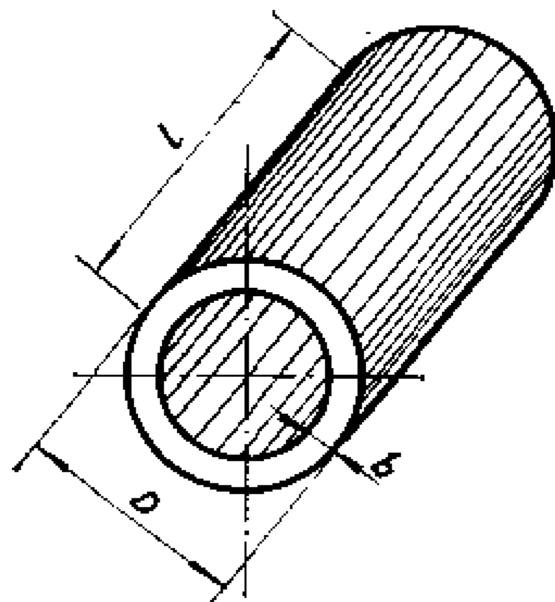
(第 8 题)

9.如图所示，一段空心圆柱形钢管的外径为D，壁厚为b，长为l.

(1) 试证明此钢管体积：
$$V=\pi lb(D-b).$$

(2) 如果$D=3.8$厘米，$b=0.5$厘米，$l=1$米，求此钢管的体积(精确到1厘米^3).

(3) 如果钢的比重是7.8克/厘米^3，求此钢管的重量W(精确到1公斤).



(第 9 题)

10.万吨水压机的四根空心钢立柱的高为18米，外径为1米，内径为0.4米，求它的重量(精确到1吨，钢的比重是7.8克/厘米^3).

第五节　分　　式

在第一节里，我们已经知道：分母中含有字母的代数式叫做分式．例如$\frac{3}{x}$，$\frac{x^2+3}{x-2}$等都是分式．

注意：分式中的分母不能等于零．如在$\frac{3}{x}$中，$x\neq0$；在$\frac{x^2+3}{x+2}$中，$x\neq-2$．如果分式的分母是零，这时分式没有意义．今后我们都假设分式的分母不为零．

一、分式的性质

1.分式的基本性质

我们知道，分数是分式的特殊情况，因此，由分数的性质可以得出分式的性质.

分式的分子和分母同乘（或同除）上一个不为零的代数式，分式的值不变．分式的这个基本性质用式子表示就是：

$$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot m}{b\cdot m};\qquad \frac{a}{b}=\frac{a\div m}{b\div m}.$$

其中m是不等于零的代数式.

利用这个性质，就可以在不改变分式值的条件下，根据需要变换分式的形式．例如

$$\frac{c}{a}=\frac{c\cdot x}{a\cdot x}=\frac{cx}{ax};\qquad 同样，\frac{my}{y^2}=\frac{my\div y}{y^2\div y}=\frac{m}{y}.$$

2.约分和通分

根据分式的基本性质，可以把分子、分母的公因式约去，将分式化为简单的形式．把一个分式的分子和分母的公因式约去叫做约分.

例1　约分：

（1）$\frac{9y}{27x}$；（2）$\frac{6a^3b^2}{-4a^2b^3c}$；（3）$\frac{ab}{a^2b-ab^2}$.

解：（1）$\frac{9y}{27x}=\frac{9y}{9\cdot 3x}=\frac{y}{3x}$；

（2）$\frac{6a^3b^2}{-4a^2b^3c}=-\frac{2a^2b^2\cdot 3a}{2a^2b^2\cdot 2bc}=-\frac{3a}{2bc}$；

（3）$\frac{ab}{a^2b-ab^2}=\frac{ab}{ab(a-b)}=\frac{1}{a-b}$.

根据分式的基本性质，把分母不同的分式化为分母相同的分式，这种做法叫做分式的通分.

例2　通分

（1）$\frac{a}{2b}$，$\frac{b}{3a^2}$，$\frac{c}{4ab}$；　　（2）$\frac{a+2b}{a^2-b^2}$，$\frac{a+b}{(a-b)^2}$.

解：（1）三个分式的分母分别是$2b$、$3a^2$和$4ab$．因为2、3、4的最小公倍数是12，a的最高次幂是a^2，b的最高次幂是b，所以它们的公分母是$12a^2b$.通分得：

$$\frac{a}{2b}=\frac{a\cdot 6a^2}{2b\cdot 6a^2}=\frac{6a^3}{12a^2b};$$

$$\frac{b}{3a^2}=\frac{b\cdot 4b}{3a^2\cdot 4b}=\frac{4b^2}{12a^2b};$$

$$\frac{c}{4ab}=\frac{c\cdot 3a}{4ab\cdot 3a}=\frac{3ac}{12a^2b}.$$

（2）两个分式的分母是a^2-b^2和$(a-b)^2$，因为$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$，所以它们的公分母是$(a+b)(a-b)^2$．通分得：

$$\frac{a+2b}{a^2-b^2}=\frac{(a+2b)(a-b)}{(a^2-b^2)(a-b)}=\frac{a^2+ab-2b^2}{(a+b)(a-b)^2};$$

$$\frac{a+b}{(a-b)^2}=\frac{(a+b)(a+b)}{(a-b)^2(a+b)}=\frac{a^2+2ab+b^2}{(a+b)(a-b)^2}.$$

二、分式的四则运算

1.分式的加减法

分式的加减法与分数一样，就是：同分母的分式相加减，分母不变，分子相加减；异分母的分式相加减，先通分后加减.

例1 计算：$\frac{a+9b}{3ab}-\frac{a-3b}{3ab}$.

解： $\frac{a+9b}{3ab}-\frac{a-3b}{3ab}=\frac{a+9b-(a-3b)}{3ab}=\frac{a+9b-a+3b}{3ab}=\frac{12b}{3ab}=\frac{4}{a}$.

例2 计算：$\frac{5}{6a^2b}-\frac{2}{3ab^2}+\frac{3}{4abc}$.

解： $\frac{5}{6a^2b}-\frac{2}{3ab^2}+\frac{3}{4abc}=\frac{10bc}{12a^2b^2c}-\frac{8ac}{12a^2b^2c}+\frac{9ab}{12a^2b^2c}=\frac{10bc-8ac+9ab}{12a^2b^2c}$.

例3 计算：$\frac{1}{x^2-4x+4}-\frac{1}{4-x^2}$.

解： $\frac{1}{x^2-4x+4}-\frac{1}{4-x^2}=\frac{1}{(x-2)^2}+\frac{1}{(x+2)(x-2)}$

$=\frac{x+2}{(x+2)(x-2)^2}+\frac{x-2}{(x+2)(x-2)^2}$

$=\frac{x+2+(x-2)}{(x+2)(x-2)^2}=\frac{2x}{(x+2)(x-2)^2}$.

2.分式的乘除法

分式的乘除法与分数的乘除法一样，就是：两分式相乘，分子的积做分子，分母的积做分母；两分式相除，先把除式的分子和分母颠倒，再和被除数相乘．用式子表示就是：

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd};\qquad \frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}.$$

例4 计算：$\frac{3x}{5a}\cdot\frac{10ab}{7x^2}$.

解： $\frac{3x}{5a}\cdot\frac{10ab}{7x^2}=\frac{3x\cdot 10ab}{5a\cdot 7x^2}=\frac{6b}{7x}$.

例5 计算：$\frac{x-5}{x+3}\cdot\frac{x^2-9}{x^2-25}$.

解：$\frac{x-5}{x+3}\cdot\frac{x^2-9}{x^2-25}=\frac{(x-5)(x^2-9)}{(x+3)(x^2-25)}$

$=\frac{(x-5)(x+3)(x-3)}{(x+3)(x+5)(x-5)}=\frac{x-3}{x+5}$.

例 6　计算：$\frac{a^2-b^2}{ab}\div(a+b)$.

解：$\frac{a^2-b^2}{ab}\div(a+b)=\frac{a^2-b^2}{ab}\cdot\frac{1}{a+b}=\frac{(a+b)(a-b)}{ab(a+b)}=\frac{a-b}{ab}$.

3.繁分式

分式的分子和分母中如果含有分式，这样的分式叫做繁分式．例如：

$\frac{1+\frac{2}{x}}{x+2}$，　$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$等都是繁分式．

例 7　化简：$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}$.

解：$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\div\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=\frac{b+a}{ab}\div\frac{b-a}{ab}=\frac{b+a}{ab}\cdot\frac{ab}{b-a}=\frac{b+a}{b-a}$.

另解：$\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}=\frac{\frac{b+a}{ab}}{\frac{b-a}{ab}}=\frac{\frac{b+a}{ab}\cdot ab}{\frac{b-a}{ab}\cdot ab}=\frac{b+a}{b-a}$.

习　　题

1.约分：

(1) $\frac{-9ab^2}{3ab}$；　(2) $\frac{16x^3y^2}{4x^2y}$；　(3) $\frac{15m^4n^3}{5mn}$；

(4) $\frac{ax+ay}{2x+2y}$；　(5) $\frac{4a-2b}{4a^2-b^2}$；

(6) $\frac{x^2-9}{x^2-7x+12}$；　(7) $\frac{x^2-4x+4}{x^2-5x+6}$；

(8) $\frac{x^2-2x+1}{x^2+3x+2}$.

2.通分：

(1) $\frac{b}{a}$，$\frac{d}{c}$；　(2) $\frac{2x}{a-b}$，$\frac{x}{b-a}$；

（3）$\frac{4}{3x}$，$\frac{x-1}{-2x^2}$，$\frac{x^2-1}{4x^3}$；　　（4）$\frac{m+2}{m-2}$，$\frac{5}{m^2-4}$；

（5）$\frac{x}{x^2-y^2}$，$\frac{x}{x^2-2xy+y^2}$．

3．计算：

（1）$\frac{m}{m-n}+\frac{n}{n-m}+\frac{3}{m-n}$；　　（2）$\frac{x-1}{3xy}+\frac{x-2}{3xy}-\frac{x-3}{3xy}$；

（3）$\frac{2a}{3b^2c}-\frac{3b}{4a^2c}+\frac{5c}{6a^2b}$；　　（4）$\frac{3}{x+3}-\frac{x-2}{x^2-9}$；

（5）$\frac{3}{x+3}-\frac{5}{x+5}$；　　（6）$\frac{x^2+y}{x}-x$；

（7）$\frac{3}{x^2-9}-\frac{7}{x^2+4x-21}$；　　（8）$\frac{m-1}{m^2+6m+9}+\frac{m-3}{m^2+4m+3}$；

（9）$\frac{1}{x^2-4x+3}-\frac{x}{x^2+7x-8}$；

（10）$\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-c)(b-a)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}$．

4．计算：

（1）$\frac{2ab}{4xy}\cdot\frac{10x^2y}{21a^2b}$；　　（2）$\frac{x^2-y^2}{a^2-b^2}\cdot\frac{a+b}{x+y}$；

（3）$\frac{x^2-4x+4}{x^2-9}\cdot\frac{x+3}{x-2}$；

（4）$\frac{ab^2}{2cd}\div\frac{3ax}{4cd}$；　　（5）$\frac{c+d}{c-d}\div\frac{c^2+cd}{2c^2-2d^2}$；

（6）$\frac{x^2-y^2}{6x^2y^2}\div\frac{x+y}{3xy}$；　　（7）$\frac{m-1}{m^2-5m+6}\div\frac{m^2-m}{m^2-3m+2}$；

（8）$(1-x^2)\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)$；

（9）$\frac{\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}}$；　　（10）$\frac{y-\frac{1}{y}}{\frac{1}{y}+1}$．

第六节　二 次 根 式

一、二次根式

在第一节里，已经介绍过根式（即无理式）的概念．这里，我们把平方根内含有字

母的代数式叫做二次根式（或平方根式）. 例如，$\sqrt{18ab}$，$\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}$等都是二次根式.

另外，$2\sqrt{3}$，$3\sqrt{5}$等也看作二次根式.

由于负数的平方根没有意义，所以在二次根式中，我们规定，根号内的所有字母都表示正数. 此外，所有含字母的二次根式都表示算术平方根.

$$\because\ (\sqrt{4})^2=2^2=4；\qquad \sqrt{4^2}=\sqrt{16}=4.$$

$$\therefore\ (\sqrt{4})^2=\sqrt{4^2}=4.$$

一般地有，

$$\boxed{(\sqrt{a})^2=\sqrt{a^2}=a}$$

二、二次根式的化简

下面我们介绍化简二次根式的方法.

1. 把根号内的因式移到根号外面

$$\because\ \sqrt{4\times 9}=\sqrt{36}=6；\sqrt{4}\times\sqrt{9}=2\times 3=6，$$

$$\therefore\ \sqrt{4\times 9}=\sqrt{4}\times\sqrt{9}.$$

一般地有，

$$\boxed{\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}}$$

就是说，乘积的二次根式等于每个因式的二次根式的乘积.

根据这个结论可得：$\sqrt{m^2b}=\sqrt{m^2}\cdot\sqrt{b}=m\sqrt{b}$.

即，如果被开方数中有的因式能开得尽，那么，这个因式就用它的算术根来代替，移到根号的外面.

例1 化简下列根式：

(1) $\sqrt{125}$；　　　　(2) $\sqrt{9a^2b^3}$.

解： (1) $\sqrt{125}=\sqrt{5^2\times 5}=5\sqrt{5}$；

(2) $\sqrt{9a^2b^3}=\sqrt{3^2a^2b^2b}=3ab\sqrt{b}$.

2. 化去分母中的根号（分母有理化）

$$\because\ \sqrt{\frac{4}{9}}=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{2}{3}；\qquad \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}=\frac{2}{3}，$$

$$\therefore\ \sqrt{\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}}.$$

一般地，当 $b\neq 0$ 时有

$$\boxed{\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}}$$

就是说，分式的二次根式等于分子的二次根式除以分母的二次根式.

根据这个结论可得： $\sqrt{\dfrac{a}{m^2}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{m^2}}=\dfrac{\sqrt{a}}{m}$.

即，如果被开方数是一个分母开得尽的分式，那么，分母可用它的算术平方根来代替，移到根号的外面.如果分母开不尽，我们可以用适当的代数式同乘分子和分母，使分母开得尽并且用它的算术根来代替，移到根号外面.

把分母的根号化去，叫做把分母有理化.

例 2 把下列各式的分母有理化：

(1) $\sqrt{\dfrac{1}{3}}$； (2) $\dfrac{5}{3\sqrt{a}}$； (3) $\sqrt{\dfrac{3}{2a}}$.

解： (1) $\sqrt{\dfrac{1}{3}}=\sqrt{\dfrac{1\times3}{3\times3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{1}{3}\sqrt{3}$；

(2) $\dfrac{5}{3\sqrt{a}}=\dfrac{5\cdot\sqrt{a}}{3\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}}=\dfrac{5}{3a}\sqrt{a}$；

(3) $\sqrt{\dfrac{3}{2a}}=\sqrt{\dfrac{3\cdot2a}{2a\cdot2a}}=\dfrac{\sqrt{6a}}{2a}=\dfrac{1}{2a}\sqrt{6a}$.

例 3 把下列各式的分母有理化：

(1) $\dfrac{4}{\sqrt{5}+1}$； (2) $\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$.

解： (1) $\dfrac{4}{\sqrt{5}+1}=\dfrac{4(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}=\dfrac{4(\sqrt{5}-1)}{5-1}=\sqrt{5}-1$；

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{(\sqrt{x}-\sqrt{y})(\sqrt{x}+\sqrt{y})}=\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}$.

3.最简根式

例 4 化简下列二次根式：

(1) $\sqrt{48a^2b}$； (2) $6\sqrt{\dfrac{a}{2b}}$.

解： (1) $\sqrt{48a^2b}=\sqrt{16a^2\cdot3b}=4a\sqrt{3b}$；

(2) $6\sqrt{\dfrac{a}{2b}}=6\sqrt{\dfrac{2ab}{4b^2}}=\dfrac{3}{b}\sqrt{2ab}$.

化简以后得到的二次根式 $4a\sqrt{3b}$ 和 $\dfrac{3}{b}\sqrt{2ab}$ 的特点是：分母不含根号，并且被开方数中的每个因式的指数都小于 2 .我们把符合这两个条件的根式叫做最简根式.

在进行二次根式运算时，所得的结果都要化成最简根式.其步骤是：先把分母有理化，再使被开方数中的每个因式的指数都小于2.

例 5 化简：$\sqrt{\dfrac{75a^3}{b}}$.

解： $\sqrt{\frac{75a^3}{b}}=\sqrt{\frac{75a^3b}{b^2}}=\frac{1}{b}\sqrt{75a^3b}=\frac{1}{b}\sqrt{25a^2\cdot 3ab}=\frac{5a}{b}\sqrt{3ab}$.

三、二次根式的四则运算

1.二次根式的加减法

被开方数和根指数都相同的根式叫做**同类根式**.例如：$\sqrt{2}$，$2\sqrt{2}$和$\frac{1}{3}\sqrt{2}$是同类根式，而$\sqrt{2}$和$\sqrt{3}$不是同类根式．$\sqrt{2}$和$\sqrt{8}$也是同类根式（因为$\sqrt{8}=2\sqrt{2}$）.

二次根式的加减法同整式的加减法一样，只要合并同类根式就可以了.

例1 计算：

(1) $5+3\sqrt{2}+7\sqrt{2}-6\sqrt{2}$；　　(2) $\sqrt{75}+\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{48}$；

(3) $\frac{2}{3}\sqrt{18ab}+6b\sqrt{\frac{a}{2b}}$；　　(4) $\frac{2x}{3}\sqrt{9x}+6x\sqrt{\frac{x}{4}}-x^2\sqrt{\frac{1}{x}}$.

解： (1) $5+3\sqrt{2}+7\sqrt{2}-6\sqrt{2}=5+(3+7-6)\sqrt{2}=5+4\sqrt{2}$；

(2) $\sqrt{75}+\sqrt{\frac{1}{3}}-\sqrt{48}=5\sqrt{3}+\frac{1}{3}\sqrt{3}-4\sqrt{3}=\left(5+\frac{1}{3}-4\right)\sqrt{3}=\frac{4}{3}\sqrt{3}$；

(3) $\frac{2}{3}\sqrt{18ab}+6b\sqrt{\frac{a}{2b}}=2\sqrt{2ab}+3\sqrt{2ab}=5\sqrt{2ab}$；

(4) $\frac{2x}{3}\sqrt{9x}+6x\sqrt{\frac{x}{4}}-x^2\sqrt{\frac{1}{x}}=2x\sqrt{x}+3x\sqrt{x}-x\sqrt{x}=4x\sqrt{x}$.

2.二次根式的乘除法

前面我们已经介绍过化简二次根式的两个公式：

$$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}; \qquad \sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (b\neq 0).$$

反过来，就得到下面的式子：

$$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}; \qquad \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}\ (b\neq 0)$$

于是可得二次根式乘（除）法的法则：被开方数相乘（除），根指数不变.

例2 计算：

(1) $\sqrt{18}\cdot\sqrt{5}$；　　(2) $\sqrt{72}\div\sqrt{6}$；

(3) $\sqrt{5x}\cdot\sqrt{3x^3}$；　　(4) $\sqrt{8x^3}\div\sqrt{2x}$.

解： (1) $\sqrt{18}\cdot\sqrt{5}=3\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}=3\sqrt{2\times 5}=3\sqrt{10}$；

(2) $\sqrt{72}\div\sqrt{6}=\sqrt{\frac{72}{6}}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$；

(3) $\sqrt{5x}\cdot\sqrt{3x^3}=\sqrt{5x\cdot 3x^3}=\sqrt{15x^4}=x^2\sqrt{15}$;

(4) $\sqrt{8x^3}\div\sqrt{2x}=\sqrt{\dfrac{8x^3}{2x}}=\sqrt{4x^2}=2x$。

习　　题

1.下面的计算是否正确？为什么？

(1) $\sqrt{4a^2}=4a$;　　(2) $\sqrt{4a^2}=2a$;

(3) $\sqrt{3^2+4^2}=3+4=7$;　　(4) $\sqrt{13^2-12^2}=13-12=1$。

2.化简：

(1) $\sqrt{121\times 125}$;　　(2) $\sqrt{\dfrac{64}{81}}$;

(3) $\sqrt{12a^2b^3}$;　　(4) $\sqrt{\dfrac{9a}{4b^2}}$。

3.把下列各式的分母有理化：

(1) $\dfrac{1}{4\sqrt{5}}$;　　(2) $\dfrac{2}{\sqrt{50}}$;

(3) $\dfrac{ab}{\sqrt{3a}}$;　　(4) $\dfrac{m}{\sqrt{8m^2}}$;

(5) $\dfrac{b}{\sqrt{a+b}}$;　　(6) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$;

(7) $\dfrac{1}{1+\sqrt{y}}$;　　(8) $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$。

4.把下列各根式化为最简根式：

(1) $\sqrt{18}$;　　(2) $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$;

(3) $\sqrt{25a^3b^{10}c^4}$;　　(4) $\sqrt{x^2y^2-x^2z^2}$;

(5) $\sqrt{(x^2-y^2)(x+y)}$;　　(6) $\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}$;

(7) $\sqrt{\dfrac{a^2x^2}{b^3}-\dfrac{2ax}{b^2}+\dfrac{1}{b}}$。

5.计算：

(1) $\sqrt{2}+\sqrt{8}-\sqrt{\dfrac{1}{8}}$;　　(2) $\dfrac{1}{3}\sqrt{18}+\dfrac{1}{2}\sqrt{18}-\dfrac{1}{5}\sqrt{50}$;

(3) $\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{24}-3\sqrt{40}\right)-\left(\sqrt{150}+\sqrt{54}-\sqrt{1000}\right)$;

(4) $\left(\sqrt{32}+\sqrt{0.5}-2\sqrt{\frac{1}{3}}\right)-\left(\sqrt{\frac{1}{8}}-\sqrt{48}\right)$;

(5) $\sqrt{16a^2b}-\sqrt{9a^2b}+3\sqrt{2}-2\sqrt{\frac{1}{2}}$;

(6) $\sqrt{(a+b)^2c}-\sqrt{a^2c}-\sqrt{b^2c}$.

6.计算:

(1) $\sqrt{3}(\sqrt{12}-3\sqrt{75})$;

(2) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})$;

(3) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$;

(4) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$;

(5) $\left(\sqrt{ab}+2\sqrt{\frac{b}{a}}-\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{1}{ab}}\right)\sqrt{ab}$;

(6) $(\sqrt{a^3b}-\sqrt{ab^3})\div\sqrt{ab}$;

(7) $\sqrt{a^3b^5c^7}\cdot\sqrt{ab^3c}$;

(8) $\sqrt{a^3b^3}\div\sqrt{a^5b^5}$.

复 习 题

1.计算:

(1) $(2x^2+3x-1)+(5x^2-7x+8)-(2x^2-3x+2)$;

(2) $(3x^2-7x+8)+(-2x^2+x-5)-(-x^2-x+1)$;

(3) $(4x-2y-z)-\{5x-[8y-2z-(x+4)]\}$.

2.计算:

(1) $(4a^2)(5ab)^3(6a^3)^2$;

(2) $\left(-\frac{2}{3}x^my\right)\left(-\frac{3}{4}xy^m\right)(x^{2m}y^2z)$;

(3) $-2xy(2.5x^2-1.5xy+0.5y^2)$;

(4) $\left(3x^2-4x-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{x}{4}\right)$;

(5) $2a(a^2-ab-b^2)-3ab(4a-2b)+2b(7a^2-4ab+b^2)$;

(6) $x-\frac{1}{2}(x+1)^2+\frac{1}{3}(x^2-1)+\frac{1}{6}(x-2)$;

(7) $(2a^2+3a-5)(2a-3)$;

(8) $(3m^2+4n^2-2mn)(-mn-n^2+5m^2)$.

3.计算:

(1) $(x-1)(x+1)(x^2+1)$;

(2) $(x+2)^2(x-2)^2$;

(3) $\left(\frac{1}{2}x+1\right)^3+\left(\frac{1}{2}x-1\right)^3$;

(4) $(x^2+1)(x^4-x^2+1)$;

(5) $(2x+1)^3-8(x-7)(x^2+7x)$.

4.把下列各式分解因式:

(1) $x^4+6x^3+9x^2$;　　(2) $40m^2n-25mn^2+30mn$;

(3) $8(a+b)x-24(a+b)y$;　　(4) $x^2+2xy+y^2-a^2-4a-4$;

(5) $x^2-4xy+4y^2-6x+12y$;　　(6) $4x^4-9y^4$;

(7) x^6-y^6;　　(8) x^8-y^8。

5.计算:

(1) $\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-3}$;　　(2) $\dfrac{2}{x-y}-\dfrac{x+y}{(x-y)^2}$;

(3) $\dfrac{1}{2a+b}-\dfrac{a}{(2a+b)^2}$;　　(4) $\dfrac{m}{am-an}+\dfrac{n}{bn-bm}$;

(5) $\dfrac{4}{(a-x)(c-x)}-\dfrac{3}{(a-x)(c-a)}+\dfrac{3}{(a-c)(x-c)}$;

(6) $\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1+x^2}$;　　(7) $\dfrac{x^2-xy}{x^2+xy}\cdot\dfrac{x^2y+xy^2}{xy}$;

(8) $\dfrac{x-1}{x+1}\cdot\dfrac{(1+x)^2}{1-x}$;　　(9) $\dfrac{x^2-4y^2}{(2x+y)^2}\div\dfrac{x-2y}{2x+y}$;

(10) $\dfrac{\dfrac{(x-y)^2}{xy-y^2}}{\dfrac{xy+y^2}{(x-y)^2}}$;　　(11) $\dfrac{1}{\dfrac{1}{R_1}+\dfrac{1}{R_2}}$。

6.计算:

(1) $\sqrt{8ab}\div\sqrt{2a}$;

(2) $\sqrt{\dfrac{2a-2b}{x^2}}\div\sqrt{\dfrac{a-b}{2bx^2}}$;

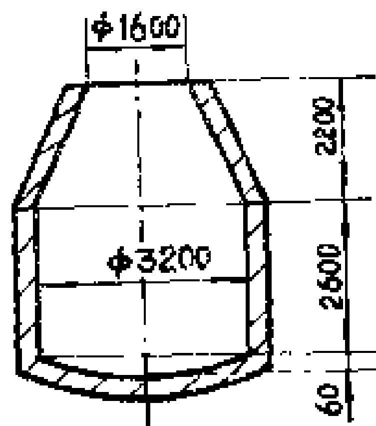
(3) $(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})$;

(4) $(\sqrt{x+y}+\sqrt{x})(\sqrt{x+y}-\sqrt{x})$;

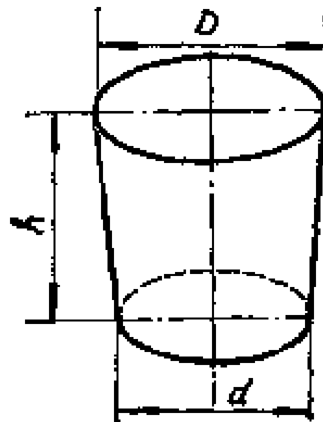
(5) $\dfrac{1+\sqrt{8}}{3-\sqrt{2}}$;　　(6) $\dfrac{1}{b+\sqrt{b^2-a^2}}$。

7.纯氧顶吹转炉的纵截面如图(尺寸单位是毫米)。炉膛底是球缺,求炉膛的容积(精确到1米³)。

8.圆台形的钢水包,内部的上、下底直径分别为$D=170$厘米、$d=150$厘米,高$h=80$厘米如图,它能盛多少吨钢水?(钢的比重是7.8克/厘米³)



(第7题)



(第8题)

第三章　代数方程

第一节　一元一次方程

一、一元一次方程的概念

在生产实践中遇到的各种数量，有些是已知的，有些是未知的，需要通过计算才能求出来.

实例：锻工要把一段直径为160毫米的圆钢，锻打成直径为200毫米、厚为50毫米的钢圆盘（图3—1）. 如果不计锻打时的损耗，问需要截取多长的圆钢？



图3—1

在这个问题里，已知数是圆盘的直径200毫米、厚50毫米，圆钢的直径160毫米，未知数是圆钢的长度. 现在要通过已知数去求未知数，也就是说，要解决“已知”和“未知”这一对矛盾.

怎样解决这对矛盾呢？毛主席指出：**“一切矛盾着的东西，互相联系着，不但在一定条件之下共处于一个统一体中，而且在一定条件之下互相转化”**. 我们知道，在不计锻打时损耗的条件下，锻打前后的体积是相等的，即

圆钢的体积	=	圆盘的体积

如果设要截取圆钢的长为x毫米，则

圆钢的体积　$V_1=\pi\left(\frac{160}{2}\right)^2\cdot x=6400\pi x$（毫米³）

圆盘的体积　$V_2=\pi\left(\frac{200}{2}\right)^2\cdot 50=500000\pi$（毫米³）

$\because\quad V_1=V_2$

$\therefore\quad 6400\pi x=500000\pi\qquad(1)$

这个等式反映了已知数和未知数之间的联系. 象这种含有未知数（也叫做元）的等式叫做方程. 未知数一般用x、y、z……表示.

例如：　　$2x=8$；　　　(2)

$$\frac{1}{3}x+40=80; \qquad (3)$$

$$4x+3y=6; \qquad (4)$$

$$x^2-5x+6=0; \qquad (5)$$

$$\frac{60}{x}=\frac{90}{x+20}. \qquad (6)$$

等都是方程.

分母不含有未知数的方程叫做整式方程;而分母中含有未知数的方程叫做分式方程.如(1)、(2)、(3)、(4)、(5)都是整式方程,(6)则是分式方程.

只含有一个未知数,并且未知数的次数是一次的整式方程,叫做一元一次方程.如(1)、(2)、(3)都是一元一次方程.

方程 $2x=8$ 表明,要求的未知数 x 乘以 2 应得 8 . 显然,当未知数 x 用 4 代替时,方程左边的值是 $2\times4=8$,和右边的值相等.

象这样能使方程两边相等的未知数的值叫做方程的解,也叫做方程的根. $x=4$ 是方程 $2x=8$ 的解.

求方程的解的过程叫做解方程.

$x=4$ 是怎样从方程 $2x=8$ 求出来的?即怎样将"未知"转化为"已知"的呢? 下面我们就来学习一元一次方程的解法.

二、一元一次方程的解法

为了解一元一次方程,我们先介绍等式的两个性质:

性质 1 等式两边同加上(或减去)一个数(或一个式子),等式仍然成立.即

若 $a=b$, 则有 $a\pm c=b\pm c$.

性质 2 等式两边同乘以(或除以)一个不为零的数(或一个式子),等式仍然成立.即

若 $a=b$, 则有 $a\cdot c=b\cdot c$; $a\div c=b\div c$, 其中 $c\neq0$.

下面通过例子说明一元一次方程的解法.

例 1 解方程:

(1) $2x=8$;

(2) $\frac{y}{5}=-4$;

(3) $6400\pi x=500000\pi$.

解: (1) 由性质 2,方程两边同除以未知数的系数 2,得

$$x=\frac{8}{2}$$

$\therefore$ $x=4$;

(2) 同理,方程两边同乘以 5(或除以未知数的系数 $\frac{1}{5}$),得

$$y=(-4)\times5$$

$\therefore$ $y=-20$;

(3) 方程两边同除以未知数的系数 6400π,得

$$x=\frac{500000\pi}{6400\pi}=\frac{5000}{64}$$

$\therefore\quad x\doteq 78.1$（毫米）.

符号“$\doteq$”，表示近似的意思.

由此可知，需要截取圆钢的长是78.1毫米.

注意：实际锻打时必须考虑损耗余量.

上面这些方程，虽然未知数的系数不同，方程右边的数也不同，但它们却属于同一类型，解这类方程，只要在方程的两边同除以未知数的系数即可. 如果用字母a表示未知数的系数，用字母b表示方程右边的数，那么这类方程可归纳成$ax=b$（$a\neq 0$）的一般形式，它的解为

$$x=\frac{b}{a}.$$

例2 解方程：$5x-2=8$

解： 由性质1，在方程两边同时加上2，得

$5x=8+2$，

$5x=10$，

$\therefore\quad x=2$.

在方程$5x-2=8$的两边同时加上2，得到$5x=8+2$，这实际上相当于将方程左边的“-2”改变符号后移到另一边去.

这说明：方程中的任何一项都可以把它的符号改变以后，从方程的一边移到另一边. 这种变形叫做移项.

必须注意：移项要变号.

例3 解方程：

（1）$4x-30=0$；　（2）$3x-11=6x-5$；　（3）$\frac{1}{3}x+40=80$.

解：（1）将-30移到右边，得

$4x=30$，

$\therefore\quad x=\frac{30}{4}=7.5$.

（2）将含有x的项移到左边，常数项移到右边，于是得

$3x-6x=-5+11$，

即　$-3x=6$，

$\therefore\quad x=\frac{6}{-3}=-2$.

（3）将40移到右边，得

$\frac{1}{3}x=80-40$，

即　$\frac{1}{3}x=40$，

$$\therefore \quad x = 40 \times 3 = 120.$$

由例 2 和例 3，可以看到解一元一次方程的基本思路是：利用移项法则，把未知数和已知数分离在等式的两边，于是方程变成$ax=b$的形式，再求其解。

例 4 解方程：

$$\frac{3+x}{2}+9=\frac{2-x}{3}$$

解： 去分母，方程两边同乘以 6，得

$$3(3+x)+9\times 6=2(2-x),$$

去括号，得 $9+3x+54=4-2x$，

移项，得 $3x+2x=4-63$，

合并同类项，得 $5x=-59$，

$$\therefore \quad x=-\frac{59}{5}=-11.8.$$

例 5 解方程：

$$a(x-b)=c(x-d),\ (a\neq c)$$

解： 去括号，得 $ax-ab=cx-cd$.

移项，得 $ax-cx=ab-cd$，即

$$(a-c)x=ab-cd,$$

$$\therefore \quad x=\frac{ab-cd}{a-c}.$$

例 6 在公式 $L=L_0(1+at)$ 中，已知$L=80.1$，$L_0=80$，$a=0.00001$，求t。

解： 由公式 $L=L_0(1+at)$ 去括号，得

$$L=L_0+aL_0t,$$

移项，得 $aL_0t=L-L_0$，

$$\therefore \quad t=\frac{L-L_0}{aL_0}.$$

把 $L=80.1$、$L_0=80$、$a=0.00001$代入上式，得

$$t=\frac{80.1-80}{0.00001\times 80}=\frac{0.1}{0.0008}$$

$$=\frac{1}{0.008}=125.$$

三、一元一次方程应用举例

下面利用一元一次方程、解决三大革命运动中有关的实际问题。

例 1 大恶霸刘文采的剥削手段之一是大斗进小斗出。瓦窑村贫农肖大娘解放前租种刘文采的地，有一年把全部收成交租都不够，被迫卖光家中所有的东西，换了八斗谷，去交所欠的六斗租，被黑心的刘文采量去六斗后，只剩下两升谷。算一算刘文采用大斗

量的一斗谷实际上等于多少斗谷？

分析：肖大娘换了8斗谷，交所欠的6斗租，被刘文采量去6斗后，只剩下两升（0.2斗），这些都是已知数；而刘文采的一大斗实际上等于多少斗是未知数．刘文采夺去的六大斗加上0.2斗等于肖大娘的8斗，这就是已知数和未知数的联系．

刘文采的6大斗＋0.2斗＝肖大娘的8斗

解：设刘文采的一大斗实际上等于x斗，根据题意，得

$$6x+0.2=8$$

移项，得 $$6x=8-0.2$$

即 $$6x=7.8$$

$$\therefore\quad x=\frac{7.8}{6}=1.3(\text{斗}).$$

答：刘文采的一大斗实际上等于1.3斗，即一斗三升．

例2 要把浓度为95%的酒精溶液600毫升，稀释成杀菌力最强的浓度为75%的酒精溶液，问需要加多少毫升的蒸馏水？

分析：酒精加蒸馏水后，浓度发生了变化，但含纯酒精的数量并没有改变，即

稀释前含纯酒精的数量＝稀释后含纯酒精的数量

解：设需加蒸馏水x毫升，根据上述分析，得方程

$$600\times95\%=(600+x)\times75\%.$$

去分母，得 $$600\times95=(600+x)\times75,$$

去括号，并化简，得

$$75x=12000,$$

$$\therefore\quad x=160\ (\text{毫升}).$$

答：需加蒸馏水160毫升．

例3 用直径80毫米的铣刀，以每分钟40米的切削速度铣削工件，问这时铣刀每分钟的转数应是多少？

解：设所求铣刀每分钟的转数是n转．

根据切削速度的计算公式：

$$v=\frac{\pi Dn}{1000},$$

可得方程

$$\frac{3.14\times80n}{1000}=40.$$

在方程的两边同时乘以1000，得

$$251.2n=40000,$$

两边同时除以251.2，得

$$n=\frac{40000}{251.2},$$

$$\therefore\quad n\doteq 159\ (\text{转/分})\ .$$

答：铣刀每分钟转数约为159转.

例 4　两个齿轮啮合传动时（图 3－2），如果主动轮的齿数$Z_1=20$，被动轮的齿数$Z_2=40$，主动轮的转速$n_1=50$转/分，求被动轮的转速.

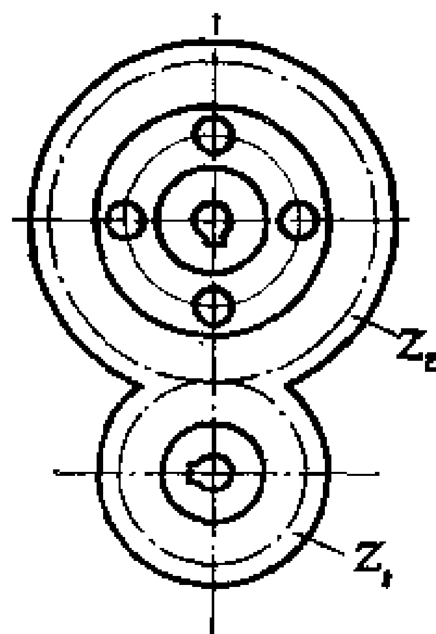


图 3－2

解：设被动轮的转速为n_2.

我们知道，在两个齿轮啮合传动中，由于每分钟两个齿轮转过的总齿数是相等的．所以

$$n_1\cdot Z_1=n_2\cdot Z_2,$$

或　　$40n_2=20\times 50$

两边同除以40，得

$$n_2=\frac{20\times 50}{40}=25\ (\text{转/分})\ .$$

答：被动轮的转速为25转/分.

习　　题

1.解下列方程：

(1) $7x=35$;　　(2) $\frac{3}{2}x=-7\frac{1}{3}$;

(3) $6x-7=35$;　　(4) $7x=2x+10$;

(5) $9x-3=5x+21$;　　(6) $\frac{1}{3}x-40=80$;

(7) $4(t-1)=2(3t+2)$;　　(8) $2x+3=13+2(2x-7)$;

(9) $2(y-2)-3(2y-1)=7(1-y)$;　　(10) $-\frac{y-2}{6}=\frac{y}{3}+1$;

(11) $\frac{25}{100}(y-40)=37.5$;　　(12) $3+0.07z=0.3-0.02z$;

(13) $x-\frac{1}{2}\left[x-\frac{1}{2}(x-1)\right]=\frac{2}{3}(x-1)$;　　(14) $\frac{2x-1}{2}+\frac{2x+5}{3}=\frac{6x-7}{4}-1$;

(15) $\frac{1}{8}+\frac{1}{6}=\frac{1}{R}$;　　(16) $\frac{60}{x}=\frac{90}{x+20}$;

(17) $(2+x)\times\frac{0.002}{100}=2\times 0.08\%$;　　(18) $x\cdot 6\%=100\times 0.015\%$;

(19) $a(x-c)=b(x+d)$;　　(20) $(a+x)(b+x)=(a-x)(b-x)$.

2.用方程表示下列等量关系，并求出它的解：

(1) x的 3 倍等于 7；

(2) x的$\frac{1}{7}$等于0.5;

(3) x的75%等于12;

(4) x的$\frac{1}{2}$与x的$\frac{1}{3}$的和等于 5；

(5) y的 7 倍减去y的 2 倍等于10;

(6) y的 5 倍比y的 2 倍大 3；

(7) x的$\frac{3}{4}$比x的$\frac{6}{7}$小 1；

(8) x的 3 倍加上 8 等于180。

3.在公式$K=\frac{D-d}{L}$中，如果

(1) 已知K，L及d，求D;

(2) 已知K，L及D，求d.

4.在公式$S=V_0t+\frac{1}{2}at^2$中，如果

(1) 已知S，a及t，求V_0;

(2) 已知S，V_0及t，求a.

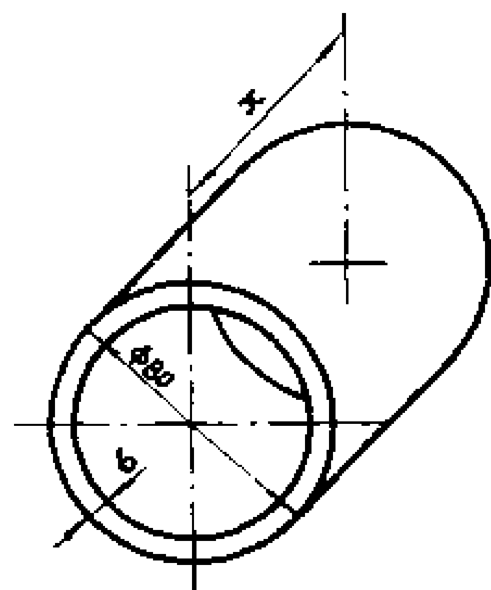
5.在公式 $S=2\pi r(r-h)$中，已知 $S=628$，$\pi=3.14$，$r=5$，求h.

6.东风机械厂要用直径是120毫米的圆钢锻打成直径为302毫米，厚为32毫米的齿轮毛坯．问应截取多长的圆钢（锻打时的损耗不计）？

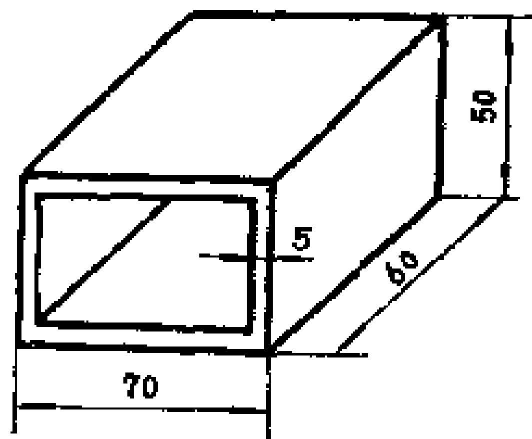
7.某工厂做零件一批，计划26天完成，工人师傅响应毛主席"**抓革命，促生产**"的伟大号召，每天多做 5 个，结果用24天不但完成了计划，并且多做了60个．问原计划每天做几个？

8.制造无缝钢管，采用冷拉成型的工艺，现要拉制如图所示的方形钢管一段．要用壁厚为 6 毫米，外径为80毫米的圆形无缝钢管多长？

9.变压器的初级线圈和次级线圈的圈数n_1，n_2与它们两端电压U_1，U_2之间有关系式$\frac{n_1}{n_2}=\frac{U_1}{U_2}$．若已知$n_1=3000$圈，$U_1=220$伏，$n_2=500$圈，求$U_2$。

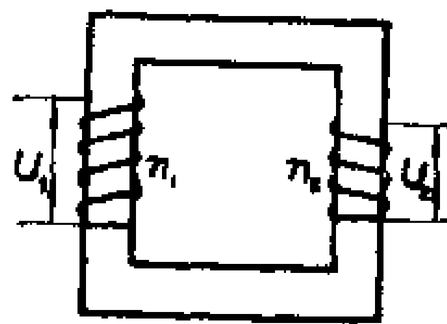


(1)



(2)

（第 8 题）



（第 9 题）

10. 一对齿轮啮合传动，已知主动轮的齿数$Z_1=60$，转速$n_1=300$转/分，被动轮的齿数$Z_2=90$，求被动轮的转速n_2.

11. 电动机的转速$n_1=1440$转/分，它的轴上的齿轮齿数$Z_1=80$齿，问被动轴的转速$n_2=900$转/分时，被动轴上的齿轮齿数Z_2是多少？

第二节　二元一次方程组

一、二元一次方程组的概念

第一节讨论了一元一次方程，即未知数只有一个，未知数的次数是一次的方程. 在实际问题中，经常会遇到两个（或多个）未知数，未知数的次数是一次的方程.

实例　解放前某工厂有工人120人，万恶的资本家每天获得暴利240元，只以其中的19.2元支付工人的工资. 已知一个成年工人每天工资仅为0.42元，童工每天工资仅为0.12元. 问这个工厂有多少成年工人和童工？

在这个问题里含有两个未知数：成年工人数和童工人数. 工人总数为120，工资总数为19.2元，成年工人工资为0.42元，童工工资为0.12元，都是已知的. 它们的联系是：

成年工人数＋童工人数＝120（工人总数），

成年工人总工资＋童工总工资＝19.2（总工资数）.

设成年工人数为x，童工数为y，于是有

$$x+y=120, \qquad (1)$$

$$0.42x+0.12y=19.2,$$

或

$$42x+12y=1920. \qquad (2)$$

方程（1）和方程（2）都含有两个未知数，并且未知数的次数都是一次的，我们把这种类型的方程叫做二元一次方程.

把几个含有相同未知数的方程联合成一组叫做方程组. 两个二元一次方程所组成的方程组叫做二元一次方程组. 象前面实例中列出的方程（1）和（2）所组成的二元一次方程组，记作

$$\begin{cases} x+y=120, & (1) \\ 42x+12y=1920. & (2) \end{cases}$$

又如

$$\begin{cases} 3x+2y=12, \\ 6x-2y=6. \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y=20, \\ 2x=3y. \end{cases}$$

等都是二元一次方程组. 它的一般形式为

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2. \end{cases}$$

其中a_1，a_2，b_1，b_2，c_1，c_2都是已知数，a_1，a_2及b_1，b_2分别是x和y的系数，c_1，c_2是常数项.

使方程组里每一个方程都成立的一组数，叫做方程组的解. 求方程组的解的过程，

叫做解方程组．例如$x=2$，$y=1$就是方程组

$$\begin{cases}x+y=3,\\x-y=1.\end{cases}$$

的解。

二、二元一次方程组的解法

如何求二元一次方程组的解，这是一个新问题．我们已经知道一元一次方程的解法，如果能把二元一次方程组转化为一元一次方程，那么问题就解决了．要把二元一次方程组转化为一元一次方程，必须设法消去一个未知数．这种消去一个未知数的方法，叫做消元法．下面介绍两种消元法：

1．代入消元法

例1　解实例中的方程组：

$$\begin{cases}x+y=120, & (1)\\42x+12y=1920. & (2)\end{cases}$$

解：消去y．由(1)式，得

$$y=120-x. \qquad (3)$$

把(3)式代入(2)式，得

$$42x+12(120-x)=1920,$$

这是一元一次方程．解这个方程，得

$$42x+12\times120-12x=1920,$$

$$42x-12x=1920-1440,$$

$$30x=480,$$

$$x=16.$$

把$x=16$代入(3)式，得

$$y=120-16=104.$$

所以方程组的解是：

$$\begin{cases}x=16,\\y=104.\end{cases}$$

即成年工人只有16人，而童工却为104人．

例2　解方程组：

$$\begin{cases}3x+2y=12, & (1)\\6x-2y=6. & (2)\end{cases}$$

解：消去x．由(2)式，得

$$x=1+\frac{y}{3}. \qquad (3)$$

把(3)式代入(1)式，得

$$3+y+2y=12,$$

$$3y=9,$$

$$y=3.$$

把$y=3$代入（3）式，得$x=2$。

所以方程组的解是：

$$\begin{cases}x=2,\\y=3.\end{cases}$$

从以上几个例子可以看出，用“代入消元法”解二元一次方程组的一般步骤是：

（1）把一个方程里的任何一个未知数用第二个未知数的代数式表示；

（2）把这个代数式代入另一个方程，消去第一个未知数，得到第二个未知数的一个一元一次方程；

（3）解这个一元一次方程，求得第二个未知数的值；

（4）把求得的值代入第一步所得的代数式中，求出第一个未知数的值；

（5）把求得的两个未知数的值合在一起，就是原方程组的解。

2.加减消元法

例3　解方程组：

$$\begin{cases}5x+3y=18, & (1)\\2x-3y=3. & (2)\end{cases}$$

我们看到方程（1）、（2）中，y的两个系数互为相反数，如果把方程（1）和（2）左右两边分别相加，就可以消去未知数y。

解： 消去y。

（1）+（2），得　$7x=21,$

$$x=3.$$

把$x=3$，代入（1），得

$$5\times3+3y=18,$$

$$3y=3,$$

$$y=1.$$

所以方程组的解是：

$$\begin{cases}x=3,\\y=1.\end{cases}$$

例4　解方程组：

$$\begin{cases}x+2y=4, & (1)\\4x+3y=11. & (2)\end{cases}$$

如果将方程（1）的两边乘以4再和方程（2）的左右两边分别相减，就可以消去未知数x。

解： 消去x。

（1）×4，得　$4x+8y=16,$　　（3）

（3）-（2），得　$5y=5,$

$$y=1.$$

把$y=1$代入（1），得　$x+2\times1=4,$

$$x=2.$$

所以方程组的解是:

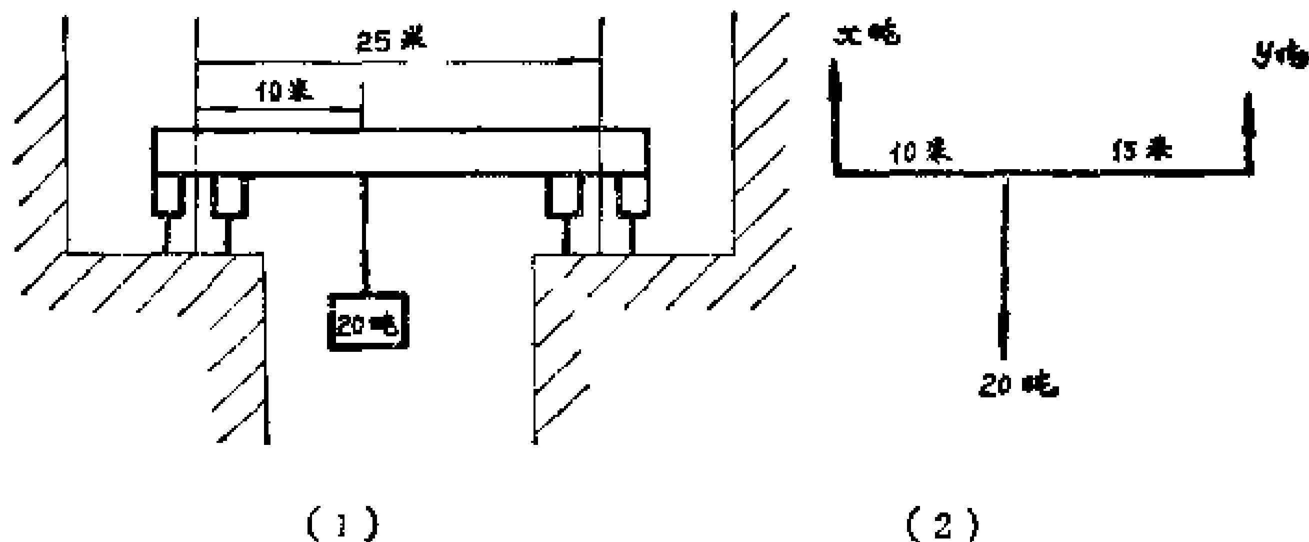
$$\begin{cases}x=2\\y=1.\end{cases}$$

从以上几个例子可以看出，在用"加减消元法"解二元一次方程组时，首先把一个或者两个方程的两边乘以适当的数，使两个方程中的同一个未知数的两个系数的绝对值相等；然后将两个方程相加或相减而消去一个未知数，使二元一次方程组化为一元一次方程；最后求出方程组的解。

三、应用举例

例 1 有一长 25 米的吊车梁〔图 3—3 (1)〕，在距离梁的一端 10 米处吊一重 20 吨的设备，问两端支承轨对这20吨设备的支承力是多大?

解: 支承轨受力情况，可以用图 3—3 （2）表示，图中箭头表示力的方向。设左支承力为x吨，右支承力为y吨。



（1）　　　　　　（2）

图 3—3

显然，两边支承力合在一起，等于所吊设备的重量，即

$$x+y=20.$$

其次，两端支承力的大小和重物到两端的距离有关.（比如两个人用一根扁担抬东西，重物在扁担的不同位置，两人"吃"的劲也不一样）.根据力学知道它们的关系是:

左支承力×设备到左端的距离=右支承力×设备到右端的距离.

以左支承力为x，右支承力为y，以及与之相对应的距离代入，得

$$x\cdot 10=y\cdot 15,$$

即　　$$2x-3y=0.$$

于是得方程组

$$\begin{cases}x+y=20, & (1)\\2x-3y=0. & (2)\end{cases}$$

（1）×2，得　$2x+2y=40.$　　（3）

（3）-（2），得　$5y=40,$

$$y=8.$$

把$y=8$代入（1）式，得

$$x=20-8=12.$$

所以方程组的解是:

$$\begin{cases}x=12,\\y=8.\end{cases}$$

答: 左支承力为12吨，右支承力为8吨.

例2 某厂生产中需用浓度为25%的烧碱溶液，工人师傅把浓度53%的烧碱溶液与5%的烧碱溶液混合使用. 计算一下. 要配制浓度为25%的烧碱溶液300公斤，需用浓度为53%和5%的烧碱溶液各多少公斤?

解: 设需用浓度5%的烧碱溶液x公斤，53%的烧碱溶液y公斤. 那么，两种烧碱溶液重量之间的关系、含纯碱重量之间的关系，可列成下表:

	5%的溶液	53%的溶液	25%的溶液
烧碱溶液的重量（公斤）	x	y	300
含纯碱的重量（公斤）	$5\%x$	$53\%y$	$25\%\times300$

根据烧碱溶液的重量混合前后不变，含纯碱的重量混合前后也不变这两个条件，可以列出方程组:

$$\begin{cases}x+y=300, & (1)\\5\%x+53\%y=25\%\times300. & (2)\end{cases}$$

化简(2)，得 $5x+53y=7500,$ (3)

(1)×5， 得 $5x+5y=1500,$ (4)

(3)−(4)，得 $48y=6000,$

$$y=125.$$

把$y=125$代入(1)，得

$$x=175.$$

所以方程组的解是:

$$\begin{cases}x=175,\\y=125.\end{cases}$$

答: 需用浓度为5%的烧碱溶液175公斤，53%的烧碱溶液125公斤.

四、多元一次方程组

在电工学、力学里，我们还会遇到解多元（三元、四元等）一次方程组的问题，前面讲过的代入消元法和加减消元法在这里仍然适用，下面举例说明.

例1 **解**方程组:

$$\begin{cases}3x-2y=5, & (1)\\4x-3y+2z=11, & (2)\\x-2y-5z=-7. & (3)\end{cases}$$

解: 把（3）式中的x用y、z来表示，得

$$x=2y+5z-7. \tag{4}$$

把（4）式代入（1）式，得

$$3(2y+5z-7)-2y=5,$$
$$6y+15z-21-2y=5,$$
$$4y+15z=26. \tag{5}$$

把（4）式代入（2）式，得

$$4(2y+5z-7)-3y+2z=11,$$
$$8y+20z-28-3y+2z=11,$$
$$5y+22z=39. \tag{6}$$

（5）式和（6）式联立即得y和z的二元一次方程组

$$\begin{cases}4y+15z=26, & (5)\\ 5y+22z=39. & (6)\end{cases}$$

（5）×5－（6）×4，得

$$75z-88z=130-156,$$
$$-13z=-26,$$
$$z=2.$$

以$z=2$代入（5），得

$$4y+30=26,$$
$$4y=-4,$$
$$y=-1.$$

以$y=-1$，$z=2$代入（3），得

$$x=-2+10-7=1.$$

所以方程组的解是：

$$\begin{cases}x=1,\\ y=-1,\\ z=2.\end{cases}$$

例2 解方程组：

$$\begin{cases}3x-y-z=2, & (1)\\ 2x+y+3z=14, & (2)\\ x-y+z=4. & (3)\end{cases}$$

解: 先消去y.

（1）+（2），得 $5x+2z=16.$ （4）

（1）－（3），得 $2x-2z=-2.$ （5）

把（4）和（5）联立即得含x、z的二元一次方程组

$$\begin{cases}5x+2z=16, & (4)\\ 2x-2z=-2, & (5)\end{cases}$$

(4)+(5)，得　$7x=14$，

$x=2$.

把$x=2$代入(4)，得

$10+2z=16$，

$z=3$.

把$x=2$，$z=3$代入(3)，得

$2-y+3=4$，

$y=1$.

所以方程组的解是：

$$\begin{cases} x=2, \\ y=1, \\ z=3. \end{cases}$$

从上面的例子可以看出，在解三元一次方程组时，可以先消去三个未知数中的一个，得出含有其他两个未知数的二元一次方程组，再解这个二元一次方程组．即

三元一次方程组$\xrightarrow[\text{转化}]{\text{消元}}$二元一次方程组$\xrightarrow[\text{转化}]{\text{消元}}$一元一次方程.

习　　题

1.解下列各方程组：

(1) $\begin{cases} x+2y=0, \\ 3x+4y=6; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} x+3y=7, \\ 2x+5y=12; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 5x+3y=18, \\ 5x-3y=12; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} 2x-3y=3, \\ 5x+3y=18; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} 3x+5y=19, \\ 4x-3y=6; \end{cases}$　　(6) $\begin{cases} 4x-5y=17, \\ 2x+5y=31; \end{cases}$

(7) $\begin{cases} 4x+3y=19, \\ 3y-7x=8; \end{cases}$　　(8) $\begin{cases} x-2y=3, \\ 5x-3y=43; \end{cases}$

(9) $\begin{cases} 5x+2y=15, \\ 8x+3y+1=0; \end{cases}$　　(10) $\begin{cases} 3x=12+2y, \\ 4x-3y=15; \end{cases}$

(11) $\begin{cases} 5I_1-I_2=110, \\ -I_1+9I_2=110; \end{cases}$　　(12) $\begin{cases} 5m+6n+7=0, \\ 2m+3n+4=0; \end{cases}$

(13) $\begin{cases} \frac{x}{4}+\frac{y}{3}=\frac{4}{3}, \\ 3(x-4)=4(y+2); \end{cases}$　　(14) $\begin{cases} 3ax+2by=-2ab, \\ 7ax+5by=3ab. \end{cases}$

2.解下列方程组：

(1) $\begin{cases} x+y=3, \\ x+z=4, \\ y+z=5; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2x-5y=-11, \\ 7y+4z=5, \\ 5x+2z=2; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x+2y+z=1, \\ 2x-y-2z=-9, \\ 3x-y+4z=3; \end{cases}$ (4) $\begin{cases} 2x+6y+3z=6, \\ 3x+15y+7z=6, \\ 4x-9y+4z=9; \end{cases}$

(5) $\begin{cases} 3x+2y-z=3, \\ 2x+3y+z=12, \\ x+y+2z=11; \end{cases}$ (6) $\begin{cases} 7x+6y+7z=100, \\ x-2y+z=0, \\ 3x+y-2z=0. \end{cases}$

3.解下列方程：

(1) $\begin{cases} x+3y-z=1, \\ 3x+y-w=4, \\ -x+z+3w=11, \\ 3x-y+w=2; \end{cases}$ (2) $\begin{cases} w+x-z=2, \\ x+2y-3w=4, \\ 3x-5y+2z=1, \\ y-z=2. \end{cases}$

4.变换下列公式：

(1) 从方程组 $\begin{cases} P=UI \\ U=IR \end{cases}$ 中消去U，用I、R表示P；

(2) 从方程组 $\begin{cases} S=V_0t+\frac{1}{2}at^2 \\ V_t=V_0+at \end{cases}$ 中消去t，导出公式$V_t^2-V_0^2=2aS$。

5.大寨大队在解放前，一户地主和三户富农所霸占的土地是五十一户贫下中农耕地的$3\frac{1}{3}$倍，地、富霸占的土地比贫下中农仅有的土地还多336亩.问解放前大寨大队的地主、富农所霸占的土地是多少亩？广大贫下中农仅有土地多少亩？

6.某工程队每天安排80个劳力去修建水库，每人每天可挖5个土方，或运3个土方．为了合理使用劳力，应该分配多少人挖土，多少人运土，才能使挖出的土及时运走？

7.某车间加工活塞和缸套，每个工人一天平均加工活塞17个或者加工缸套13个，车间共有60个工人．问两种加工的工人各是多少，才能使生产出的活塞与缸套配成套？

8.某冶炼厂需要浓度为72%的硫酸1000公斤．工人同志响应毛主席**"要进一步节约闹革命"**的号召，利用厂里的浓度为20%的废硫酸与85%的硫酸混合而成．问需要85%和20%的硫酸各多少公斤？

9.某钢铁厂用两种矿石炼铁，甲种含铁量为68%，乙种含铁量为63%．现在要配成含铁65%的矿石100吨，问两种矿石各取多少吨？

第三节 一元二次方程

一、一元二次方程的概念

上面讨论的方程，其未知数的次数都是一次的方程，在实际问题中，还会遇到未知数的次数是二次的方程．

实例　有一块长等于宽的2倍的矩形板料，把四角剪去边长为5厘米的正方形（图3—4），然后弯成容积为1500立方厘米的盒形工件．问矩形板料的宽是多少厘米？

设板料的宽为x厘米，则板料的长为$2x$厘米．由题意知

盒宽为$x-10$厘米，盒长为$2x-10$厘米，盒高为5厘米，盒的容积为1500厘米^3．

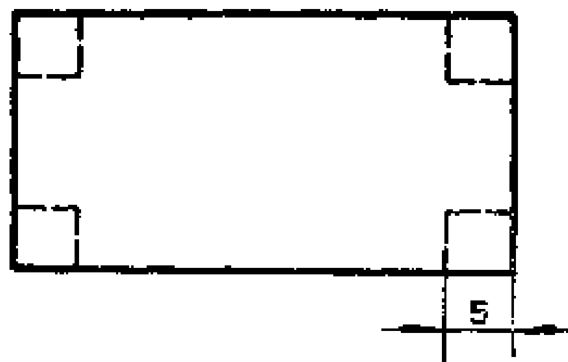


图3—4

由长方体体积公式得

$$(x-10)\cdot(2x-10)\cdot 5=1500,$$

展开，得　$10x^2-150x+500=1500,$

化简，得　$x^2-15x-100=0$．

象这种只含有一个未知数，并且未知数的最高次数是二次的方程叫做一元二次方程．

例如，$x^2=64$，$x^2-16x=0$，$y^2-y=5$，$2x^2-6x+1=0$等都是一元二次方程．

任何一个关于x的一元二次方程，都可化为下面的一般形式（标准形式）：

$$ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0).$$

其中　ax^2叫做二次项，a是二次项的系数，bx叫做一次项，b是一次项的系数，c叫做常数项．

二、一元二次方程的解法

下面介绍一元二次方程的两种解法：

1．分解因式法

例1　解方程：$x^2-16=0$．

解：把方程左边分解因式，得

$$(x-4)(x+4)=0.$$

我们知道，要使两个因式之积等于零，那么，至少要有一个因式为零．所以，要使$(x-4)(x+4)=0$，只须$x-4=0$或$x+4=0$．这样，一元二次方程$(x-4)(x+4)=0$转化为两个一元一次方程：

$$x-4=0;\qquad x+4=0.$$

由　$x-4=0$，　得$x_1=4$，

由　$x+4=0$，　得$x_2=-4$．

∴　原方程的两个根是：

$$x_1=4,\qquad x_2=-4.$$

例2　解方程：$x^2-5x+6=0$．

解：分解因式，得$(x-2)(x-3)=0$．

由　$x-2=0$，得　$x_1=2$，

由　$x-3=0$，得　$x_2=3$．

∴　原方程的两个根是：

$$x_1=2,\qquad x_2=3.$$

例 3 解方程：$3x^2+5x-12=0$．

解：分解因式，得$(3x-4)(x+3)=0$．

由 $$3x-4=0，得 x_1=\frac{4}{3},$$

由 $$x+3=0，得 x_2=-3．$$

∴ 原方程的两个根是：

$$x_1=\frac{4}{3}, \qquad x_2=-3．$$

2.公式法

现在，我们来研究一元二次方程的一般解法，先考察下面的例题。

例 4 解方程：$2x^2-5x-8=0$．

解：方程两边除以二次项的系数 2，得

$$x^2-\frac{5}{2}x-4=0．$$

把常数项移到方程的右边，得

$$x^2-\frac{5}{2}x=4．$$

方程两边各加上一次项系数一半的平方，得

$$x^2+2\left(-\frac{5}{4}x\right)+\left(-\frac{5}{4}\right)^2=4+\left(-\frac{5}{4}\right)^2,$$

即 $$\left(x-\frac{5}{4}\right)^2=\frac{89}{16}.$$

根据平方根的定义，得

$$x-\frac{5}{4}=\pm\sqrt{\frac{89}{16}}=\pm\frac{\sqrt{89}}{4}.（两个一元一次方程）$$

解得 $$x_1=\frac{5}{4}+\frac{\sqrt{89}}{4}=\frac{5+\sqrt{89}}{4},$$

$$x_2=\frac{5}{4}-\frac{\sqrt{89}}{4}=\frac{5-\sqrt{89}}{4}.$$

∴ 原方程的两个根是：

$$x_1=\frac{5+\sqrt{89}}{4}, \quad x_2=\frac{5-\sqrt{89}}{4}.$$

这种解法的步骤是：

(1) 把二次项系数化为 1；

(2) 把常数项移到右边，再在方程两边各加上一次项系数一半的平方，使方程左边化成完全平方的形式；

(3) 根据平方根的定义，得到两个一元一次方程；

(4) 解这两个方程，就得到原方程的两个根。

一般地，解一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0\ .(a\neq 0)$$

方程两边同除以二次项系数 a，得

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0\ .$$

把常数项移到方程的右边，得

$$x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}.$$

方程两边同加上一次项系数一半的平方，得

$$x^2+\frac{b}{x}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2,$$

即
$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}.$$

两边开平方，得

$$x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

移项，得

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

即
$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

由此得到，一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的求根公式：

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\ (a\neq 0)$$

在用这个公式解一元二次方程时，必须把方程整理成一般形式：

$$ax^2+bx+c=0\ .\ (a\neq 0)$$

然后把方程中各项的系数代入求根公式进行计算，就可求出方程的根。

例 5 用公式法解下列方程：

(1) $2x^2-5x-3=0$；

(2) $4x^2=12x-9$.

解：(1) 因为 $a=2$，$b=-5$，$c=-3$，

$$b^2-4ac=(-5)^2-4\times 2\times(-3)=25+24=49,$$

所以
$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{49}}{2\times 2}=\frac{5\pm 7}{4}.$$

即
$$x_1=\frac{5+7}{4}=3\ ,\qquad x_2=\frac{5-7}{4}=-\frac{1}{2}.$$

(2) 先把方程写成一般形式：$4x^2-12x+9=0$.

因为 $a=4$，$b=-12$，$c=9$，

$$b^2-4ac=(-12)^2-4\times4\times9=144-144=0,$$

所以 $$x=\frac{-(-12)\pm\sqrt{0}}{2\times4}=\frac{12\pm0}{8}.$$

即 $$x_1=x_2=1\frac{1}{2}.$$

例 6 解方程：$x^2+2x+5=0$.

解： 因为$a=1$，$b=2$，$c=5$，

$$b^2-4ac=2^2-4\times1\times5=4-20=-16,$$

所以 $$x=\frac{-2\pm\sqrt{-16}}{2}.$$

这里我们遇到了负数开平方的情况．由于实数范围内负数开平方没有意义，所以该方程在实数范围内没有解．为了表示负数开平方这种情况，我们引进新的数 j，叫做虚数单位，它的平方等于-1，即

$$j^2=-1\text{，或 }j=\sqrt{-1}.$$

$\because\ (j\sqrt{16})^2=j^2(\sqrt{16})^2=-16,$

$\therefore\ \sqrt{-16}=j\sqrt{16}=j4.$

一般地，我们规定：

当$a>0$时，$\sqrt{-a}=j\sqrt{a}$

于是方程 $x^2+2x+5=0$的两个根可表示为

$$x=\frac{-2\pm j4}{2}=-1\pm j2,$$

即 $$x_1=-1+j2,\ x_2=-1-j2.$$

形如$a+jb$（其中a，b都是实数）的数叫做复数．例如：$-1+2j$；$-1-2j$都是复数．

当方程的根是实数时，称方程有实根，当方程的根为复数时，称方程有复根．

毛主席教导我们：“**尤其重要的，成为我们认识事物的基础的东西，则是必须注意它的特殊点**”．一元二次方程与一元一次方程相比，特殊点表现在未知数x的最高次数是2，由此决定了另一个非常重要的特点：一元二次方程有两个根．从上面的例子得到，在求根公式中，根据b^2-4ac的值可以判定一元二次方程$ax^2+bx+c=0$的根的三种情况：

(1) 当$b^2-4ac>0$时，方程有两个不相等的实根，如例5中的(1)；

(2) 当$b^2-4ac=0$时，方程有两个相等的实根，如例5中的(2)；

(3) 当$b^2-4ac<0$时，方程有两个不相等的复根，如例6．

我们把b^2-4ac叫做一元二次方程$ax^2+bx+c=0$的根的判别式．

例 7 解本节开始提出的实际问题.

解: 在方程$x^2-15x-100=0$中,

因为 $a=1$, $b=-15$, $c=-100$,

$b^2-4ac=(-15)^2-4\times1\times(-100)=225+400=625$,

所以 $x=\dfrac{-(-15)\pm\sqrt{625}}{2\times1}=\dfrac{15\pm25}{2}$.

即 $x_1=\dfrac{15+25}{2}=20$,

$x_2=\dfrac{15-25}{2}=-5$(不合题意,舍去).

答: 板料的宽为20厘米.

例 8 解下列方程:

(1) $(12-2x)(8-2x)=8$;

(2) $r^2-5r+25=0$.

解: (1) 把原方程整理,得

$x^2-10x+22=0$.

因为 $a=1$, $b=-10$, $c=22$,

$b^2-4ac=(-10)^2-4\times1\times22=100-88=12$,

所以 $x=\dfrac{-(-10)\pm\sqrt{12}}{2}=\dfrac{10\pm2\sqrt{3}}{2}=5\pm\sqrt{3}$.

故得 $x_1=5+\sqrt{3}$, $x_2=5-\sqrt{3}$.

(2) 因为$a=1$, $b=-5$, $c=25$,

$b^2-4ac=(-5)^2-4\times1\times25=25-100=-75$,

所以 $x=\dfrac{-(-5)\pm\sqrt{-75}}{2}=\dfrac{5\pm\sqrt{(-1)\cdot25\cdot3}}{2}=\dfrac{5\pm j5\sqrt{3}}{2}$.

即 $x_1=\dfrac{5}{2}+j\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$, $x_2=\dfrac{5}{2}-j\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$.

三、应用举例

例 1 如图 3—5 所示,冷拔一根钢管.钢管原来的外径是72毫米,壁厚是 4 毫米,长度是4000毫米.经冷拔后,外径是60毫米,长度是5600毫米,求冷拔后钢管的壁厚(精确到0.1毫米).已知计算钢管体积的公式为:

$$V=\pi lb(D-b).$$

其中 l 是长度,b 是壁厚,D是外径(参看第二章第四节习题第 9 题).

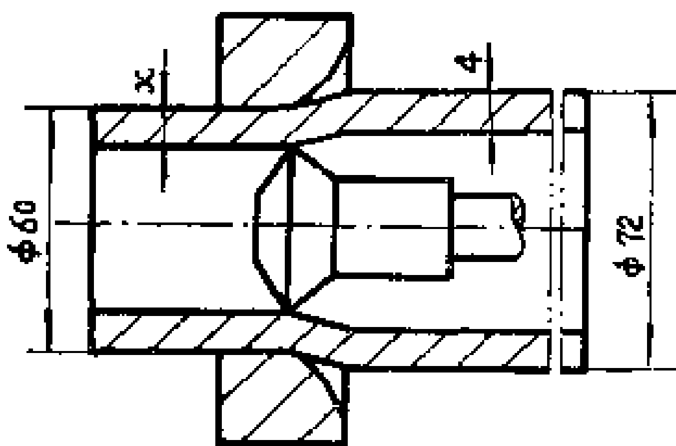


图 3—5

解： 设冷拔后钢管的壁厚为x毫米.由于冷拔前后钢管的体积不变，所以

$$\pi 5600x(60-x)=\pi 4000\times 4(72-4),$$

整理后得 $$7x^2-420x+1360=0.$$

$$\because\quad b^2-4ac=(-420)^2-4\times 7\times 1360=138320,$$

$$\therefore\quad x=\frac{420\pm\sqrt{138320}}{14}=\frac{420\pm 371.9}{14}.$$

即 $$x_1=56.6\text{（不合题意，舍去）},$$

$$x_2=3.4.$$

答： 冷拔后钢管壁厚为3.4毫米.

例2 物体从空中下落时，如果忽略空气的阻力，那么下落的距离S和时间t之间有下列关系式：

$$S=V_0t+\frac{1}{2}gt^2,$$

其中 V_0表示物体下落时的初速度，$g=9.8$米/秒^{2}是重力加速度.

现设物体从$S=100$米的空中下落，初速$V_0=10$米/秒.求物体落地所需要的时间.

解： 把$S=100$，$V_0=10$，$g=9.8$代入公式，得

$$100=10t+\frac{1}{2}9.8t^2.$$

这是关于t的一元二次方程，写成一般形式：

$$4.9t^2+10t-100=0,$$

$$b^2-4ac=10^2-4\times 4.9\times(-100)=100+1960=2060,$$

所以 $$t=\frac{-10\pm\sqrt{2060}}{2\times 4.9}.$$

因为下落时间不能是负的，所以只取“+”号.

$$t=\frac{-10+\sqrt{2060}}{9.8}\doteq\frac{-10+45.39}{9.8}\doteq 3.6.$$

答： 物体落地需要的时间是3.6秒.

四、简单的二元二次方程组的解法

同二元一次方程组的解法类似，二元二次方程组也是用消元法来解.

例1 解方程组：

$$\begin{cases}y=x^2+1, & (1)\\ y=x+3. & (2)\end{cases}$$

解： 将(1)式代入(2)式，得

$$x^2+1=x+3,$$

即 $$x^2-x-2=0.$$

分解因式， $$(x+1)(x-2)=0.$$

由　　$x+1=0$　或　$x-2=0$，得

$x_1=-1$，$x_2=2$.

把　　$x_1=-1$ 代入(2)式，得

$y_1=2$.

把　　$x_2=2$ 代入(2)式，得

$y_2=5$

所以方程组的两组解是：

$$\begin{cases}x_1=-1,\\y_1=2;\end{cases}\qquad\begin{cases}x_2=2,\\y_2=5.\end{cases}$$

例 2　解方程组：

$$\begin{cases}x+y=14, & (1)\\x^2+y^2=100. & (2)\end{cases}$$

解：由(1)得　$y=14-x$，　　(3)

把(3)代入(2)，得

$x^2+(14-x)^2=100$,

化简　　$2x^2-28x+96=0$，

即　　$x^2-14x+48=0$.

分解因式，　　$(x-6)(x-8)=0$.

由　　$x-6=0$　或　$x-8=0$，得

$x_1=6$，　$x_2=8$，

把x的二值分别代入（3），得

$y_1=8$，$y_2=6$.

所以方程组的两组解是：

$$\begin{cases}x_1=6,\\y_1=8;\end{cases}\qquad\begin{cases}x_2=8,\\y_2=6.\end{cases}$$

习　　题

1.解下列方程：

(1) $x^2-256=0$;　　(2) $9x^2=4$;

(3) $x^2+7x=0$;　　(4) $2x^2=3x$;

(5) $x^2-6x+5=0$;　　(6) $x^2+x-2=0$;

(7) $x^2+10x-24=0$;　　(8) $x^2+2x=15$;

(9) $4x^2-x=3$;　　(10) $3x^2=8x-5$;

(11) $x^2+9=6x$;　　(12) $9x^2=30x-25$;

(13) $x^2+4x+1=0$;　　(14) $x^2-2x-2=0$;

(15) $x^2+x-1=0$;　　(16) $x^2-x+1=0$;

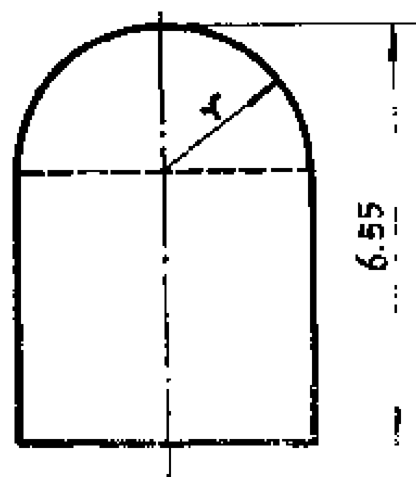
(17) $x^2+2x+5=0$;　　(18) $2x^2-3x+2=0$;

(19) $3y^2+5y+7=0$;　　(20) $(3x-1)(x+2)=20$.

2.在一块长为12厘米，宽为10厘米的长方形铁片中央，要冲出一个面积为 8 厘米^{2}的孔，要求孔的四周所留的铁皮一样宽，问这个宽度是多少？

3.矩形的周长等于52厘米，面积等于144厘米^2，求边长。

4.隧道的横截面如图所示，它的上部是半圆形，下部是长方形，根据设计的要求，隧道的横截面积$S=29.4$平方米，半圆的最高点到长方形下底的距离是6.55米．试计算上部半圆的半径r是多少米（精确到0.01）？



（第 4 题）

5.参看图 3 — 5，冷拔一根钢管，钢管原来的外径是80毫米，壁厚 5 毫米，长度是3500毫米，经冷拔后，外径是70毫米，长是5000毫米，求冷拔后钢管的壁厚（精确到0.1毫米）．

6.用每秒98米的速度V_0向上抛一物体，问经过多少时间才能落到地上．已知物体与地面距离公式为$S=V_0t-\frac{1}{2}gt^2$，其中$g=9.8$米/秒^2，空气阻力忽略不计．

7.解下列方程组：

(1) $\begin{cases}x^2+y^2=25,\\x+y=7;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}y=x^2,\\y+4x+4=0.\end{cases}$

复　习　题

1.解下列一元一次方程：

(1) $3x-(4-2x)=\frac{1}{3}(2x-3)$；

(2) $\frac{5}{12x-8}=\frac{7}{12x-24}$；

(3) $\frac{2}{3}\left[\frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}x-1\right)-4\frac{1}{2}\right]-2=x$；

(4) $\frac{3}{4}\left(\frac{x-1}{x+1}-2\right)=-\frac{5}{4}$.

2.解下列二元一次方程组：

(1) $\begin{cases}2x-\frac{y}{3}=3,\\\frac{x}{2}=4+y;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}\frac{2}{3}x+\frac{3}{4}y=\frac{3x-2y}{2}+1,\\\frac{3x}{2}-\frac{4y}{3}=\frac{3x+4y}{6}-1.\end{cases}$

3.解下列多元方程组：

(1) $\begin{cases}2x+3y+z=380,\\3x+4y+2z=560,\\4x+5y+z=660;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}2x-y+2z=8,\\y+2z=-2,\\3x+y-4z=1;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}10x-y+3z=5,\\4t-5x=6,\\2y+3t=6,\\3y+2t=4.\end{cases}$

4.解下列方程：

(1) $\sqrt{2}x^2-\sqrt{3}x+\sqrt{2}=0$； (2) $mx^2-(m-n)x-n=0$.

5.判断 k 取什么值时，下列方程有两个不等的实根，有两个相等的实根，有两个不等的复数根。

(1) $-x^2-3x+k=0$； (2) $3x^2=6x+1-k$；

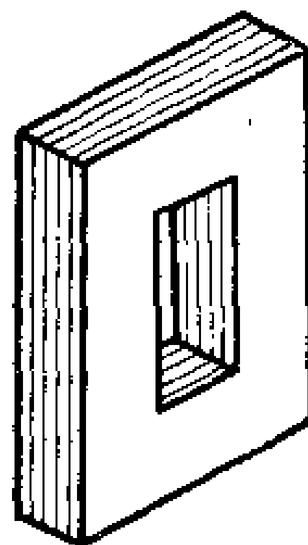
(3) $x^2-2kx+9=0$.

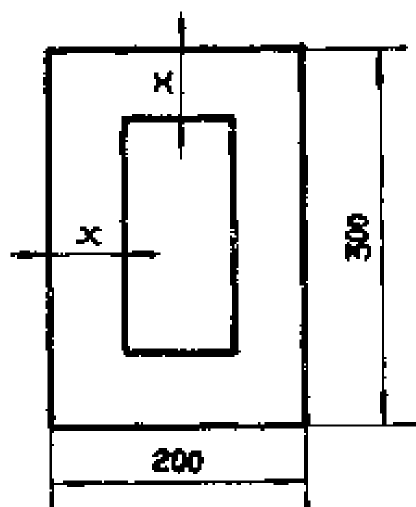
6.某钢厂炼一炉钢，有钢水11吨，取样化验，含铜量为0.253%（按规定含铜量不能超过0.25%）．为了降低含铜量，把薄板车间含铜量为0.14%的边角料加入炉内．问这炉钢需要加多少薄板边角料，才能把含铜量降到0.25%？

7.机械厂加工一种齿轮，需要车、铣两道工序．一台车床每天可以加工齿轮30个，一台铣床每天可以加工齿轮10个．现在有8人担任加工这批齿轮任务．问需要几个人上车床，几个人上铣床，才能使两道工序每天加工的齿轮数相同？

8.玻璃厂熔炼玻璃液，原料是由石英砂和长石粉混合而成，要求配料中含二氧化硅70%．根据化验，石英砂中含二氧化硅99%，长石粉中含二氧化硅67%．在3.2吨原料中石英砂和长石粉各需要多少吨？

9.变压器矽钢片的芯子如图所示．要把一块300毫米×200毫米的长方形矽钢片，从中央截去一块面积为14400平方毫米的长方形，并使四周剩下的一样宽，求这个宽度．





（第9题）

第四章　指数和对数

第一节　指数概念的推广

在第一、第二章中，我们已介绍过指数为正整数的幂的概念和它的运算法则，这些运算法则是：

1.同底数的幂相乘　　$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$；

2.同底数的幂相除　　$a^m \div a^n = a^{m-n}$，$(a \neq 0，m > n)$；

3.幂的乘方　　$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$；

4.积的乘方　　$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$；

5.商的乘方　　$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$，$(b \neq 0)$.

其中，m、n都是正整数.

毛主席教导我们："**马克思主义者认为人类社会的生产活动，是一步又一步地由低级向高级发展，因此，人们的认识，不论对于自然界方面，对于社会方面，也都是一步又一步地由低级向高级发展，即由浅入深，由片面到更多的方面。**"为了进一步解决三大革命实践中所提出的问题，我们必须把指数的概念加以推广.

一、零指数

我们知道：

$$3^2 \div 3^2 = 1；$$

$$a^4 \div a^4 = 1，(a \neq 0).$$

另一方面，如果我们仍然应用"同底数幂相除的运算法则"，就有

$$3^2 \div 3^2 = 3^{2-2} = 3^0；$$

$$a^4 \div a^4 = a^{4-4} = a^0，(a \neq 0).$$

上面两个式子的右端是我们以前没有学过的指数为零的幂.由此可见，为了使"同底数幂相除的运算法则"仍然成立，必须规定：

$$3^0 = 1；$$

$$a^0 = 1，(a \neq 0).$$

一般地，我们规定：任何一个不等于零的数的零次幂等于1，即

$$\boxed{a^0 = 1，\qquad (a \neq 0)}$$

必须指出，零的零次幂"0^0"是没有意义的.

二、负整数指数

我们知道：

$$3^2\div 3^6=\frac{3^2}{3^6}=\frac{3\times 3}{3\times 3\times 3\times 3\times 3\times 3}=\frac{1}{3\times 3\times 3\times 3}=\frac{1}{3^4};$$

$$a^2\div a^5=\frac{a^2}{a^5}=\frac{a\times a}{a\times a\times a\times a\times a}=\frac{1}{a\times a\times a}=\frac{1}{a^3},\ (a\neq 0).$$

另一方面，如果我们仍然用“同底数幂相除的运算法则”，就有

$$3^2\div 3^6=3^{2-6}=3^{-4};$$

$$a^2\div a^5=a^{2-5}=a^{-3},\ (a\neq 0);$$

上面两个式子的右端是我们以前没有学过的指数为负整数的幂.由此可见，为了使“同底数的幂相除的运算法则”仍然成立，必须规定：

$$3^{-4}=\frac{1}{3^4};$$

$$a^{-3}=\frac{1}{a^3},\ (a\neq 0).$$

一般地，我们规定：不等于零的数的负整数次幂等于这个数的正整数次幂的倒数.即

$$a^{-m}=\frac{1}{a^m},\ (a\neq 0,\ m\text{是正整数})$$

必须指出，零的负整数次幂是没有意义的.

引入零指数幂和负整数指数幂以后，我们把指数的概念推广到了全体整数的范围；而指数为正整数时幂的运算法则，对于指数为零和负整数的幂仍然适用.例如，

(1) $a^2\cdot a^0=a^{2+0}=a^2$，$(a\neq 0)$；

(2) $a^{-3}\cdot a^2=a^{-3+2}=a^{-1}=\frac{1}{a}$，$(a\neq 0)$.

例 1 用小数表示下列各数：

(1) 10^{-1}；(2) 10^{-2}；(3) 10^{-3}；(4) 10^{-4}.

解： (1) $10^{-1}=\frac{1}{10}=0.1$；

(2) $10^{-2}=\frac{1}{10^2}=0.01$；

(3) $10^{-3}=\frac{1}{10^3}=0.001$；

(4) $10^{-4}=\frac{1}{10^4}=0.0001$.

一般说，$10^{-n}=\frac{1}{10^n}=0.\underbrace{00\cdots0}_{n\text{个零}}1$，($n$为正整数).

在生产斗争和科学实验中，为方便起见，常把某些正数N表示为一位整数的小数Z（或者一位整数）乘以10的整数次幂的形式，即

$$N=Z\times 10^n,\ (1\leqslant Z<10,\ n\text{为整数}).$$

例如，

$$2300=2.3\times 1000=2.3\times 10^3;$$

$$0.023=2.3\times 0.01=2.3\times 10^{-2};$$

$$0.0023=2.3\times 0.001=2.3\times 10^{-3}.$$

又如，铀原子的重量是0.00000000000000000000003901克，可以表示为3.901×10^{-23}克.

例 2 通过对水的分析，发现18克水中含有6.06×10^{23}个水分子，求一个水分子的重量.

解：一个水分子的重量$=\dfrac{\text{水的总重量}}{\text{水分子总数}}=\dfrac{18}{6.06\times 10^{23}}=\dfrac{18}{6.06}\times 10^{-23}$

$$=2.97\times 10^{-23}(\text{克}).$$

答：一个水分子的重量是2.97×10^{-23}克.

三、分数指数

在讲开方时，我们曾讲过：若$x^n=a$（n是大于1的正整数），那么x叫做a的n次方根．当$a\geqslant 0$时，用$\sqrt[n]{a}$表示a的n次算术根．显然：

$$\boxed{(\sqrt[n]{a})^n=a,\quad a\geqslant 0}$$

因为

$$(\sqrt[n]{a^n})^n=a^n,\quad a\geqslant 0,$$

所以我们又有

$$\boxed{\sqrt[n]{a^n}=a,\quad a\geqslant 0}$$

根据上式，可以知道

$$\sqrt[5]{5^{10}}=\sqrt[5]{(5^2)^5}=5^2,$$

而

$$5^2=5^{\frac{10}{5}},$$

$$\therefore\quad 5^{\frac{10}{5}}=\sqrt[5]{5^{10}};$$

同样，

$$\because\quad \sqrt[3]{6^9}=\sqrt[3]{(6^3)^3}=6^3,$$

而

$$6^3=6^{\frac{9}{3}},$$

$$\therefore\quad 6^{\frac{9}{3}}=\sqrt[3]{6^9}.$$

一般地，我们规定：

$$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}，\ (a\geqslant 0，m、n\text{是正整数})$$

例如，

$$5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5};$$

$$7^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{7^2};$$

$$(\sqrt[3]{xy})^2=(xy)^{\frac{2}{3}};$$

$$\sqrt{(x+y)^3}=(x+y)^{\frac{3}{2}}.$$

我们知道，开方和乘方是一对互逆运算，但它们在上述幂的意义下，统一了起来：当指数是正整数时，就是乘方；当指数是正整数的倒数时，就是开方．例如，a^3表示a的立方，$a^{\frac{1}{3}}$表示a的立方根．

和指数为负整数时幂的意义一样，当指数为负分数时，我们规定：

$$a^{-\frac{m}{n}}=\frac{1}{a^{\frac{m}{n}}}=\frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}，\ (a>0，m、n\text{为正整数})$$

在本章里，如果没有特别说明，当指数为正分数时，表示底数的字母代表正数或零；当指数为负分数时，表示底数的字母代表正数．

显然，零的正分数次幂是零；但是必须指出：零的负分数次幂是没有意义的．

引入了分数指数幂的概念以后，我们把指数概念推广到了整个有理数范围；而指数为正整数时幂的运算法则，对于指数为分数的幂，仍然适用．例如，

(1) $a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{-\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{3}\right)}=a^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}=a^{\frac{1}{6}}$;

(2) $\left(a^{-\frac{1}{2}}\right)^4=a^{-\frac{1}{2}\times 4}=a^{-2}=\frac{1}{a^2}$;

(3) $\left(27a^{-3}b^{\frac{1}{2}}c^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}=(27)^{\frac{1}{3}}\cdot a^{-3\times\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}\cdot c^{-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}$

$$=3a^{-1}b^{\frac{1}{6}}c^{-\frac{1}{6}}=\frac{3b^{\frac{1}{6}}}{ac^{\frac{1}{6}}}.$$

例 简化下列各根式：

(1) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$;　(2) $\frac{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x^2}}{x\cdot\sqrt[6]{x}}$;　(3) $\frac{y\sqrt{xy}}{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y^2}}$;　(4) $\left(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2$.

解： (1) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}=\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}}=x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}=x^{\frac{1}{6}}=\sqrt[6]{x}$;

(2) $\dfrac{\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{x^2}}{x\cdot\sqrt[6]{x}}=\dfrac{x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{2}{3}}}{x\cdot x^{\frac{1}{6}}}=\dfrac{x^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}}{x^{1+\frac{1}{6}}}=\dfrac{x^{\frac{7}{6}}}{x^{\frac{7}{6}}}=x^{\frac{7}{6}-\frac{7}{6}}=x^0=1$；

(3) $\dfrac{y\sqrt{xy}}{\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y^2}}=\dfrac{y(xy)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}\cdot y^{\frac{2}{3}}}=\dfrac{y\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}\cdot y^{\frac{2}{3}}}=x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}\cdot y^{1+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}}$

$=x^{\frac{1}{6}}y^{\frac{5}{6}}=\sqrt[6]{x}\cdot\sqrt[6]{y^5}$；

(4) $\left(\sqrt{a}-\dfrac{1}{\sqrt{b}}\right)^2=\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{-\frac{1}{2}}\right)^2$

$=\left(a^{\frac{1}{2}}\right)^2-2a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}+\left(b^{-\frac{1}{2}}\right)^2=a-2\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\dfrac{1}{b}$.

习　　题

1. 计算下列各式：

(1) $3a^2b+4a^2b$；(2) $3a^2b\cdot4a^2b$；(3) $(3a^2b)^2$；(4) $(3a^2+b)^2$；

(5) $16a^4\div12a^2$；　　(6) $\left(-\dfrac{2a^2}{b}\right)^2$.

2. 下列计算是否正确？为什么？

(1) $7^4\div7^3=7$；(2) $(-1)^0=-1$；(3) $(-1)^{-1}=1$；(4) $3a^{-2}=\dfrac{1}{3a^2}$；

(5) $(-x)^5\div(-x)^3=-x^2$.

3. 把下列各数写成$z\times10^{-n}$或$z\times10^n$（$1\leqslant z<10$，n为正整数）的形式：

(1) 0.0036；(2) 0.0000039；(3) 空气的比重为0.001293克/厘米^3；

(4) 800000000；(5) 电子计算机运算速度为每秒1500000次；

(6) 地球到月球的距离为384000000公里.

4. 简化下列各式，使其不含负指数：

(1) $\dfrac{(ab)^{-1}}{c^2}$；　(2) $\left(\dfrac{x+3y}{7x+8y}\right)^{-2}$；　(3) $\dfrac{5^{-1}xy^{-2}}{2^{-3}ab^{-4}}$；　(4) $\dfrac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-1}+b^{-1}}$；

(5) $\dfrac{a^{-5}b^{-3}c^2}{a^5bc^{-3}}$；　(6) $\dfrac{x^3yz^{-4}}{x^{-1}y^{-5}z}$.

5. 用最简根式表示下列各式：

(1) $8^{\frac{1}{2}}$；　(2) $2^{-\frac{1}{2}}$；　(3) $x^{-\frac{2}{3}}$；　(4) $10^{0.5}$；　(5) $10^{-0.5}$；

(6) $\left(\dfrac{5}{4}\right)^{\frac{1}{3}}$.

6. 用分数指数的幂表示下列各式：

(1) $\sqrt[3]{x^2}$；(2) $\sqrt{a^8b^4}$；(3) $\sqrt[4]{(a+b)^3}$；(4) $\sqrt[5]{a^3b^{-1}}$；

(5) $\frac{1}{\sqrt[3]{a}}$；　(6) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y^2}}$.

7.计算下列各题：

(1) $64^{\frac{2}{3}}$；　(2) $121^{-\frac{1}{2}}$；　(3) $(0.00001)^{\frac{3}{5}}$；　(4) $2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{4}$；

(5) $\left(3\frac{3}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$；　(6) $4^{-2}\left(2\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$；　(7) $(0.0001)^{-0.5}$；

(8) $4^{3}\left(1\frac{1}{3}\right)^{-2\frac{1}{2}}$.

8.计算下列各式：

(1) $(a^{-6}b^{-2}x^{-4})^2$；　(2) $\left(\frac{a^2b^{-5}c^{-1}}{2xy^2}\right)^2$；　(3) $\left(x^{\frac{3}{2}}y^{-\frac{1}{3}}\right)^6$；

(4) $\frac{5a^{-2}b^{-3}}{5^{-1}a^2b^{-2}}$；　(5) $\frac{15a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{3}{4}}}{25a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{5}{4}}}$；　(6) $x^2\left(4x^{-\frac{2}{3}}-2x^{-\frac{1}{3}}+1\right)$；

(7) $\frac{x^3y^{-2}-x^2y^{-1}+x-y}{xy^{-2}}$；　(8) $\frac{x^{-2}-y^{-2}}{x-y^{-1}}$；　(9) $\frac{6a+1-a^{-1}}{3a+2-a^{-1}}$.

9.简化下列各根式：

(1) $x^2y\sqrt{x^{-4}y^{-6}}$；　(2) $\frac{\sqrt{\frac{a^3}{b}}\cdot\sqrt{\frac{a^2}{b^3}}}{\sqrt{\frac{a}{b^2}}}$；

(3) $\frac{\sqrt[3]{\frac{a^2}{b}}\cdot\sqrt[3]{\frac{a}{b^2}}}{\sqrt[3]{\frac{a}{b}}}$；　(4) $\sqrt{\frac{3y}{x}}\cdot\sqrt[3]{\frac{3x^2}{y}}$.

第二节　对　　数

在三大革命实践中，我们常会遇到下面的一些计算问题：

例如，某工厂年产机床600台，工人师傅响应毛主席“**抓革命，促生产**”的伟大号召，提出今后每年要比前一年增产20%，问需要几年可以达到年产3600台？

设需要x年，那末有

$$600\underbrace{\left(1+\frac{20}{100}\right)\left(1+\frac{20}{100}\right)\cdots\left(1+\frac{20}{100}\right)}_{x\text{个}}=3600,$$

从而得方程

$$600\left(1+\frac{20}{100}\right)^x=3600,$$

或 $1.2^x=6$.

这是一个已知底数和幂，求指数 x 的问题．这类问题运用以前学过的计算方法，还不能解决．

又如，1970年4月25日，我国成功地发射了第一颗人造地球卫星，这是毛泽东思想的伟大胜利！卫星围绕地球运转一周所需的时间 T（叫做周期），由下面的公式计算：

$$T=2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}\left(1+\frac{h_1+h_2}{2R}\right)^{\frac{3}{2}},$$

其中，常数 $\pi=3.1416$，地球半径 $R=6371$ 公里，重力加速度 $g=9.8$ 米/秒^2，卫星距地面最近点 $h_1=439$ 公里，卫星距地面最远点 $h_2=2384$ 公里．

如果我们把这些数据代入公式，直接计算卫星的运转周期，那是相当麻烦的．

我们将看到，只要掌握对数的概念及其运算法则，这些问题就能比较简便地得到解决．

一、对数的概念

我们知道，在等式 $a^b=N$ 中，已知底数 a 和指数 b，求幂 N，这是上一节研究的指数问题．

反过来，在等式 $a^b=N$ 中，已知底数 a 和幂 N，求指数 b，这是本节要研究的对数问题．

下面我们先通过例子来介绍对数的概念．

在 $10^3=1000$ 中，我们把指数 3 叫做以10为底的1000的对数，记作 $3=log_{10}1000$．符号“log”读作“劳格”．

在 $2^4=16$ 中，把指数 4 叫做以 2 为底的16的对数，记作 $4=log_2 16$．

一般地，在 $a^b=N$（$a>0$，且 $a\neq 1$）中，我们把 b 叫做以 a 为底的 N 的对数，记作

$$b=log_a N.$$

其中 N 叫做真数．

根据对数的定义可知，当底数 $a>0$，且 $a\neq 1$ 时，指数式 $a^b=N$ 和对数式 $b=log_a N$ 是同一数量关系的两种不同的表示形式，它们既有区别又有联系，并且可以互相转化．

指数式与对数式的互换如下：

$$\boxed{a^b=N}\iff\boxed{b=log_a N}$$

例如：

$$10^2=100\iff 2=log_{10}100;$$

$$2^{-3}=\frac{1}{8}\iff -3=log_2\frac{1}{8};$$

$$4^{\frac{1}{2}}=2\iff\frac{1}{2}=log_4 2;$$

$$1.2^x=6\iff x=log_{1.2}6.$$

把指数式写成对数式，并不是一种无聊的游戏，如果没有对数式，就无法把指数式 $1.2^x=6$ 中的未知数 x 表达出来，也就无法计算 x 的值．正如恩格斯所说：**“而这种从一个**

形式到另一个相反的形式的转变，并不是一种无聊的游戏，它是数学科学的最有力的杠杆之一，如果没有它，今天就几乎无法去进行一个比较困难的计算".

从指数式和对数式的互换中，可以得到对数的三个性质：

1. $\because\ a^1=a$， $\therefore\ log_a a=1$，

即，当真数等于底数时，它的对数等于1；

2. $\because\ a^0=1$， $\therefore\ log_a 1=0$，

即，当真数等于1时，它的对数等于零；

3. 在$b=log_a N$中， $\because a>0$， $\therefore N=a^b>0$，

即，真数恒为正数（负数和零没有对数）.

例1 求下列各对数式中真数N的值：

(1) $log_{10}N=4$； (2) $log_{10}N=-4$；

(3) $log_8 N=\frac{1}{3}$.

解： (1) $N=10^4=10000$；

(2) $N=10^{-4}=0.0001$；

(3) $N=8^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=2$.

例2 求下列各对数的值：

(1) $log_2 16$； (2) $log_2 32$； (3) $log_2 64$.

解： (1) $\because 2^4=16$， $\therefore\ log_2 16=4$；

(2) $\because 2^5=32$， $\therefore\ log_2 32=5$；

(3) $\because 2^6=64$， $\therefore\ log_2 64=6$.

从例2可以得到 $log_a a^m=m$，

即，真数是底数的m次幂时，它的对数是幂指数m.

二、对数的运算法则

由于指数式和对数式是表示同一数量关系的两种不同的形式，因此，我们可以运用已知的指数式的运算法则来研究对数式的运算法则.

1.积的对数

两个正数之积的对数等于这两个因数的对数的和，即

$$log_a(N_1\cdot N_2)=log_a N_1+log_a N_2,(N_1>0,\ N_2>0)$$

证明： 设 $log_a N_1=x$，$log_a N_2=y$，

则 $a^x=N_1$，$a^y=N_2$，

$\therefore\ N_1\cdot N_2=a^x\cdot a^y=a^{x+y}$，

$\therefore\ log_a(N_1\cdot N_2)=x+y$，

$\therefore\ log_a(N_1\cdot N_2)=log_a N_1+log_a N_2$.

这个法则可以推广到多个正数之积的情况，即

$$log_a(N_1 \cdot N_2 \cdots\cdots N_n) = log_aN_1 + log_aN_2 + \cdots\cdots + log_aN_n.$$

2.商的对数

两个正数之商的对数等于被除数的对数减去除数的对数，即

$$log_a\frac{N_1}{N_2} = log_aN_1 - log_aN_2,\ (N_1 > 0,\ N_2 > 0)$$

其证明方法与积的对数类似，学员可自行证明.

3.幂的对数

一个正底数幂的对数等于幂的指数乘以该幂的底数的对数，即

$$log_aN^P = P \cdot log_aN,\ (N > 0)$$

证明：设 $log_aN = x$，则$a^x = N$，

$\therefore\ N^p = (a^x)^p = a^{px}$，

$\therefore\ log_aN^p = px$，

$\therefore\ log_aN^p = p \cdot log_aN$.

根据分数指数幂的意义有

$$\sqrt[n]{N} = N^{\frac{1}{n}},$$

$$\therefore\ log_a\sqrt[n]{N} = log_aN^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}log_aN,$$

即有

$$log_a\sqrt[n]{N} = \frac{1}{n}log_aN,\ (N > 0)$$

上述几个对数的运算法则，是运用对数简化复杂的数量计算的基础.

例 已知$log_{10}2 = 0.3010$，$log_{10}3 = 0.4771$.

求 (1) $log_{10}6$； (2) $log_{10}0.3$； (3) $log_{10}9$； (4) $log_{10}\sqrt[3]{4}$.

解：(1) $log_{10}6 = log_{10}(2 \times 3) = log_{10}2 + log_{10}3 = 0.3010 + 0.4771 = 0.7781$；

(2) $log_{10}0.3 = log_{10}\frac{3}{10} = log_{10}3 - log_{10}10 = 0.4771 - 1 = -0.5229$；

(3) $log_{10}9 = log_{10}3^2 = 2log_{10}3 = 2 \times 0.4771 = 0.9542$；

(4) $log_{10}\sqrt[3]{4} = log_{10}4^{\frac{1}{3}} = log_{10}2^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}log_{10}2 = \frac{2}{3} \times 0.3010 \approx 0.2007$.

三、常用对数

在三大革命实践中，经常使用常用对数.

以10为底的对数，即$log_{10}N$，叫做常用对数．$log_{10}N$通常简记为lgN．

下面我们介绍常用对数的计算法．

毛主席教导我们："**对于物质的每一种运动形式，必须注意它和其他各种运动形式的共同点。但是，尤其重要的，成为我们认识事物的基础的东西，则是必须注意它的特殊点**"．常用对数是对数的一种特殊形式，它除具有前面讲过的对数的一般性质外，还具有一些特殊的性质．

例如，

$\because$ $10^0=1$, $\therefore$ $lg1=0$;

$10^1=10$, $lg10=1$;

$10^2=100$, $lg100=2$;

$10^3=1000$, $lg1000=3$;

…………

$10^n=1\underbrace{00\cdots0}_{n\text{个零}}$ $\quad lg1\underbrace{00\cdots0}_{n\text{个零}}=n$.

$\because$ $10^{-1}=0.1$, $\therefore$ $lg0.1=-1$;

$10^{-2}=0.01$, $lg0.01=-2$;

$10^{-3}=0.001$, $lg0.001=-3$;

…………

$10^{-n}=\underbrace{0.00\cdots0}_{n\text{个零}}1$, $\quad lg\underbrace{0.00\cdots0}_{n\text{个零}}1=-n$.

由此可以看出：

（1）10的整数（正，负）次幂的对数是一个整数（正，负）．

（2）真数大的，它的对数也大．

现通过下面的例题引出常用对数的首数和尾数．

例1 通过查常用对数表得$lg6.877=0.8374$（查表的方法后面再作介绍），求$lg68.77$；$lg687.7$；$lg6877$；$lg0.6877$；$lg0.06877$；$lg0.006877$．

解： $lg68.77=lg(10\times6.877)=lg10+lg6.877=1+0.8374$;

$lg687.7=lg(100\times6.877)=lg100+lg6.877=2+0.8374$;

$lg6877=lg(1000\times6.877)=lg1000+lg6.877=3+0.8374$;

$lg0.6877=lg(0.1\times6.877)=lg0.1+lg6.877=-1+0.8374$;

$lg0.06877=lg(0.01\times6.877)=lg0.01+lg6.877=-2+0.8374$;

$lg0.006877=lg(0.001\times6.877)=lg0.001+lg6.877=-3+0.8374$.

例2 通过查常用对数表得$lg2.54=0.4048$，求$lg25.4$；$lg254$；$lg2540$；$lg0.254$；$lg0.0254$；$lg0.00254$．

解： $lg25.4=lg(10\times2.54)=lg10+lg2.54=1+0.4048$;

$lg254=lg(100\times2.54)=lg100+lg2.54=2+0.4048$;

$lg2540=lg(1000\times2.54)=lg1000+lg2.54=3+0.4048$;

$lg0.254=lg(0.1\times2.54)=lg0.1+lg2.54=-1+0.4048$;

$lg0.0254=lg(0.01\times2.54)=lg0.01+lg2.54=-2+0.4048$;

$lg0.00254 = lg(0.001 \times 2.54) = lg0.001 + lg2.54 = -3 + 0.4048.$

通过这两个例子，我们可以看出：真数的对数都可以写成一个整数（正整数、零或负整数）加上一个正的纯小数（或零）的形式．其整数部分叫做这个对数的"首数"．其正的纯小数部分（或零）叫做这个对数的"尾数"．而尾数只与真数的有效数字* 有关，与真数的小数点位置无关；首数只与真数的小数点位置有关，与真数的有效数字无关．

下面，我们分别介绍对数（首数、尾数）和真数的求法．

1.首数的求法

(1) 真数大于1（或等于1）时，其对数的首数是一个正整数或零，其值等于真数的整数部分的位数减1．

例如，由于687.7的整数部分的位数是三位，因此$lg687.7$的首数$=3-1=2$．

(2) 真数小于1时，其对数的首数是一个负整数，真数第一个不为零的数字前有几个零（包括整数个位的零），首数就是负几．

例如，0.006877的第一个不为零的数字前有3个零，所以$lg0.006877$的首数是-3．

当对数的首数是负数时，通常把负号写在首数的顶上，然后和尾数合写在一起．

例如，$lg0.6877 = -1 + 0.8374 = \bar{1}.8374;$

$lg0.06877 = -2 + 0.8374 = \bar{2}.8374;$

$lg0.006877 = -3 + 0.8374 = \bar{3}.8374.$

应该指出，$\bar{2}.8374$和-2.8374是不同的，

$$\bar{2}.8374 = -2 + 0.8374,$$

而

$$-2.8374 = -(2 + 0.8374) = -2 - 0.8374.$$

2.尾数的求法

真数的对数之尾数可以在《数学用表》中的对数尾数表（简称对数表）里找到．

对数表中，标有N的一直列和上、下两横行的数是表示真数的有效数字，其余的数是对数的尾数（但略去了小数点），最后一栏是修正值．

下面，我们通过例题说明对数表的查法．

例3　查表求出$lg25.4$的尾数．

解： 25.4的有效数字是254．先在对数表N所在的直列中找到25，再从N所在的横行中找到4，然后在直列与横行的交叉处找到4048，于是$lg25.4$的尾数就是0.4048．

例4　查表求出$lg3.5$的尾数．

解： 3.5的有效数字是35．先在对数表N所在的直列中找到35，再从N所在的横行中找到0，然后在直列与横行的交叉处找到5441，于是$lg3.5$的尾数是0.5441．

例5　查表求出$lg65.43$的尾数．

解： 65.43的有效数字是6543．先根据6543的前三位数654查对数表，找到数字8156，再根据它的第四位数3，在修正值栏内找到相应的数字2，然后把2加到8156的最后一个数字上，得到8158，于是$lg65.43$的尾数就是0.8158．

---

* 一个数的有效数字，粗略地说来，就是去掉这个数的小数点及其前面（即左边）和后面（即右边）所有的零，所剩下的那一段．例如，0.0237的有效数字就是237，953700的有效数字就是9537，0.208的有效数字就是208．

例 6 求下列各对数的值：

(1) $lg25.4$；(2) $lg3.5$；(3) $lg65.43$；(4) $lg0.06543$.

解：

(1) 因为25.4之整数部分的位数是 2，所以$lg25.4$的首数是 1；在例 3 中又已查得其尾数是0.4048；因此得

$$lg25.4=1.4048.$$

(2) 因为3.5之整数部分的位数是 1，所以$lg3.5$的首数是 0；在例 4 中又已查得尾数是0.5441；因此得

$$lg3.5=0.5441.$$

(3) 因为65.43之整数部分的位数是 2，所以$lg65.43$之首数是 1；在例 5 中又已查得其尾数是0.8158；因此得

$$lg65.43=1.8158.$$

(4) 因为0.06543的第一个不为零的数字前有 2 个零，所以$lg0.06543$的首数是 -2；又因$lg0.06543$的尾数与$lg65.43$的尾数相同；因此得

$$lg0.06543=\overline{2}.8158.$$

3. 真数的求法

已知对数，要求真数，就要查反对数表（或者叫做真数表）。

在反对数表中，标有m的直列和上、下两行表示对数的尾数，其余的是真数的有效数字，最后一栏是修正值.

因为对数的首数只与真数的小数点位置有关，而与真数的有效数字无关，因此，根据对数求真数时，可暂时不管首数，只根据尾数查反对数表，得到真数的有效数字；然后再根据首数来确定真数的小数点的位置.

例 7 求下列各对数式中的真数：

(1) $lgN=2.3328$； (2) $lgN=\overline{3}.4280$； (3) $lgN=-0.8341$.

解：

(1) 由于对数的尾数是0.3328，查反对数表，得真数N的有效数字2152；再根据对数的首数是 2，可知真数N的整数位数是 3；因而

$$N=215.2.$$

(2) 由于对数的尾数是0.4280，查反对数表，得真数N的有效数字2679；再根据对数的首数是 -3，可知真数的第一个不为零的数字前面有 3 个零(包括整数个位的零)；因而

$$N=0.002679.$$

(3) $\because\quad lgN=-0.8341=-0.8341+1-1=0.1659-1=\overline{1}.1659,$

$\therefore\quad N=0.1465.$

（对数为负数时，必须先把它化成负首数与正尾数之和的形式，再查表求真数.）

四、对数的应用举例

遵照毛主席关于"**抓着了世界的规律性的认识，必须把它再回到改造世界的实践中去**"的教导，下面我们运用对数及其运算法则，来解决本节开头所提出的问题.

例1　计算　56.2×0.00042.

解：设　$N=56.2\times0.00042$，两边取对数，有

$$lgN=lg(56.2\times0.00042)=lg56.2+lg0.00042.$$

$$\begin{array}{rl} & lg56.2=1.7497 \\ +) & lg0.00042=\bar{4}.6232 \\ \hline & lgN=\bar{2}.3729. \end{array}$$

（这里因为尾数相加出现整数1，这个整数加入首数运算，所以首数是$1+\bar{4}+1=\bar{2}$.）

再查反对数表，得

$$N=0.02360,$$

即　$$56.2\times0.00042=0.02360.$$

例2　计算　$0.1674\div4785$.

解：设　$N=0.1674\div4785$，两边取对数，得

$$lgN=lg(0.1674\div4785)=lg0.1674-lg4785.$$

$$\begin{array}{rl} & lg0.1674=\bar{1}.2238 \\ -) & lg4785=3.6799 \\ \hline & lgN=\bar{5}.5439. \end{array}$$

（这里因为被减数的尾数小于减数的尾数，必须从被减数的首数里借1，所以首数是$\bar{1}-1-3=\bar{5}$.）

再查反对数表，得　$N=0.00003498$，

即　$$0.1674\div4735=0.00003498.$$

例3　计算　$(0.2325)^6$.

解：设　$N=(0.2325)^6$，两边取对数，得

$$lgN=lg(0.2325)^6=6\times lg0.2325.$$

$$\begin{array}{rl} & lg0.2325=\bar{1}.3664 \\ \times) & 6 \\ \hline & lgN=\bar{4}.1984. \end{array}$$

再查反对数表，得

$$N=0.0001579,$$

即　$$(0.2325)^6=0.0001579.$$

例4　计算　$\sqrt[5]{0.1847}$.

解：设　$N=\sqrt[5]{0.1847}$，两边取对数，得

$$lgN=\frac{1}{5}lg0.1847.$$

$$lg0.1847=\bar{1}.2664=-5+4.2664^{*}$$

---

* 这里因为首数 -1 不能被5整除，所以把 -1 写成 $-5+4$，于是$\bar{1}.2664=-5+4+0.2664=-5+4.2664$，将 $-5+4.2664$除以5，就可以直接得出对数形式的答案$\bar{1}.8533$。

$$5\underline{-5+4.2664}$$
$$-1+0.8533,$$

$$\therefore\quad lgN=\bar{1}.8533.$$

再查反对数表，得

$$N=0.7134,$$

即 $$\sqrt[5]{0.1847}=0.7134.$$

例 5 计算 $\dfrac{(-5.16)^3}{2.78\times\sqrt{0.637}}$.

解：设 $$N=\frac{(-5.16)^3}{2.78\times\sqrt{0.637}}=-\frac{(5.16)^3}{2.78\times\sqrt{0.637}},$$

因为N是一个负数，而负数没有对数，所以先取$-N$的对数来进行计算。

$$\because\quad -N=\frac{(5.16)^3}{2.78\times\sqrt{0.637}},$$

$$\therefore\quad lg(-N)=3lg5.16-\left(lg2.78+\frac{1}{2}lg0.637\right)$$

$$=3\times0.7126-\left(0.4440+\frac{1}{2}\times\bar{1}.8041\right)$$

$$=2.1378-(0.4440+\bar{1}.9021)$$

$$=2.1378-0.3461$$

$$=1.7917,$$

再查反对数表，得

$$-N=61.90,$$

$$\therefore\quad N=-61.90,$$

即 $$\frac{(-5.16)^3}{2.78\times\sqrt{0.637}}=-61.90.$$

例 6 解方程 $1.2^x=6$（本节开头提出的第一个问题）。

解：两边取对数，得

$$xlg1.2=lg6,$$

$$\therefore\quad x=\frac{lg6}{lg1.2}=\frac{0.7782}{0.0792}\approx10\text{（年）}.$$

答：需要10年.

例 7 计算我国第一颗人造地球卫星的运转周期T.

$$T=2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}\left(1+\frac{h_1+h_2}{2R}\right)^{\frac{3}{2}},$$

其中地球半径$R=6371$公里，重力加速度$g=9.8$米/秒^2，近地点$h_1=439$公里，远地点$h_2=2384$公里.

解: $T=2\times3.1416\sqrt{\frac{6371}{9.8\times10^{-3}}}\left(1+\frac{439+2384}{2\times6371}\right)^{\frac{3}{2}}$

$=6.2832\left(\frac{6371\times10^3}{9.8}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{15565}{12742}\right)^{\frac{3}{2}}$

$\doteq6.283\left(\frac{6.371\times10^6}{9.8}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{1.557}{1.274}\right)^{\frac{3}{2}}.$

$\because\ lgT=lg6.283+\frac{1}{2}(lg6.371+lg10^6-lg9.8)+\frac{3}{2}(lg1.557-lg1.274)$

$=0.7982+\frac{1}{2}(0.8042+6-0.9912)+\frac{3}{2}(0.1923-0.1052)$

$=0.7982+2.9065+0.1307$

$=3.8354.$

$\therefore\ T\doteq6845$(秒)$\doteq114$(分).

答: 卫星运转的周期约为114分.

例8 我国工人创造的"群钻"比一般麻花钻优越，通过实验得到群钻在钻钢时的轴向力计算公式为:

$P=130.6V^{-0.44}D^{1.1}S^{0.57}$ (公斤);

一般麻花钻的轴向力计算公式为:

$p=68.7D^1S^{0.7}$ (公斤).

如果钻头直径$D=20$毫米，走刀量$S=0.32$毫米/转，切削速度$V=25$米/分，问群钻的轴向力比麻花钻的轴向力减少了百分之几?

解: 群钻在钻钢时的轴向力为:

$P=130.6\times25^{-0.44}\times20^{1.1}\times0.32^{0.57}.$

$\because lgP=lg130.6+(-0.44)lg25+1.1lg20+0.57lg0.32$

$=2.1158-0.44\times1.3979+1.1\times1.3010+0.57\times\overline{1}.5051$

$=2.1158-0.6151+1.4311+(-0.57)+0.2879$

$=3.8348-1.1851=2.6497,$

$\therefore\ P=446.4$ (公斤).

一般麻花钻在钻钢时的轴向力为:

$p=68.7\times20^1\times0.32^{0.7}.$

$\because\ lgp=lg68.7+lg20+0.7lg0.32$

$=1.8370+1.3010+0.7\times\overline{1}.5051$

$=3.1380+(-0.7)+0.3536$

$=3.4916-0.7=2.7916,$

$\therefore\ p=618.9$ (公斤).

则 $\frac{p-P}{p}=\frac{618.9-446.4}{618.9}=\frac{172.5}{618.9}=0.278=27.8\%.$

答: 群钻的轴向力比麻花钻的轴向力减少了27.8%.

五、自然对数

除常用对数外，在自然科学和工程技术中，经常遇到的是自然对数。

以无理数 e（$e=2.71828\cdots\cdots$）为底的对数，即$\log_e N$，叫做自然对数。通常$\log_e N$简记为$\ln N$。

为了介绍由$\lg N$求得$\ln N$的方法，我们先来证明"换底公式"：

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}$$

证：设　　$\log_a N = x$，则$a^x = N$，

两边取以 b 为底的对数，得

$$\log_b a^x = \log_b N,$$

$$x\log_b a = \log_b N,$$

$$\therefore \quad x = \frac{\log_b N}{\log_b a},$$

即

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}.$$

在换底公式中，取$a=e=2.71828\cdots\cdots$、$b=10$，就有

$$\ln N = \frac{\lg N}{\lg e},$$

$$\because \quad \lg e \doteq \lg 2.718 = 0.4343,$$

$$\therefore \frac{1}{\lg e} \doteq \frac{1}{0.4343} = 2.303.$$

代入上式，得常用对数与自然对数的换算公式：

$$\ln N = 2.303\lg N$$

例　求$\ln 4$与$\ln 10$的值。

解：$\ln 4 = 2.303\lg 4 = 2.303 \times 0.6021 = 1.387$;

$\ln 10 = 2.303\lg 10 = 2.303$.

习　　题

1. 把下列指数式化成对数式：

(1) $3^6 = 729$;　　(2) $2^{-1} = \frac{1}{2}$;　　(3) $10^{-2} = 0.01$;　　(4) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$;

(5) $16^{\frac{1}{2}} = 4$;　　(6) $10^x = 25$.

2. 把下列对数式化成指数式:

(1) $log_2 64=6$;　(2) $log_8 2=\frac{1}{3}$;　(3) $log_{10}0.001=-3$;

(4) $log_2\frac{1}{8}=-3$;　(5) $log_{81}\frac{1}{27}=-\frac{3}{4}$;　(6) $log_a N=y$.

3. 求下列各对数的值:

(1) $log_2 1$,　$log_3 1$,　$log_{10}1$,　$log_{\frac{1}{2}}1$;

(2) $log_2 2$,　$log_3 3$,　$log_{10}10$,　$log_e e(e=2.71828\cdots\cdots)$.

4. 求下列各对数式中真数N的值:

(1) $log_3 N=3$;　(2) $log_2 N=\frac{1}{2}$;　(3) $log_{10}N=2$;

(4) $log_2 N=0$;　(5) $log_3 N=1$;　(6) $log_{10}N=-1$.

5. 求下列各对数的值:

(1) $log_4 256$;　(2) $log_{10}0.00001$;　(3) $log_2 8$;

(4) $log_{\frac{1}{3}}9$;　(5) $log_{\frac{1}{2}}8$;　(6) $log_9 27$.

6. 已知$log_{10}5=0.6990$，$log_{10}3=0.4771$.

求　(1) $log_{10}15$;　(2) $log_{10}25$;　(3) $log_{10}\sqrt{5}$;

(4) $log_{10}750$;　(5) $log_{10}0.0015$.

7. 查表求下列各对数:

(1) $lg1.25$;　(2) $lg4.09$;　(3) $lg5436$;　(4) $lg24868$;

(5) $lg8017$;　(6) $lg0.5$;　(7) $lg0.025$;　(8) $lg0.00453$;

(9) $lg0.00007123$;　(10) $lg328100$.

8. 把下列负首数和正尾数之和改写成一个负数的形式:

(1) $\bar{2}.2538$;　(2) $\bar{1}.9378$;　(3) $\bar{3}.1001$;　(4) $\bar{4}.9176$.

9. 把下列各负数改写成负首数和正尾数之和的形式:

(1) -1.8394;　(2) -0.5763;　(3) -4.3001;　(4) -0.0840.

10. 查表求下列各对数式中的真数:

(1) $lgN=1.7482$;　(2) $lgN=0.6415$;　(3) $lgN=\bar{1}.6032$;

(4) $lgN=2.3524$;　(5) $lgN=3.2648$;　(6) $lgN=\bar{2}.8176$;

(7) $lgN=6.4930$;　(8) $lgN=\bar{5}.1015$;　(9) $lgN=\bar{2}.0125$;

(10) $lgN=0.5$;　(11) $lgN=0.98$;　(12) $lgN=-1.8394$.

11. 计算下列各式:

(1) $2.1742+\bar{1}.5736$;　(2) $\bar{3}.4832+\bar{1}.6758$;

(3) $1.4845+\bar{1}.1796$;　(4) $\bar{1}.3516-\bar{2}.6432$;

(5) 1.7423×2;　(6) $\bar{1}.6734\times 2$;

(7) $\bar{2}.4836\div 2$;　(8) $\bar{3}.7608\div 4$;

(9) $\bar{3}.0655\times\frac{2}{5}$.

12. 利用对数计算下列各式的值：

(1) 24.51×1.534;　　(2) $3.146\times0.037\times0.1302$;

(3) $34.13\div0.158$;　　(4) $(0.245)^4$;

(5) $\dfrac{1.76\times2.86}{43.6\times8.95}$;　　(6) $24.3\times(21.14)^4$;

(7) $\sqrt[3]{0.4568}$;　　(8) $(-2.51)^3\times\sqrt[5]{72}$.

13. 利用换底公式计算下列各自然对数的值：

(1) $ln100$;　　(2) $ln1105$;　　(3) $ln0.48$.

14. 恶霸地主牟二黑子，用高利贷剥削农民，按“月利三分”计算利息（就是借一元钱一个月的利息三分），利上滚利. 贫农张大爷借他10元钱，问三年中牟二黑子剥削了张大爷多少钱？

15. 某钢铁厂，1972年的钢产量比1971年的钢产量增加30%，并且以后每年的产量都比前一年增加30%，已知1971年的钢产量是100万吨，问大约几年时间这个钢厂的钢产量可以达到300万吨.

16. 已知地球半径 $R=6371$ 公里，重力加速度 $g=9.8$ 米/秒²，试计算第一宇宙速度 $V_1=\sqrt{gR}$ 和第二宇宙速度 $V_2=\sqrt{2gR}$.

17. 试计算我国在1971年3月3日发射的科学实验人造地球卫星的运转周期

$$T=2\pi\sqrt{\frac{R}{g}}\left(1+\frac{h_1+h_2}{2R}\right)^{\frac{3}{2}},$$

其中地球半径 $R=6371$ 公里，重力加速度 $g=9.8$ 米/秒²，近地点 $h_1=266$ 公里，远地点 $h_2=1826$ 公里.

18. 已知群钻在钻钢时扭矩的计算公式为 $M=70.9V^{-0.23}D^{1.94}S^{0.8}$（公斤·毫米），一般麻花钻扭矩的计算公式为 $m=34.5D^2S^{0.8}$（公斤·毫米），如果钻头直径 $D=20$ 毫米，走刀量 $S=0.32$ 毫米/转，切削速度 $V=25$ 米/分. 问群钻的扭矩比麻花钻的扭矩减少百分之几？

第三节　计算尺简介

对数计算尺（简称计算尺）是根据对数原理而制造的一种计算工具，它具有结构简单，携带方便，计算简捷等优点，在工程计算中常常使用它.

一、计算尺的构造和刻度原理

1. 计算尺的构造

计算尺种类很多，一般计算尺的构造如图4—1所示，它是由定尺、滑尺和游标三部分组成的.

（1）定尺：计算尺的固定部分，包括上尺和下尺；

（2）滑尺：在上下尺间能左

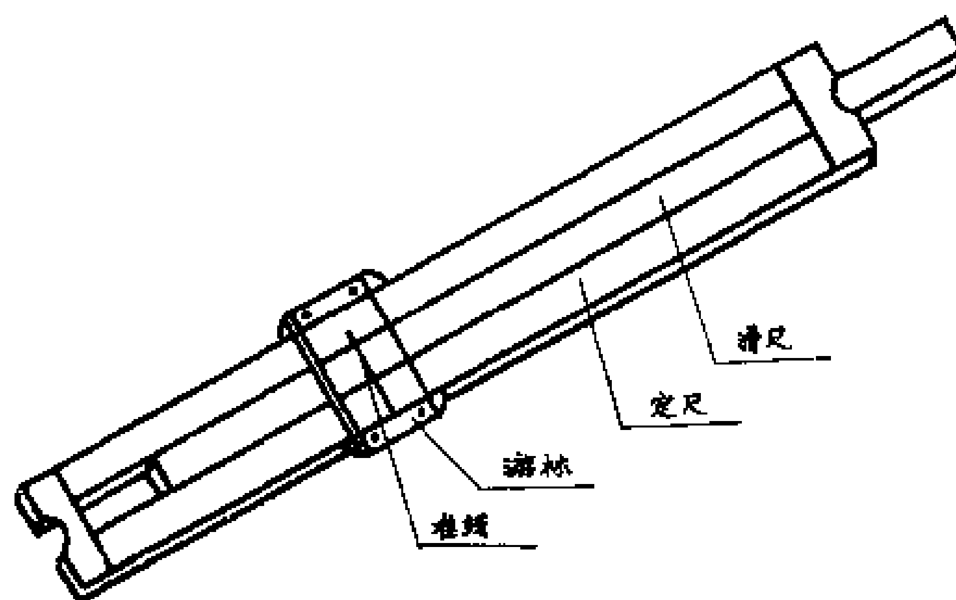


图4—1

右滑动的部分；

（3）游标：用透明材料制成，套在定尺上面，可以左右滑动，游标中间刻有一条红色细直线，叫做准线，用来读数或对齐数字．

在定尺和滑尺上都刻有许多尺度，一般计算尺都有以下几种常用尺度：C、D尺（基本尺，可用来作乘除、比例等运算）；A、B尺（平方尺，与C或D尺配合，可求一数的平方或平方根）；K尺（立方尺，与C或D尺配合，可求一数的立方或立方根）．此外，还有倒数尺、常用对数尺以及三角函数尺等．这里我们只介绍C、D尺的刻度原理和使用方法．

2．C、D尺的刻度原理

一般C尺刻在滑尺上，D尺刻在定尺上，它们的刻度完全相同，因此，只要介绍C尺的刻度原理就可以了．

在C尺中，从左端线的刻度1到右端线的刻度10之间的距离为1个长度单位．以左端线为准，在与它的距离为lgn（$1 \leqslant n \leqslant 10$）的点刻上$n$．这样，刻度2，3，4，…，9与左端线的距离如下表所示：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
lgn	0	0.301	0.477	0.602	0.699	0.778	0.845	0.903	0.954	1

在尺面上的刻度如图4－2所示．这样的刻度1，2，3，4…9，10叫做一级刻度．在每相邻的两个一级刻度之间，例如1与2之间，再刻上二级刻度1，2，3，…，9分别表示1.1，1.2，1.3，…，1.9，它们与左端线的距离分别为$lg1.1$，$lg1.2$，$lg1.3$，…$lg1.9$．同样，在每相邻的两个二级刻度之间再刻出三级刻度．这样，如果要在C尺上读出数6.25，可先找到一级刻度6；在一级刻度6和7之间找到二级刻度2；再在二级刻度2和3之间找到三级刻度5（如无三级刻度可用目测），此刻度线就表示数6.25．

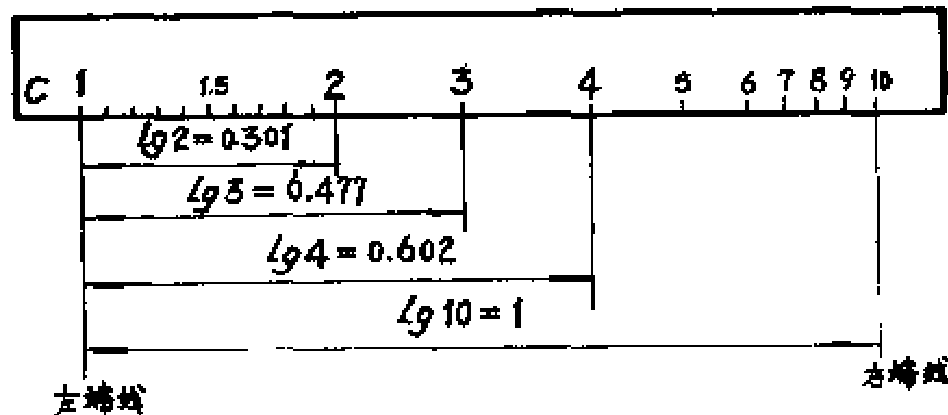


图4－2

超过10或小于1的数如何在C尺上读得呢？

在对数里我们知道：有效数字相同而只有小数点位置不同的数，它们的对数的尾数是相同的，不同的只是首数．例如10～100的对数：

n	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
lgn	1	1.301	1.477	1.602	1.699	1.778	1.845	1.903	1.954	2

由上表与前面1～10的对数表对照，可以看出，从1到2，3，…的距离，与从10到20，30，…的距离是相同的，即它们在C尺上的刻度相同．因此，C尺上虽然只刻了1～10，但

在应用上，可读作10～100，100～1000，…或0.1～1，0.01～0.1，….也就是说，有效数字相同而只有小数点位置不同的数，可在C、D尺上同一刻度处读得.例如在刻度6.25处，可读作62.5，625，0.625，…，所以应用C、D尺计算时，读得尺上的读数后，必需进行定位，才能得到所求的答数.

二、利用C、D尺作乘除运算

1.利用C、D尺进行乘法运算

我们先来看，利用两条相同均匀刻度的直尺M和N，可以进行加减运算．例如求$2+3$，运算如图4—3所示．

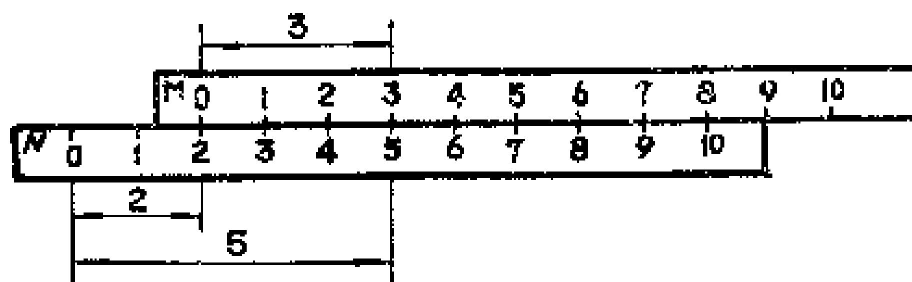


图4—3

我们知道，根据对数运算法则，可以把乘、除运算，转化为加、减运算.因为C、D尺是根据对数原理刻度的完全相同的两条尺，所以利用C、D尺就可以进行乘、除运算.

计算　$x=a\times b$.

两边取对数，得

$$lgx=lg(ab)=lga+lgb.$$

上式说明，为求积$a\times b$，只要用C、D尺作对数加法就可以了．如图4—4所示。

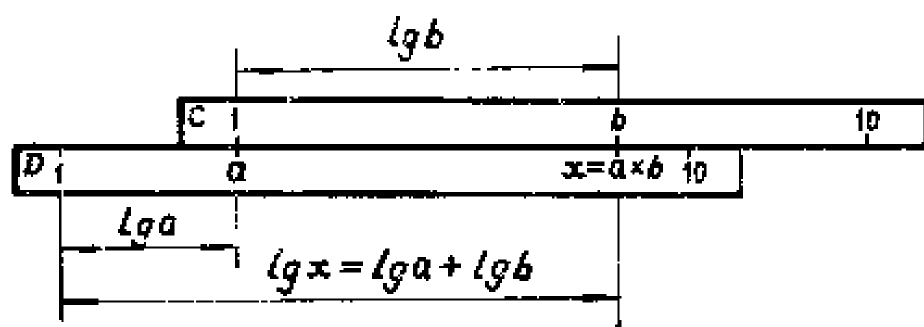


图4—4

用C、D尺计算$a\times b$的步骤如下：

（1）移动游标，使准线对准D尺上的a;

（2）抽动滑尺，使准线对准C尺上的左端线1；

（3）再移动游标，使准线对准C尺上的b；

那末，在准线下所对D尺的刻度就是所求积的读数。

这个运算过程可简单表示如下：

C	1	b
D	a	[a×b]

再用估算法定位，就得答数.

例1　计算　2×4.

解:（1）移动游标，使准线对准D尺上的2；

（2）抽动滑尺，使准线对准C尺的左端线1；

（3）再移动游标，使准线对准C尺上的4；

那末，在准线下所对D尺上的刻度8，就是所求的积，即

$$2\times4=8.$$

例2　计算　3×4.

解: 如果照例1那样，移动游标，使准线对准D尺上的3，抽动滑尺，使准线对准C尺上的左端线1，那末，当准线对准C尺上的4时，准线已落在D尺外面了。因此，不

能在D尺上读到答数.

但前面我们知道：有效数字相同，而只有小数点位置不同的数，可在C、D尺上同一刻度处读得. 因此，C尺右端线10和左端线1是可以通用的. 我们按照下面的步骤进行：

（1）移动游标，使准线对准D尺上的3；

（2）抽动滑尺，使准线对准C尺上的右端线10；

（3）再移动游标，使准线对准C尺上的4；

那末，在准线下所对D尺上的刻度1.2就是所求积的读数（图4—5）.经定位得

$$3\times4=12.$$

图4—5

由图看出：

$$\begin{aligned}lg1.2&=lg\frac{12}{10}=lg(3\times4)-lg10\\&=lg3+lg4-1=lg3-(1-lg4).\end{aligned}$$

例3 计算 56.2×0.00042.

解：（1）求积的读数.运算过程如下：

C	4.2	10
D	[2.36]	5.62

（2）用估算法定位：

∵ 56.2×0.00042≈56×0.0004=0.0224,

∴ 56.2×0.00042=0.0236.

例4 计算 1800×666.7×0.017.

解：（1）求积的读数：先计算1800×666.7=a（a是中间结果可不必读出）.运算过程如下：

C	6.667	10
D	[a]	1.8

再计算a×0.017（不动游标，抽动滑尺）.运算过程如下：

C	1	1.7
D	a	[2.04]

（2）定位：

$\because\ 1800\times666.7\times0.017\doteq1800\times700\times0.02$

$=25200,$

$\therefore\ 1800\times666.7\times0.017=20400.$

2.利用C、D尺进行除法运算

计算　$x=a\div b$.

两边取对数，得

$lgx=lg(a\div b)=lga-lgb.$

上式说明，为求商$a\div b$，只要用C、D尺作对数减法就可以了.如图4—6所示.

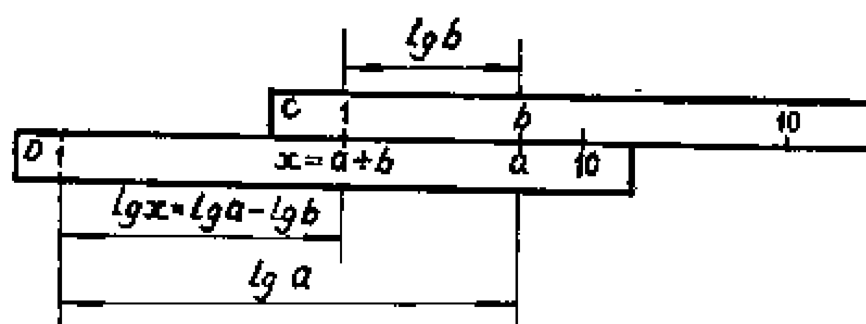


图4—6

用C、D尺计算$a\div b$的步骤如下：

（1）移动游标，使准线对准D尺上的a；

（2）抽动滑尺，使准线对准C尺上的b；

（3）再移动游标，使准线对准C尺上的1（或10）；

那末，在准线下所对D尺的刻度就是所求商的读数.这个运算过程可简单表示如下：

C	1（或10）	b
D	〔$a\div b$〕	a

再用估算法定位，就得答数.

例5　计算　$0.1674\div4785$.

解：（1）求商的读数.运算过程如下：

C	4.785	10
D	1.674	〔3.5〕

（2）定位：

$\because\ 0.1674\div4785\doteq1.7\times10^{-1}\div0.48\times10^{4}$

$\doteq3.5\times10^{-5},$

$\therefore\ 0.1674\div4785\doteq0.000035.$

例6　计算　$724\div13600\div0.06$.

解：连续除法与连续乘法一样，不需要读出中间结果.

（1）先计算$724\div13600$，运算过程如下：

C	1	1.36
D	〔a〕	7.24

再计算 $a\div0.06$（不动游标，抽动滑尺），运算过程如下：

C	6	10
D	a	〔8.9〕

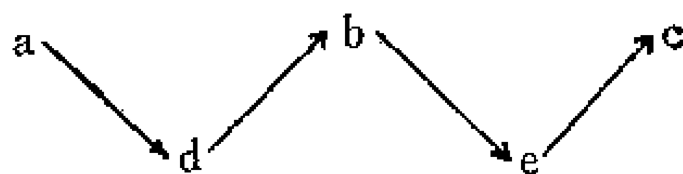
（2）定位：

∵ $724\div13600\div0.06\doteq700\div14000\div0.1=0.5$，

∴ $724\div13600\div0.06=0.89$.

3.利用C、D尺进行乘除混合运算

利用 C、D 尺作乘除混合运算 $\frac{a\cdot b\cdot c}{d\cdot e}$，一般可先除后乘，一除一乘交叉进行，即



这样，常常可以减少抽动滑尺的次数，收到计算迅速、结果较准确的效果。

例 7 计算 $\frac{3.8\times6.9\times75}{8.4\times3.2}$.

解： （1）求结果的读数：

① 求$3.8\div8.4=a$. 运算过程如下：

C	8.4	10
D	3.8	〔a〕

② 求$a\times6.9=b$. 运算过程如下：

C	6.9	10
D	〔b〕	a

③ 求$b\div3.2=c$.运算过程如下：

C	3.2	10
D	b	〔c〕

④ 最后，求 $c\times75$，运算过程如下：

C	7.5	10
D	〔7.32〕	c

（2）定位：

$\because \quad \dfrac{3.8\times6.9\times75}{8.4\times3.2}\doteq\dfrac{4\times7\times80}{8\times3}=\dfrac{280}{3}\doteq90,$

$\therefore \quad \dfrac{3.8\times6.9\times75}{8.4\times3.2}=73.2.$

习　　题

用C、D尺计算下列各题：

(1) 1.934×5.37;　　(2) 3.07×5.72;

(3) $1.85\times6.2\times4.75$;　　(4) $3.12\div83.5$;

(5) $0.0287\div0.001369$;　　(6) $2.84\div65.2\times5.19$;

(7) $\dfrac{293\times14}{1.01\times8}$;　　(8) $\dfrac{28.7\times5.35}{4.3\times2.9\times8.05}$.

复　习　题

1. 已知a、b都不等于0，问下列各题中的两个代数式是否恒等，并说明理由：

(1) $a^n\cdot a^n$与$(a^n)^n$;　　(2) $(a\cdot b)^n$与$a^n\cdot b^n$;

(3) $(a+b)^3$与a^3+b^3;　　(4) a^0与b^0;

(5) a^n与a^{-n};　　(6) $a^{\frac{1}{n}}$与$\dfrac{1}{a^n}$;

(7) $\dfrac{a^m}{a^n}$与$\sqrt[n]{a^m}$.

2. 计算下列各式：

(1) $(3a^{-2}b^2c^{-3})(0.8ab^{-2}c^4)$;　　(2) $(x^{-1}y^3z^2)\div(5x^2y^{-2}z^3)$;

(3) $(2ax^{-3})^{-2}$;　　(4) $(x^{-2}-y^{-1})^2$;

(5) $(a^{-2}+b^{-3})(a^{-2}-b^{-3})$;　　(6) $(2a^{-1}-1)(2a^{-1}+1)$;

(7) $\left[\left(\dfrac{3a^3b^{-2}c^{-3}}{2x^2y}\right)^2\right]^{-3}$;　　(8) $2a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}\cdot5a^{\frac{1}{3}}x^{-\frac{1}{2}}$;

(9) $\left(20a^{-2}b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{2}{3}}\right)\div4a^{-3}b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{3}{4}}$;　　(10) $\sqrt[12]{x^3}\div x^{\frac{1}{4}}$;

(11) $\sqrt[3]{3a^2b}\div4ab^3$;　　(12) $\left(2a+\dfrac{1}{2}b^{\frac{1}{2}}\right)^2$;

(13) $\left(x^{-\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{3}}-x^{\frac{1}{2}}\right)^2$;　　(14) $\left(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}-c^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}+c^{\frac{1}{2}}\right)$.

3. 利用对数计算下列各式：

(1) $\dfrac{0.7361\times0.03715}{2.165\times0.8717}$;　　(2) $(0.03714)^5$;

(3) $\sqrt[5]{0.3571}$;　　(4) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{85\times77}}$;

(5) $\sqrt{\frac{7}{3}\sqrt[4]{6}}$;　　(6) $2.718^{-5.142}$;

(7) $(-0.3654\times 27.5)^3$;　　(8) $\frac{(0.365)^5}{\sqrt[5]{-0.7498}}$.

4.半径为R的球体体积$V=\frac{4}{3}\pi R^3$（其中$\pi\doteq 3.142$），如果$R=18.75$厘米，试求体积V.

5.圆柱体的体积　$V=\pi R^2 H$,其中$\pi=3.142$,R是圆柱体的底半径,H是圆柱体的高.试求直径为2毫米，长是1000米的铜丝的重量（已知铜的比重是8.55克/厘米^3）.

6.一万二千吨水压机，它的主工作缸中段是一种内、外直径分别为848毫米、1370毫米，高为2383毫米的空心圆钢柱，在浇铸前需要先计算它的重量，已知钢的比重是7.8克/厘米^3，问需用多少钢水来浇铸.

7.灯泡厂每生产一批灯泡，都要进行质量检查，在测试灯泡的燃点时数时，是用升高电压的方法进行的.在实验中，工人师傅总结出升高电压和燃点时数的变化关系是：

$$\left(\frac{t}{t_0}\right)^{11}=\left(\frac{U_0}{U}\right)^{1.40}，即\ t=t_0\sqrt[11]{\left(\frac{U_0}{U}\right)^{1.40}},$$

其中U_0是额定电压，t_0是在U_0下燃点时数，U是实验电压，t是在U下燃点时数.如果$U_0=220$伏，标准燃点时数$t_0=1000$小时，问当实验电压U为306伏时，燃点时数t是多少小时?

8.在涡轮的弯曲强度计算中，涡轮模数公式是：

$$Ms=\sqrt[3]{\frac{0.64M^2K}{y_K[6]\varphi_{ms}z_2}}\ （单位是毫米）.$$

已知$K=1$,$M=1010$,$y_K=0.118$,$[6]=420$,$\varphi_{ms}=7$,$z_2=55$,求Ms.

第五章　简单函数及其图象

客观事物都是在不断地运动和变化着的，为了反映事物的运动和变化，数学上引进变量的概念．正如恩格斯所指出的：**“有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学”**。

在这一章里，我们将建立变量和反映变量之间相互联系的函数概念，并讨论一些简单函数及其图象．

第一节　变量和函数

一、常量和变量

毛主席指出：**“无论什么事物的运动都采取两种状态，相对地静止的状态和显著地变动的状态。”**在观察各种自然现象和生产过程时，常会遇到两种状态的量：一种量是相对不变的，即在某个过程中，只取一个固定的数值，这种量叫做常量；另一种量是不断变化的，即在某个过程中可取不同的数值，这种量叫做变量．

例如，汽车以每小时30公里的速度行驶，行驶的路程随着行驶时间的增加而增加．所以在这个过程中，时间t和路程S都是变量，而速度$V=30$公里/小时却是常量．

又如，重物在地面附近自由下落，在到达地面之前，它的速度越落越快，随着下落时间的增加而增加，下落路程也越来越大．所以在这个过程中，时间t，路程S和速度V都是变量，而重力加速度$g=9.8$米/秒^{2}却是常量．

必须注意，一个量是常量还是变量，并不是绝对的，应根据问题的不同要求，具体地进行分析．例如，气温变化会引起机器上轴的长度的变化．在实际工作中，当气温变化而引起轴长微小变化时，通常把轴长看作常量；而在较精密的机器上，即使轴的长度变化很微小，也会影响机器的精度，这时就应将轴长看成变量，以估计它对精度的影响．一般说来，如果一个变量在所讨论的过程中变化很小，而且对于实际需要来说可以看作不变，就把这个变量看作常量．

在数学中，常量一般用字母a、b、c等表示，变量一般用x、y、t等表示，而x_0、y_0、t_0常用来分别表示变量x、y、t取的某个特定值．

二、函数概念

毛主席指出：**“一切客观事物本来是互相联系的和具有内部规律的”**．反映客观事物的各种变量也不是孤立变化的，而是互相联系的．因此，我们不仅要研究事物的数量变化，而且更重要的是研究各个变量之间的相互依赖关系及其内部规律．数学中的函数关系就是反映变量之间一种最基本的、最重要的依赖关系．

例1　我国“东风号”万吨级远洋货轮，以每小时17浬的速度航行，那么航行的路程S（浬）和时间t（小时）之间有下面的关系：

$S=17t$.

当 $t=1$（小时）时，　　$S=17\times1=17$（浬）；

$t=2$（小时）时，　　$S=17\times2=34$（浬）；

$t=10$（小时）时，　　$S=17\times10=170$（浬）；

……………………

可见，对于不同的时间，就有不同的路程和它对应，关系式$S=17t$反映了货轮航行的路程S随时间t的变化而变化的规律.

例 2　圆的面积A和半径 r 可以用下面公式来计算：

$$A=\pi r^2.$$

当r变化时，圆的面积也随着变化，对于不同的半径，就有不同的面积和它对应．关系式$A=\pi r^2$反映了圆的面积A随半径r的变化而变化的规律.

例 3　导线电阻R的大小和温度T有关，实验测得数据如下表：

T(°C)	19.1	25.0	30.1	36.0	40.0	45.1	50.0
R(欧姆)	76.30	77.80	79.75	80.80	82.35	83.90	85.10

这个表格反映了电阻R随温度T的变化而变化规律．根据这个规律，对于表中所列的每一个确定的温度T，都可找到与它相应的电阻R.

毛主席教导我们：“**人们总是首先认识了许多不同事物的特殊的本质，然后才有可能更进一步地进行概括工作，认识诸种事物的共同的本质。**”从上面三个例子中可以看出，路程和时间，圆面积和半径，电阻和温度虽然描述着不同的客观现象，但却有某些共同的特征，这就是：在每一个问题中都有两个变量，这两个变量不是孤立地在变化，而是互相联系的并具有一定规律的．确切地说，对于一个变量在其变化范围内每取一个确定的值时，另一个变量总有一个确定的值和它对应.

通过以上分析，我们概括出函数的一般定义.

定义　在某个变化过程中有两个相互联系着的变量x和y．如果对于变量x在其变化范围内每取一个确定的值时，变量y按照一定的规律总有确定的值和它对应，那么称变量y是变量x的函数．其中变量x叫做自变量，变量y叫做因变量.

如例 1 中路程S是时间t的函数；例 2 中圆面积A是半径r的函数；例 3 中电阻R是温度T的函数.

函数的定义包含着三个内容：一是自变量的变化范围，叫做函数的定义域；二是因变量与自变量之间的依赖关系，叫做函数关系；三是定义域内自变量所取的每个值，因变量的对应值，叫做函数值．下面分别地加以说明.

1.函数的定义域

例 1 中，如果货轮航行开始的时间是 t_1，结束的时间是 t_2，那么 t 的变化范围是 $t_1\leqslant t\leqslant t_2$．即定义域是$t_1\leqslant t\leqslant t_2$.

例 2 中，半径r的变化范围是$r>0$，即定义域是$r>0$.

可见，函数的定义域是根据函数的实际意义来确定的．但是，如果我们讨论的函数

仅仅是写出它的数学算式，而不考虑它的实际意义，那末这个函数的定义域就是指使数学算式有意义时，自变量的取值范围.

例 4 求下列函数的定义域：

(1) $y=\frac{1}{x}$；　(2) $y=\sqrt{1-x^2}$；　(3) $y=lg(x+1)$.

解：(1) 函数 $y=\frac{1}{x}$，只有当$x\neq 0$，y才有确定的对应值.所以，函数的定义域是x不等于零的所有实数，即$x\neq 0$，也可以用不等式$-\infty<x<0$和$0<x<+\infty$来表示（这里符号“$-\infty$”和“$+\infty$”分别读作“负无限大”和“正无限大”，它们不是数，仅是记号）.

(2) 函数 $y=\sqrt{1-x^2}$，只有当根号内的式子$1-x^2\geqslant 0$时，y才有确定的对应值. 所以，函数的定义域是满足不等式$1-x^2\geqslant 0$或$x^2\leqslant 1$的所有x值，也可以用$-1\leqslant x\leqslant 1$来表示.

(3) 函数$y=lg(x+1)$，根据对数的定义可知，只有当$x+1>0$时，y才有确定的对应值. 所以，函数的定义域是满足不等式$x+1>0$或$x>-1$的所有x值.也可以用$-1<x<+\infty$来表示.

为了简便起见，通常我们可用区间来表示函数的定义域.

如果变量x的变化范围是$a\leqslant x\leqslant b$，我们说x的变化范围是闭区间$[a, b]$；

如果变量x的变化范围是$a<x<b$，我们说x的变化范围是开区间(a, b).

闭区间和开区间的区别是：闭区间包括区间的两个端点，而开区间不包括两个端点.下面再介绍下半开半闭区间和无限区间：

如果x的变化范围是$a<x\leqslant b$，就说x的变化范围是半开半闭区间$(a, b]$；

如果x的变化范围是$-\infty<x<b$，就说x的变化范围是无限区间$(-\infty, b)$；

如果x的变化范围是$a\leqslant x<+\infty$，就说x的变化范围是无限区间$[a, +\infty)$；

如果x可取任何实数，即$-\infty<x<+\infty$，就说x的变化范围是无限区间$(-\infty, +\infty)$；

区间$[a, b]$，(a, b)，$(a, b]$，$(-\infty, b)$，$[a, +\infty)$等还可以在实数轴上用线段表示出来. 实心端点表示区间包括该点在内，空心端点表示区间不包括该点，如图5—1所示. 区间$(-\infty, +\infty)$表示整个实数轴.

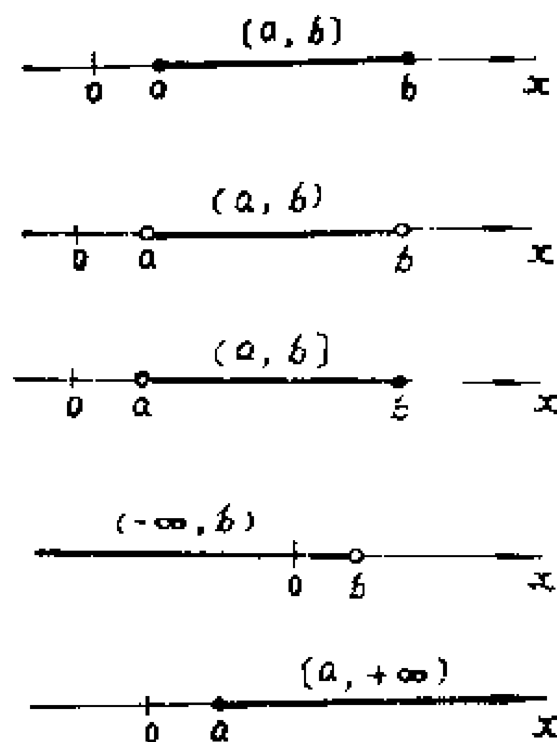


图 5—1

采用区间的表示法，例 4 中函数的定义域分别为：

(1) 无限区间$(-\infty, 0)$和$(0, +\infty)$；

(2) 闭区间$[-1, 1]$；

(3) 无限区间$(-1, +\infty)$.

2.函数关系的表示法

因变量和自变量之间的依赖关系(即函数关系)是函数概念的最本质的要素．函数关系的表示方法通常有下面三种：

(1) 公式法

把两个变量之间的函数关系用数学算式来表示，这种表示方法叫做公式法．如前面讲过的：$S=17t$、$A=\pi r^2$就是用公式法表示的．又如：$y=\frac{1}{x}$，$y=lg(x+1)$都是用公式法表示两个变量之间的函数关系的．

(2) 列表法

用表格表示两个变量之间的函数关系的方法叫做列表法．如在前面讲述的例 3 中，电阻是温度的函数就是用列表法表示的．我们经常用到的《平方表》、《立方表》等数学用表也是采用了列表法．

(3) 图象法

用图象来表示两个变量之间的函数关系的方法叫做图象法．这个方法我们将在下一节里介绍．

变量y是变量x的函数，数学中常用记号

$$y=f(x)$$

来表示．如在例 1 中，路程S是时间 t 的函数，可写成$S=f(t)$，其中，$f(t)=17t$；在例 2 中圆面积A是半径r的函做，可写成$A=f(r)$，其中 $f(r)=\pi r^2$；在例 3 中，电阻R是温度T的函数，可写成$R=f(T)$。

必须指出，记号 $f(x)$是一个不可分割的整体，它表示变量y与变量 x 之间的对应关系，切不可误解为f乘x．

为了方便起见，有时把变量y是变量x的函数，记为$y=y(x)$。

3．函数值

在函数$y=f(x)$里，如果当$x=x_0$时，y的对应值是y_0，就记为：

$$y_0=f(x_0)\text{或}y_0=y|_{x=x_0}.$$

例 5　设$f(x)=3x^2+2x-1$，求$f(1)$，$f(0)$，$f(-4)$，$f(-\frac{1}{2})$，$f(a)$。

解：
$$f(1)=3\times1^2+2\times1-1=4;$$
$$f(0)=3\times0^2+2\times0-1=-1;$$
$$f(-4)=3\times(-4)^2+2\times(-4)-1=39;$$
$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=3\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2+2\times\left(-\frac{1}{2}\right)-1=-\frac{5}{4};$$
$$f(a)=3a^2+2a-1.$$

习　　题

1．分别指出下列各题中，哪个量是变量？哪个量是常量？哪个量是自变量？哪个量是自变量的函数？

(1) 已知钢的比重为7.8克/厘米^3；则钢的重量M和体积V之间的关系式：$M=7.8V$.

(2) 重物在地面附近自由下落时，下落的路程S和下落的时间 t 之间的关系式：

$S=\frac{1}{2}gt^2$，其中$g=9.8$米/秒²。

2.写出下列各题的函数表达式：

(1) 正方形边长为a，写出面积A的表达式；

(2) 半径为r的圆，写出圆周长C的表达式；

(3) 在一电路中，已知电流强度为0.2安培（库仑/秒），写出通过导线截面的电量Q（库仑）与时间t（秒）的函数关系。

3.求下列函数的定义域：

(1) $y=\frac{1}{x-1}$；　(2) $y=\frac{1}{x^2-1}$；　(3) $y=x^{\frac{1}{2}}$；

(4) $y=\sqrt{x+2}$；　(5) $y=lg(4-x^2)$。

4.求下列各函数的值：

(1) 已知$f(x)=\frac{2}{3}x-1$，求$f(3),f(0),f(-1)$；

(2) 已知$f(x)=2x^2-x-6$，求$f(-2)$，$f(-1)$，$f(0),f(1)$，$f\left(\frac{1}{2}\right)$；

(3) 已知$f(x)=\frac{2}{x}$，求$f(-1),f(1),f(4),f(a)$；

(4) 已知$f(t)=\frac{2t+1}{t-2}$，求$f(-4)$，$f(0)$，$f(\sqrt{2})$，$f(a+1)$。

5.加工直径300毫米的圆钢，试建立切削速度V与转速n之间的函数关系，并求出当转速分别为315转/分，658转/分，850转/分时，车床每分钟切削多少米？

第二节　函数的图象

一、平面直角坐标系

我们知道，数轴上任意一个点的位置，都可以用一个实数来确定．那么，平面上点的位置怎样来确定呢？

我们先看下面的例子：

在矩形平面板上钻孔，要求孔的中心离左缘3厘米，离下缘2厘米，根据这两个数，就能够准确地确定孔眼的位置（图5—2）．又如去电影院看电影，我们可以根据电影票上的几排几座找到座位．

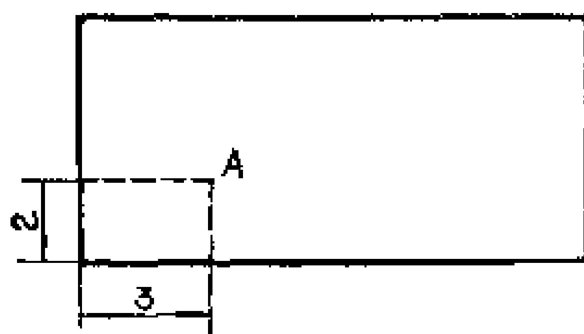


图5—2

由此可知，用两个数就可以确定平面上一个点的位置．人们根据这种用一对数可以确定平面上点的位置的道理，创造了直角坐标系．

在平面上作两条互相垂直*且有公共原点O的数轴，其中水平轴叫做横坐标轴（或x轴），通常以向右的方向为正方向；垂直轴叫做纵坐标轴（或y轴），通常以向上的方向

* 两条直线垂直和平行的基本理论在后面第六章将详细讲述。

为正方向；公共原点O叫做坐标原点．这样有公共原点的两条互相垂直的坐标轴就构成了平面直角坐标系（图5—3）．

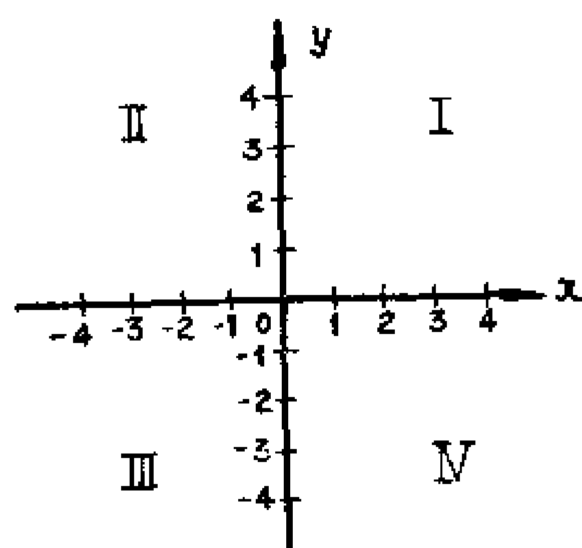


图5—3

直角坐标系所在的平面叫做坐标平面．x轴和y轴把坐标平面分成如图5—3所示的Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ四部分，分别叫做第一象限、第二象限、第三象限、第四象限．

有了平面直角坐标系，我们可以把平面上任意一点的位置用一对有次序的数来确定．例如在图5—4中的点M，过点M作y轴的平行线*，与x轴相交于点P；过点M作x轴的平行线，与y轴相交于点Q．P和Q在x轴和y轴所表示的数分别是4和3．很明显，点M的位置就用这一对有次序的数（4，3）来确定．必须注意，4和3的次序不可颠倒，中间用逗号分开．

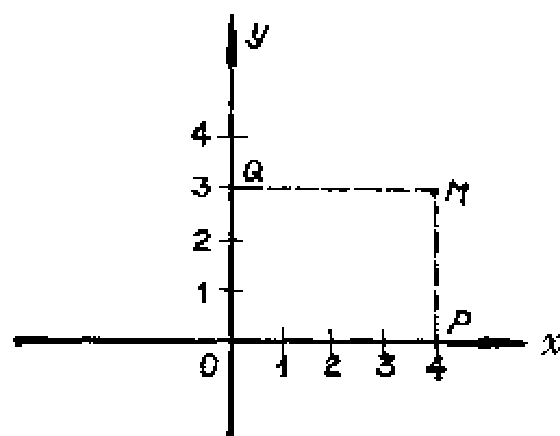


图5—4

反过来，一对有次序的数（4，3），也可以在平面上确定唯一的一个点和它对应．过x轴上表示4的点P作平行于y轴的直线，过y轴上表示3的点Q作平行于x轴的直线，这两条直线相交于点M（图5—4），点M就是由这对有次序的数（4，3）所确定的．

一般地说，在平面直角坐标系中，平面上的每一个点M确定一对有次序的数(x,y)；反过来，每一对有次序的数(x,y)，在平面上也可确定一个点M，这样，我们就建立了平面上的点M和一对有次序的数(x,y)之间的一一对应关系：

$$M \rightleftharpoons (x,y).$$

(x,y)叫做点M的坐标．这里x叫做点M的横坐标，y叫做点M的纵坐标．坐标为(x,y)的点M通常记为$M(x,y)$．

原点O的坐标是$(0,0)$，x轴上点的坐标是$(x,0)$，y轴上点的坐标是$(0,y)$．很明显，在不同象限内的点，它们的坐标有正有负：在第一象限内的点，横坐标是正数，纵坐标也是正数；在第二象限内的点，横坐标是负数，纵坐标是正数；在第三象限内的点，横坐标是负数，纵坐标也是负数；在第四象限内的点，横坐标是正数，纵坐标是负数．

坐标的概念在生产上有直接的应用．例如坐标镗床，它的纵横两根导轨上有精密的刻度（相当于两坐标轴），要加工的孔的位置用坐标画出，这样，工件可以达到很高的精度．

例1 写出图5—5中，A、B、C、D、E、F、G、H各点的坐标．

解： $A(2,0)$；

$B(0,3)$；

$C(-5,0)$；

* 两条直线垂直和平行的基本理论在后面第六章将详细讲述．

$D(0, -4)$;

$E(2.5, 3)$;

$F(-3, 4)$;

$G(-4, -2)$;

$H(5, -3.5)$.

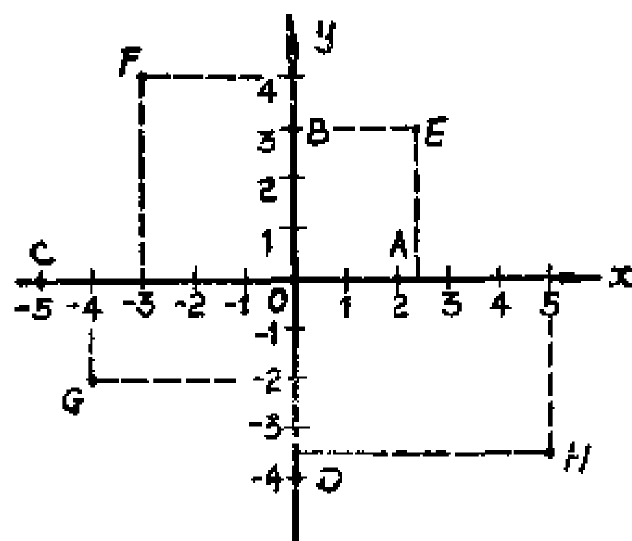


图 5—5

例 2 在直角坐标系中作出下列各点：

$A(3, 2)$、$B(-3, 2)$、$C(-3, -2)$、$D(3, -2)$.

解： 过x轴上表示 3 的点作平行于y轴的直线，过y轴上表示 2 的点作平行于x轴的直线，这两条直线的交点就是所求的 A 点．用同样的方法可以找出B、C、D各点（图 5—6）．

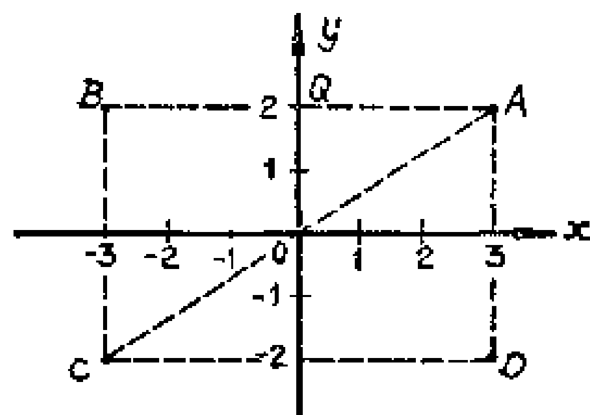


图 5—6

从图 5—6 中可以看出，A与B两点的连线垂直于y轴，且AQ和BQ的长一样，我们把点 B 叫做点A关于 y 轴的对称点（也可以把点 A 叫做点B关于y轴的对称点），y 轴叫做对称轴．同样，点D与点C关于y轴对称；点A与点D关于 x 轴对称；点B与点C关于x轴对称．

同时还可以看出，A与C两点的连线经过原点O，且OA和OC 的长一样，我们把这样的两点A与C叫做关于原点O的对称点、原点 O 叫做对称中心．同样，点B与点D也关于原点O对称．

设平面上任意一点M的坐标为x与y，容易知道，点(x, y)与点 $(-x, y)$ 关于y轴对称；点(x, y)与点$(x, -y)$关于x轴对称；而点(x, y)与点$(-x, -y)$关于原点对称．

二、函数的图象

利用平面直角坐标系所建立起来的点与一对数之间的对应关系，我们可以画出表示函数关系的图象．

把自变量x的值和函数y的对应值分别作为点的横坐标和纵坐标，在坐标平面上作出相对应的点，所有这些点所组成的图形叫做函数$y = f(x)$的图象．

例 1 作出函数 $y = \sqrt{x}$ 的图象．

解：（1）建立直角坐标系xoy．

（2）列表．在函数 $y = \sqrt{x}$ 的定义域$[0, +\infty)$内，取自变量的一些值，算出对应的函数值，作下列的数值表：

x	0	1	2	3	4	5	…
$y = \sqrt{x}$	0	1	1.41	1.73	2	2.24	…

（3）描点作图．由表里每一组数作为对应点的坐标，在坐标平面上描出这些

点，再用一条光滑的曲线把它们依次连接起来，就得到 $y=\sqrt{x}$ 的图象（图5—7）．

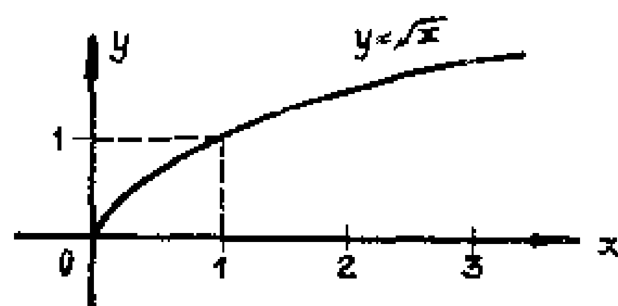


图5—7

例2　为了掌握某水库的蓄水量，及时做好防洪灌溉和发电等工作，需要找出水库的水深 h 和蓄水量 Q 之间的关系．水库工作人员通过测量得到下列数据：

h（米）	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Q（万米^3）	0	50	110	200	300	440	670	900	1220	1570

根据表里的对应值，就可以做出表示水深与蓄水量之间的函数关系的图象（图5—8）．

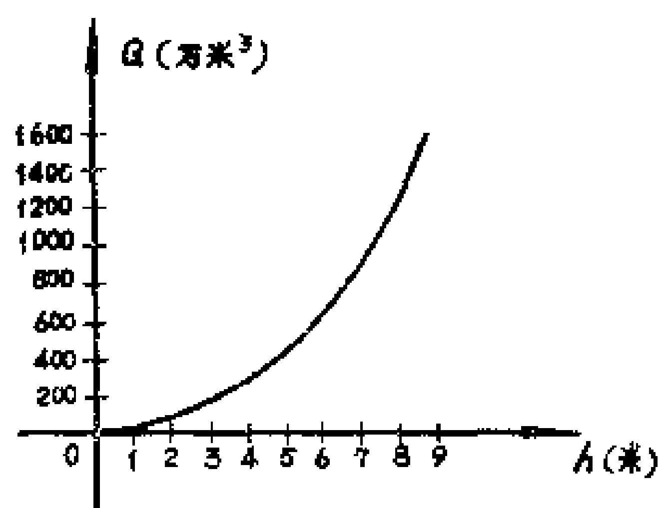


图5—8

显然，用这种方法作出的函数的图象一般只是近似的．要使作出的图象更精确，需要作出更多的点．

这种作图象的方法叫做描点法．

上面我们作出了用公式法和列表法表示的函数的图象．一般说来，函数的图象是平面直角坐标系中的一条曲线．

在生产实践和科学实验中，还经常用图象（一条曲线）来表示两个变量之间的函数关系．例如图5—9就是某气象站用气温自动记录仪描下某天的温度变化曲线．从图象上可以清楚地看出温度随时间变化而变化的规律．凌晨4点温度最低2（°C），14点（下午2时）温度最高12（°C）．

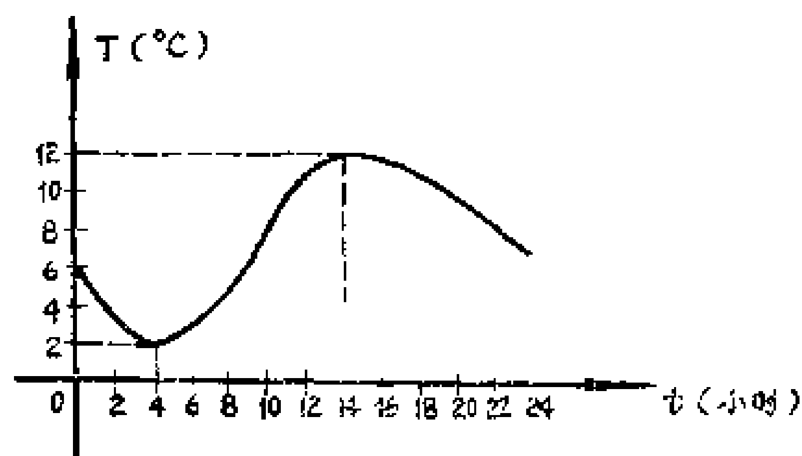


图5—9

习　　题

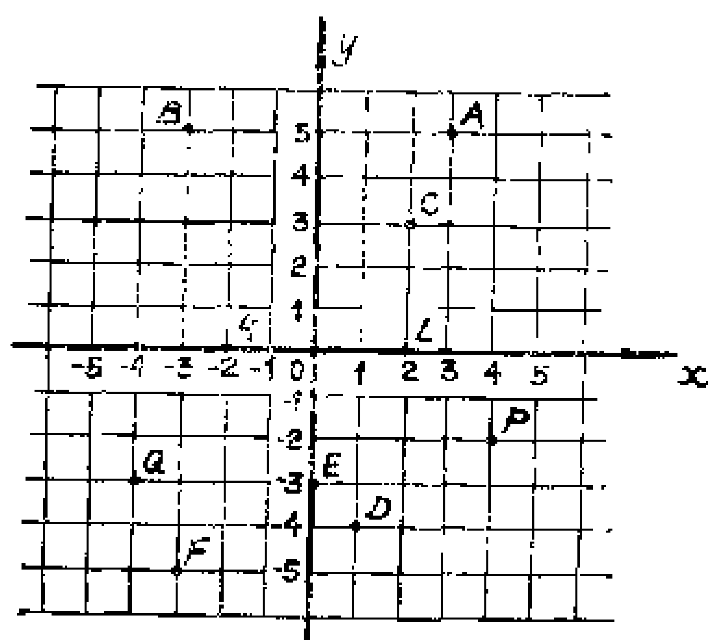
1．写出图中 A、B、C、D、E、F、K、L、P、Q 各点的坐标．

2．在坐标系中，作出下列各点：

$A(2,\ 4)$；$B(2.5,\ -5)$；$C(-5, 2.5)$；$D(-2,\ -3)$；$E(5,\ 0)$；$F(0,\ 2)$；$G(0,\ -3)$；$H(-1,\ 0)$；$K\left(0,\ -1\frac{1}{3}\right)$；$L(-4,\ 0)$．

3．以下各类点的坐标有什么特点？

（1）x轴上的点；（2）y轴上的点．



（第1题）

4.设M点的坐标是（5，4），作出下列各点并说出它们的坐标和所在的象限：

(1) M点关于x轴的对称点M_1；

(2) M点关于y轴的对称点M_2；

(3) M点关于原点的对称点M_3。

5.用描点法画出下列函数的图象：

(1) $y=x+1$；　　(2) $y=-x$；

(3) $y=-\sqrt{x}$；　　(4) $y=-x^2$。

6.在载重量一定的情况下，某种汽车的耗油量，由于速度的改变而有所不同．经过试验，用各种不同的速度行驶，取得相对应的耗油量，记录如下：

V(公里/小时)	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
Q(公斤/小时)	2.5	2.1	1.9	1.7	1.5	1.3	1.2	1.5	2.2	3

作出耗油量Q和速度V的函数关系的图象．

第三节　幂　函　数

在实际问题中，经常会遇到这样一类函数，它们是由幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数等五种函数构成的．这五种函数叫做基本初等函数．

本节介绍幂函数的概念、图象和性质．下一节介绍指数函数、对数函数的概念、图象和性质．在第三篇平面三角里，我们将介绍三角函数、反三角函数的概念、图象和性质．

用自变量x的常数次幂表示的函数

$$y=x^n(n\text{是常数})$$

叫做幂函数．

当$n=1$，-1，2时的幂函数是最常见的幂函数．下面我们分别讨论常数与这些常见幂函数乘积的函数的图象和性质．

一、正比函数

在第一节的例题1中，路程S和时间t之间的函数关系是$S=17t$．由这个关系式可得路程S和时间t之间的数值对应关系：

t(小时)	1	2	3	4	……
S(浬)	17	2×17	3×17	4×17	……

容易看出，它们之间的变化规律是：当t增大（或减少）时，S也随着增大（或减少）；并且当t扩大（或减少）几倍，S也跟着扩大（或缩小）同样的倍数．我们把路程S和时间t的这种关系，叫做正比关系．显然，S和t的任意一组对应数值之比恒为一常数17，即$S:t=\frac{S}{t}=17$，其中17叫做比例系数．

一般地，我们把形如

$$y=kx\ (k\neq 0)$$

的函数叫做正比函数．常数k叫做比例系数．

下面讨论正比函数的图象和性质．

例1　作出函数 $y=x$ 的图象．

解：（1）作出直角坐标系xoy．

（2）列表．在函数$y=x$的定义域（$-\infty$，$+\infty$）内，作下列数值表：

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$y=x$	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…

（3）描点作图，得到函数 $y=x$ 的图象（图5－10）．

从图5—10看出，函数 $y=x$ 的图象是通过坐标原点O（0，0）的一条直线．这条直线对称于坐标原点O．

一般地，正比函数 $y=kx$ 的图象是通过原点 $O(0,\ 0)$ 的一条直线．

我们知道，两点决定一条直线，所以作正比函数的图象时，除原点外，再找另一个点，把它和原点连接起来即可．

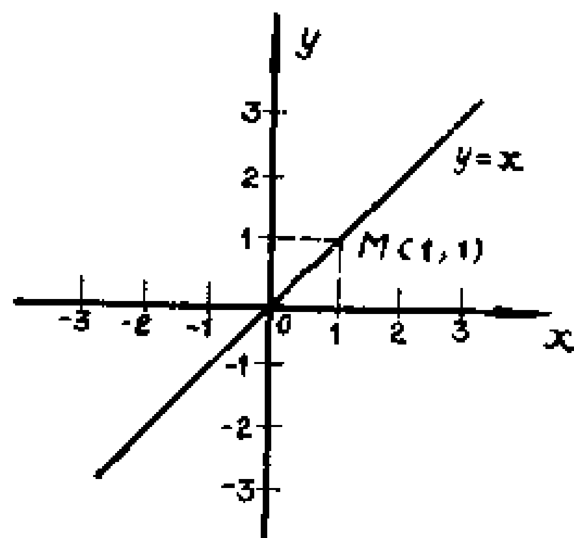


图5—10

例2　在同一坐标系中分别作出下列各函数的图象．

（1）$y=2x$；　　　　（2）$y=-\dfrac{1}{2}x$．

解：取自变量 x 的值为 0 和 2，分别算出对应的函数值，列表如下：

x	0	2
$y=2x$	0	4
$y=-\dfrac{1}{2}x$	0	-1

用表里各组对应值作为点的坐标，在同一坐标系中分别作出这二个函数的图象，（图5—11）．

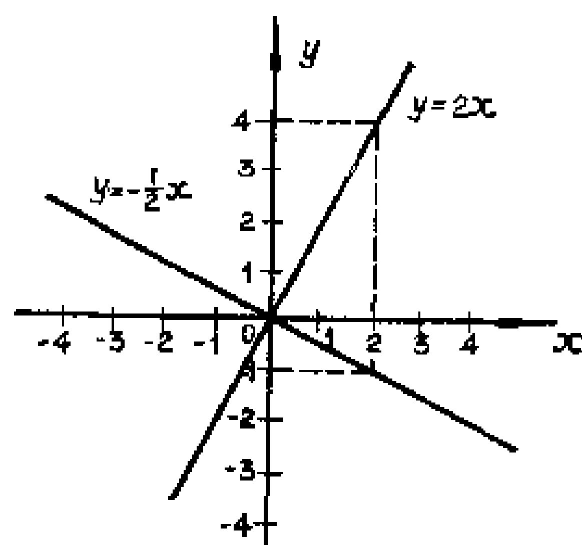


图5—11

例3　一弹簧受外力作用后，就要改变其长度，由物理学知，在弹性限度内，弹簧的伸长与外力的大小成正比．已知当弹簧受力4公斤时，伸长2毫米，试求外力大小与弹簧伸长之间的函数关系．

解：设F表示外力的大小，l表示弹簧伸长的长度．

由题意知：

$$F=kl.$$

因为当$F=4$公斤时，$l=2$毫米，代入上式得

$$k=\frac{F}{l}=\frac{4}{2}=2.$$

于是，它们之间的函数关系为

$$F=2l.$$

二、反比函数

在匀速直线运动中，路程S和时间t成正比，即

$$S=Vt,$$

这个式子或写成

$$t=\frac{S}{V}.$$

由上式可知，当路程S为一定时，速度V愈大，所用时间t愈短；并且当速度V扩大（或缩小）几倍时，所用的时间t反而缩小（或扩大）同样的倍数。我们把时间t和速度V的这种关系，叫做反比关系。

一般地，我们把形如

$$y=\frac{k}{x}\quad 或y=kx^{-1}(k\neq 0)$$

的函数叫做反比函数。常数k叫做比例系数。

下面讨论反比函数的图象和性质。先讨论$k>0$的情况。

例 4 作出函数$y=\frac{1}{x}$的图象。

解：（1）作直角坐标系xoy。

（2）列表。在函数$y=\frac{1}{x}$的定义域$(-\infty,\ 0)$和$(0,\ +\infty)$内，作下列数值表：

x	…	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	…		…	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	…
$y=\frac{1}{x}$	…	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	…		…	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	…

（3）描点作图。得到函数$y=\frac{1}{x}$的图象（图 5—12），这条曲线叫做双曲线。

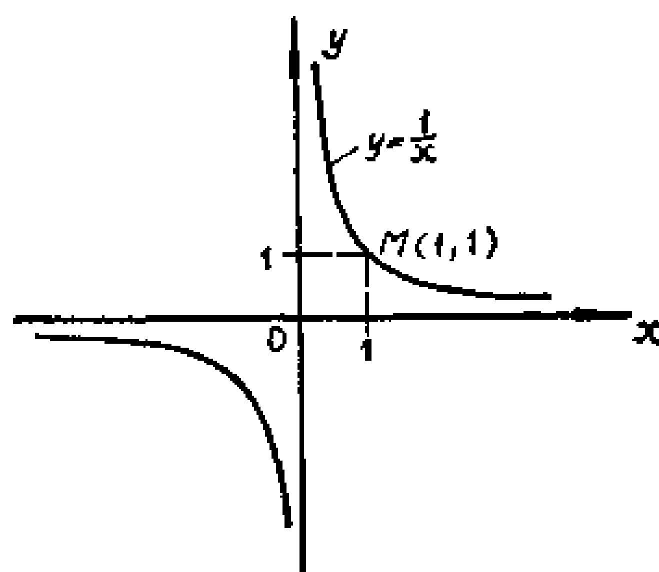


图 5—12

从图 5—12看出，函数$y=\frac{1}{x}$的图象具有下面的性质：

1.图象有两支，一支在第一象限内，另一支在第三象限内；

2.图象对称于坐标原点O。

至于当$k<0$时，例如 $y=-\frac{1}{x}$的图象，

让学员们自行讨论.

一般地，反比函数$y=\frac{k}{x}$的图象叫做双曲线.



图5—13

例5 如图5—13所示的电路中，U表示电压，R表示电阻，I表示电流.已知$I=0.5$安培时，$R=440$欧姆，试求该电路中电流与电阻的函数关系.

解：由欧姆定律知

$$I=\frac{U}{R}.$$

∵ 当$I=0.5$安培时，$R=440$欧姆，

∴ $U=IR=0.5\times440=220$(伏特).

∴ $I=\frac{220}{R}$.

三、二次幂函数

除上面讲过的两种幂函数外，我们还经常遇到另一种幂函数.

例如，正方形的面积y与它的边长x之间的函数关系为

$$y=x^2.$$

又如，物体自由下落时，下落的距离S与下落时间t之间的函数关系为

$$S=\frac{1}{2}gt^2.$$

一般地，我们把形如

$$y=ax^2(a\neq0)$$

的函数叫做二次幂函数.

下面讨论函数$y=ax^2$的图象和性质

例6 作出函数$y=x^2$的图象.

解：(1) 作直角坐标系xoy.

(2) 列表.在函数$y=x^2$的定义域$(-\infty,+\infty)$内，作下列数值表：

x	…	-2	$-1\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$1\frac{1}{2}$	2	…
$y=x^2$	…	4	$2\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$2\frac{1}{4}$	4	…

(3) 描点作图，得到函数$y=x^2$的图象(图5—14)，这条曲线叫做抛物线.

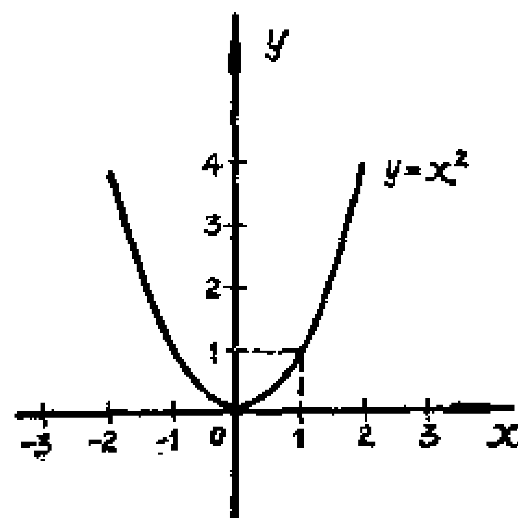


图5—14

从图5—14看出，函数$y=x^2$的图象，它具有下面的性质：

1.因为当x取任何实数时，$y=x^2\geqslant0$，所以图象在x轴的上方.

2.图形对称于y轴，y轴叫做抛物线的对称轴.抛物线和它的对称轴的交点叫做抛物线的顶点.显然抛物线

$y=x^2$的顶点就是坐标原点.

一般地，函数$y=ax^2(a\neq 0)$的图象叫做抛物线.

例 7 在同一直角坐标系中，作出下列函数的图象：

(1) $y=2x^2$； (2) $y=\frac{1}{2}x^2$； (3) $y=-\frac{1}{2}x^2$.

解：列表：

x	…	$-1\frac{1}{2}$	-1	0	1	$1\frac{1}{2}$	…
$y=2x^2$	…	$4\frac{1}{2}$	2	0	2	$4\frac{1}{2}$	…
$y=\frac{1}{2}x^2$	…	$1\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$1\frac{1}{8}$	…
$y=-\frac{1}{2}x^2$	…	$-1\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-1\frac{1}{8}$	…

描点作图，得到它们的图象（图 5 —15）.

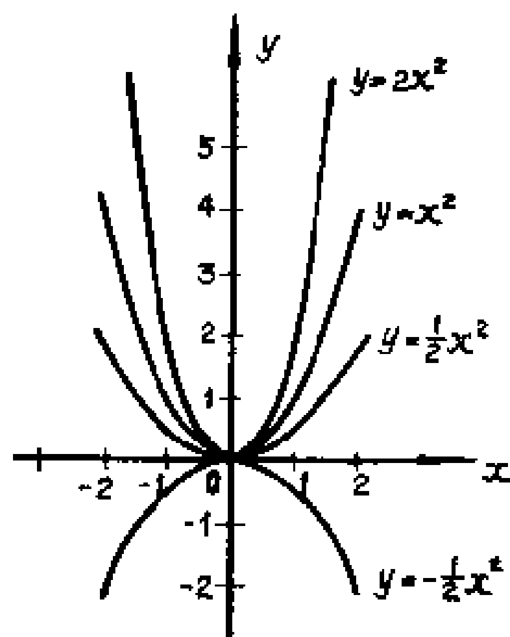


图 5 —15

从图 5 —15看出，抛物线$y=ax^2$具有下面性质：

1. 抛物线的顶点在坐标原点，对称轴是y轴；

2. 当$a>0$时，抛物线在x轴上方，开口向上.

当$a<0$时，抛物线在x轴下方，开口向下.

3. $|a|$越大，抛物线的开口越小，$|a|$越小，抛物线的开口越大.

下面讨论函数$y=x^3$的图象和性质.

例 8 作出函数$y=x^3$的图象.

解：(1) 作直角坐标系xoy.

(2) 列表.在函数$y=x^3$的定义域$(-\infty,+\infty)$内，作出下列数值表：

x	…	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	…
$y=x^3$	…	-8	-1	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	1	8	…

(3) 描点作图，得到函数$y=x^3$的图象（图 5 —16），这条曲线叫做立方抛物线.

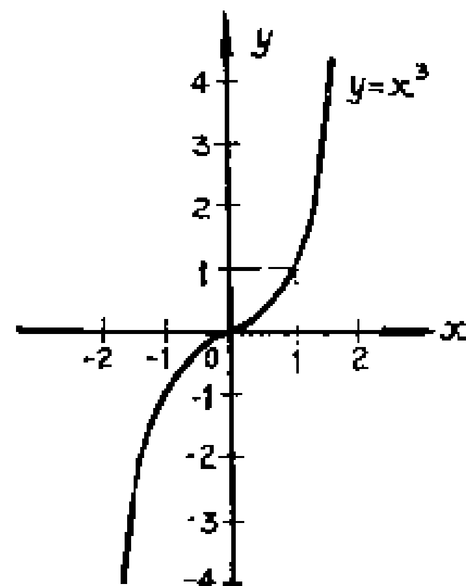


图 5 —16

从图 5 —16看出，函数$y=x^3$的图象对称于坐标原点.

由函数$y=x$，$y=x^2$，$y=x^3$的图象可知：幂函数$y=x^n$，当n为奇数时，图象对称于原点，这种函数叫做奇函数；当n为偶数时，图象对称于y轴，这种函数叫做偶函数.

一般地，设函数$y=f(x)$，如果对于任何实数a，有$f(-a)=-f(a)$，即图象对称于原点（图 5 —17），

那末函数$y=f(x)$叫做奇函数；如果对于任何实数a，有$f(-a)=f(a)$，即图象对称于y轴（图5—18），那末函数$y=f(x)$叫做偶函数.

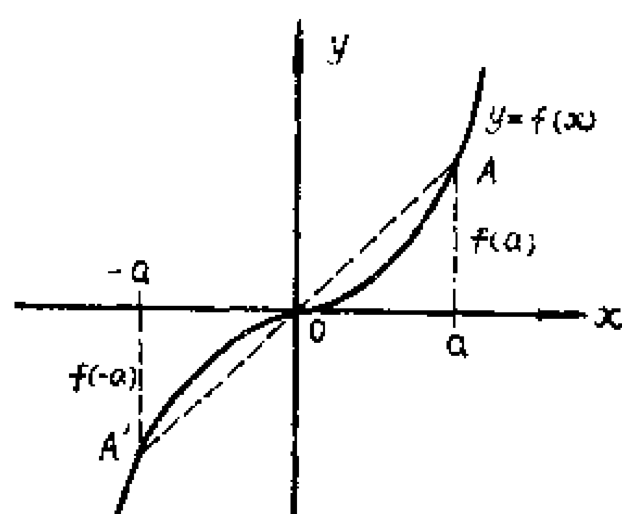


图5—17

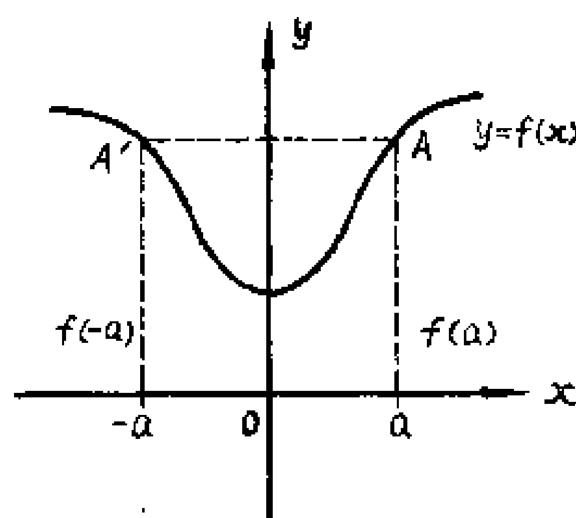


图5—18

习　题

1. 在下列关系中，指出哪些是正比关系，哪些是反比关系.

（1）正方形的周长l和它的一边长a；

（2）水池的容量V一定时，每小时平均灌入的水量Q和灌满水池所需的时间t；

（3）比重δ一定时，物体的重量P和体积V；

（4）重量P一定时，物体的比重δ和体积V.

2. 在同一坐标系中，画出下列各函数的图象:

（1）$y=\frac{1}{4}x$，$y=4x$；

（2）$y=-\frac{1}{4}x$，$y=-4x$.

3. 在同一坐标系中，画出下列各函数的图象:

（1）$y=\frac{4}{x}$，$y=-\frac{4}{x}$；

（2）$xy=9$，$xy=-9$.

4. 已知直线$y=kx$过点$\left(1，\frac{1}{3}\right)$，试求该直线的方程，并作出其图象.

5. 已知5厘米^{3}的物体重68克，试求物体的重量P和体积V之间的函数关系.

6. 已知物体运动的速度V与阻力F成正比，若当阻力为20公斤时，速度为5米/秒，试求速度与阻力之间的函数关系.

7. 当温度不变时，一定质量的气体的压强p与气体的体积V成反比，并且当体积为8升时，测得压强为0.5气压，试求压强p与体积V之间的函数关系.

8. 作出下列幂函数的图象，并根据图象说明它们的性质:

（1）$y=x^4$；

（2）$y=x^{-2}$；

（3）$y=x^{-3}$.

第四节　指数函数和对数函数

一、指数函数

形如 $y=a^x$（$a>0$，$a\neq1$）的函数，叫做以 a 为底的指数函数.

在自然科学与工程技术中，常用到以 e（$=2.71828\cdots$）和 $\frac{1}{e}$ 为底的指数函数 $y=e^x$、$y=\left(\frac{1}{e}\right)^x=e^{-x}$.

例如，设放射性物质在开始时的原子个数为 N_0，实验告诉我们，在 t 时刻之后，其原子个数衰变为 $N=N_0e^{-\lambda t}$，其中 λ 为一正常数，叫做衰变常数．由 $N=N_0e^{-\lambda t}$ 所表达的这个规律，叫做放射性物质的衰变规律.

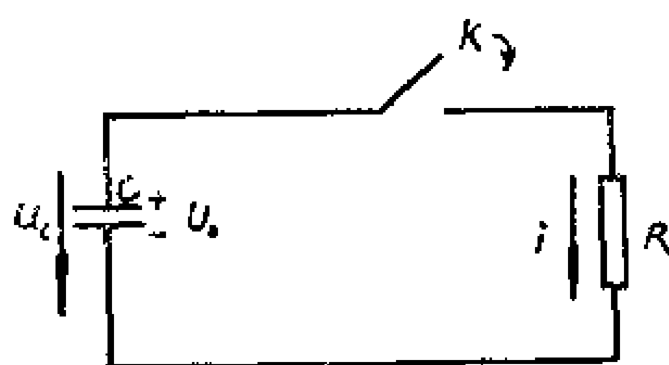


图 5—19

又如，当电容器充电至电压 U_0 后，经过电阻 R 放电，由电工学可知，在这一放电过程中，电容器两端的电压 u_c 随时间 t 变化而变化的规律为 $u_c=U_0e^{-\frac{t}{kc}}$，其中 C 为电容器的容量，单位是法拉（或微法拉、微微法拉）.

下面，我们讨论 $y=e^x$、$y=e^{-x}$ 的图象和性质。

例　作出函数 $y=e^x$，$y=e^{-x}$ 的图象。

解：(1) 列表：

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…
$y=e^x$	…	0.05	0.13	0.37	1	2.7	7.4	20	…
$y=e^{-x}$	…	20	7.4	2.7	1	0.37	0.13	0.05	…

(2) 描点作图，便得 $y=e^x$ 和 $y=e^{-x}$ 的图形（图 5—20）.

由上述表格和图 5—20可以看出，这两条曲线具有下列的性质：

1.因为 x 取任一实数，都有 $e^x>0$、$e^{-x}>0$，所以这两条曲线都在 x 轴的上方.

2.因为当 $x=0$ 时，$e^x=1$、$e^{-x}=1$，所以这两条曲线都通过（0，1）点，而且它们对称于 y 轴.

3.曲线 $y=e^x$ 随 x 的增大而上升，且当 x 的值越小时，曲线越靠近 x 轴；

曲线 $y=e^{-x}$ 随 x 的增大而下降，且当 x 的值越大时，曲线越靠近 x 轴.

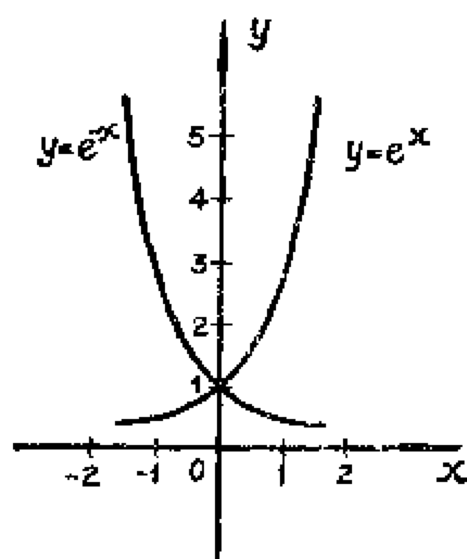


图 5—20

由于函数 $y=e^x$ 随 x 的增大而增大，我们称函数 $y=e^x$ 在定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内是增函数；而函数 $y=e^{-x}$ 随 x 的增大而减小，我们称函数 $y=e^{-x}$ 在定义域 $(-\infty, +\infty)$ 内是减函数．

一般地，如果函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内，随 x 的增大而增大，即对于 (a, b) 内任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有

$$f(x_1)<f(x_2),$$

那末称函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内是增函数；如果函数 $y=f(x)$ 在区间 (a, b) 内，随 x 的增大而减小，即对于 (a, b) 内任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有

$$f(x_1)>f(x_2),$$

那末称函数 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内是减函数．

增函数的图象是沿横轴正向上升的（图5—21），而减函数的图象则是沿横轴正向下降的（图5—22）．

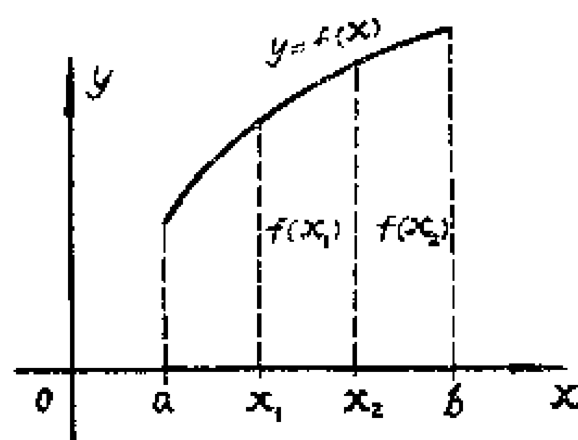


图5—21

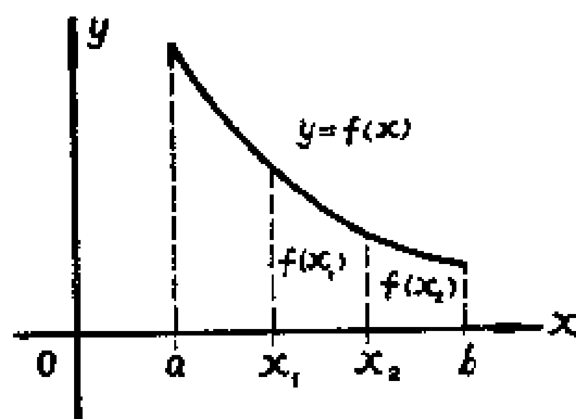


图5—22

二、对数函数

形如 $y=log_ax$ $(a>0, a\neq 1)$ 的函数，叫做以 a 为底的对数函数．因为负数和零没有对数，所以对数函数的定义域是 $(0, +\infty)$．

当取底数 $a=10$ 时，我们得到以10为底数的对数函数 $y=log_{10}x=lgx$；当取底数 $a=e$ $(=2.71828\cdots)$ 时，我们得到以 e 为底的对数函数 $y=log_ex=lnx$．自然科学和工程技术中常用到函数 $y=lnx$．

根据对数换底公式，有

$$lnx=\frac{lgx}{lge}\doteq\frac{1}{0.4343}lgx\doteq 2.303lgx\doteq 2.3lgx.$$

下面，我们讨论 $y=lgx$、$y=lnx$ 的图形和性质．

例 作出函数 $y=lgx$，$y=lnx$ 的图象

解：（1）列表

x	…	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	…
$y=lgx$	…	−0.6021	−0.3010	0	0.3010	0.6021	…
$y=lnx$	…	−1.39	−0.69	0	0.69	1.39	…

(2) 描点作图，便得到 $y=lgx$ 和 $y=lnx$ 的图形（图 5—23）.

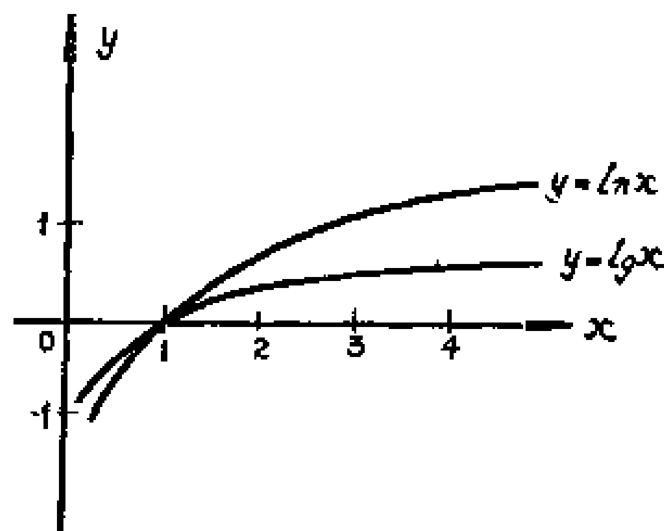


图 5—23

由上述表格和图 5—23，可以看出这两条曲线具有下面的性质：

1. 因为在对数函数中，自变量只能取正值，所以 $y=lgx$、$y=lnx$ 的图形都在 y 轴的右方.

2. 因为 $lg1=0$、$ln1=0$，所以两条曲线都通过 $(1, 0)$ 点.

3. 它们随 x 的增大而上升，即函数 $y=lgx$ 和 $y=lnx$ 在区间 $(0, +\infty)$ 内都是增函数，且当 x 越接近于零时，曲线越靠近 y 轴.

4. 当 $0<x<1$ 时，两条曲线都在 x 轴的下方；当 $x>1$ 时，两条曲线都在 x 轴的上方，而且，当 $0<x<1$ 时，曲线 $y=lgx$ 在曲线 $y=lnx$ 的上方；当 $x>1$ 时，曲线 $y=lgx$ 在曲线 $y=lnx$ 的下方.

习　题

1. 在同一直角坐标系中，作出函数 $y=2^x$ 和函数 $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的图象.

2. 在同一直角坐标系中，作出函数 $y=2^x$ 和函数 $y=3^x$ 的图象，并指出在什么条件下 $y=2^x$ 的图象在 $y=3^x$ 的图象的上方，什么条件下在下方.

3. 在同一直角坐标系中，作出函数 $y=log_2x$ 和函数 $y=lgx$ 的图象，并指出在什么条件下 $y=log_2x$ 的图象在 $y=lgx$ 的图象的上方，什么条件下在下方.

4. 在同一直角坐标系中，作出函数 $y=lnx$，$y=x$，$y=e^x$ 的图象，并指出当 $x(x>0)$ 增大时，那个函数增加得最快.

5. 电容器在放电过程中（图 5—19），如果 $C=1$（微法拉）$=10^{-6}$（法拉），$R=1$（兆欧）$=10^6$（欧姆），$U_0=10$（伏特），试作出电容器两端的电压 U_c 的波形.

〔注〕 ∵ 欧姆 $=\frac{伏特}{安培}=\frac{伏特}{库仑/秒}$，法拉 $=\frac{库仑}{伏特}$；

∴ 欧姆·法拉 = 秒.

复 习 题

1. 已知两个变量 x 和 y 有下面的关系，写出以 x 为自变量，y 为因变量的函数表达式（即写成 $y=f(x)$ 的形式）：

(1) $3x+4y=12$；　　(2) $xy=15$；

(3) $(x-2)(y+3)=-6$；　　(4) $\frac{x}{y}=3$.

2. 已知 $f(x)=\frac{x^2+1}{x-2}$，求 $f(-1)$，$f(0)$，$f(1)$，$f(3)$，$f(a)$ 的值.

3. 下列函数 $y=f(x)$ 中，哪些是偶函数，哪些是奇函数，哪些是非奇非偶的函数.

(1) $f(x)=x^2-x^4$；　　(2) $f(x)=x+x^3$；

(3) $f(x)=2x^2+x^3$;　　　　(4) $f(x)=x(x-1)(x+1)$.

4.电容器极板上的电量 Q 与电容器上的电压 U 成正比，比例系数就是电容量 C，写出 Q 与 U 的函数关系。

5.火车起动阶段可看成等加速运动.设火车起动后用了 2分钟的时间，使速度达到54公里/小时，求在起动阶段：

(1) 火车的速度 V 与时间 t 的函数关系式；

(2) 火车离起点站的路程 S 与时间 t 的函数关系式。

〔提示：$S=\frac{1}{2}at^2$，其中 a 为加速度〕

6.实验知道，铜导线的电阻 R 与导线的长度 l 成正比，与导线的截面积 S 成反比(即 $R=\rho\frac{l}{S}$，其中比例系数 ρ 叫做电导率).测得当长 l 为 1 米，截面积 S 为 1 平方毫米时，电阻 R 为0.017欧姆.

(1) 写出直径为0.1毫米的铜导线的电阻 R 与长度 l 的函数关系式；

(2) 写出长为100米的铜导线的电阻 R 与截面积 S 的函数关系式.

7.在电学中，电压 U (伏)，电流 I (安)，电阻 R (欧)，电功率 P (瓦)之间有以下的关系：

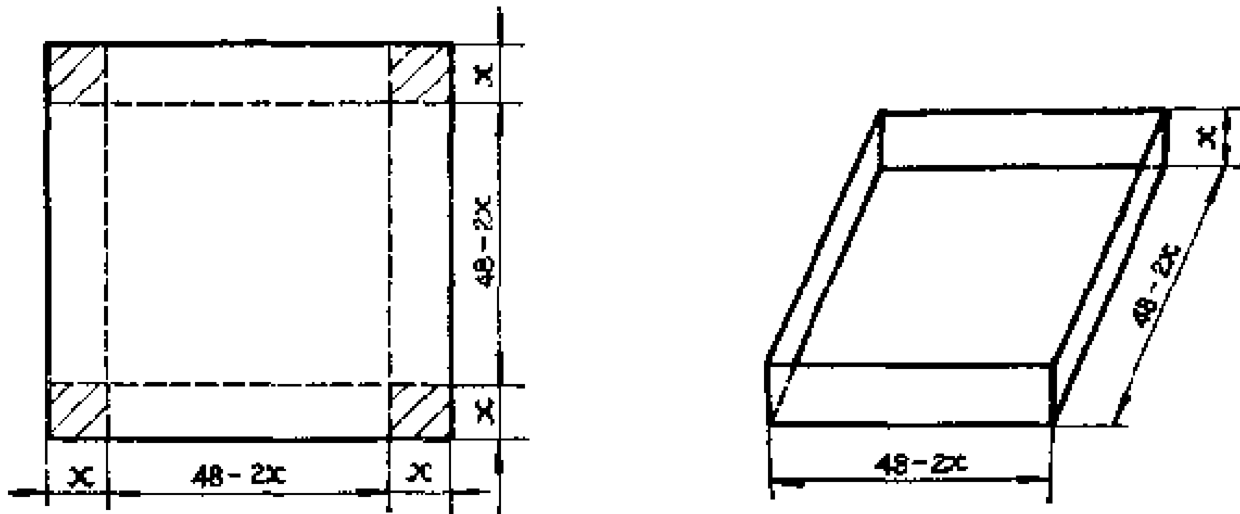
$$U=IR,\ P=IU=I^2R.$$

(1) 已知 $R=150$ 欧，写出电流 I 与电压 U 的函数关系式，$I=I(U)$，并且求 $I(0)$，$I(15)$ 的值；

(2) 已知 $U=20$ 伏，写出电流 I 与电阻 R 的函数关系式 $I=I(R)$，并且求 $I(200)$ 的值；

(3) $R=50$ 欧，写出电功率 P 与电流 I 的函数关系式 $P=P(I)$，并求 $P(0.5)$、$P(1)$ 的值.

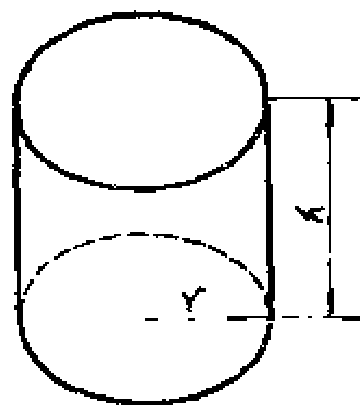
8.有一块边长为48厘米的正方形铁皮，在它的四角各剪去相等的一块小正方形（图中阴影部分），制成一只没有盖的容器.求容器的容积 V 与被剪去的小正方形的边长 x 之间的函数关系式，并说明函数的定义域.



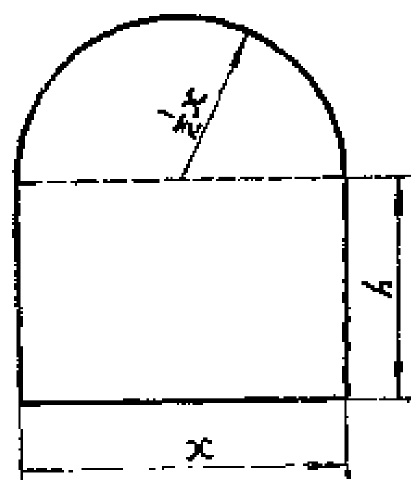
(第 8 题)

9. 某炼油厂要建造容积为V_0（一定）的圆柱形储油罐，为了节省钢材，就要解决圆柱形储油罐的底半径r多大时，才能使表面积（包括上下底)最小的问题．为此首先要求建立它的表面积S与底半径r之间的函数关系式．试建立此函数关系式．

10. 下水道的截面是矩形加一半圆形（见图），如果排水量一定（这时截面积A是常量），为了节省建筑材料，就要解决底宽x多大时，截面的周长L最小的问题．为此，首先要求建立截面的周长L与底宽x之间的函数关系式．试建立此函数的关系式．



（第 9 题）



（第10题）

第二篇　平面几何

第六章　三　角　形

在生产实践和日常生活中，我们接触到各种物体的形状，就产生了各种图形的概念，如三角形、圆形等．正如恩格斯指出的：“**和数的概念一样，形的概念也完全是从外部世界得来的，而不是在头脑中由纯粹的思维产生出来的。必须先存在具有一定形状的物体，把这些形状加以比较，然后才能构成形的概念。**”

研究和掌握这些图形的性质，能够帮助我们分析和解决有关的实践问题．本章着重研究三角形的性质，下一章研究圆的性质．

第一节　角

一、线　段

用直尺把A、B两个点连接起来所成的图形叫做线段〔图6—1（1）〕.点A和B叫做线段的端点.线段可以用表示它的两个端点的大写字母来表示，如线段AB；也可以用一个小写字母来表示，如线段m.

线段两端点间的距离叫做线段的长度．通常用的长度单位有公里（km）、米（m）、厘米（cm）、毫米（mm）等．

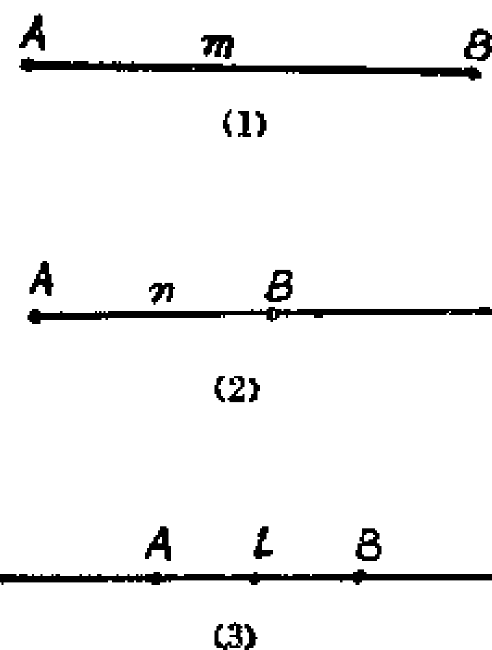


图6—1

用直尺把线段向一端无限延长所成的图形叫做射线〔图6—1（2）〕.射线可以用表示它的一个端点和射线上的任意一个点的大写字母来表示，如射线AB；也可以用一个小写字母来表示，如射线n.

用直尺把线段向两端无限延长所成的图形叫做直线〔图6—1（3）〕.直线可以用表示它上面任意两个点的大写字母来表示，如直线AB；也可以用一个小写字母来表示，如直线l.

经验告诉我们，经过两点只能画一条直线.

二、角的概念

角是在日常生活和生产实践中经常遇到的图形.

角可以看成由一点引出两条射线所组成的图形.这个点叫做角的顶点，两条射线叫做角的边.如图6—2的角

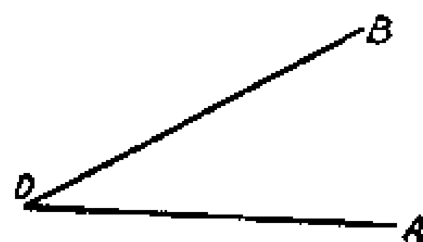
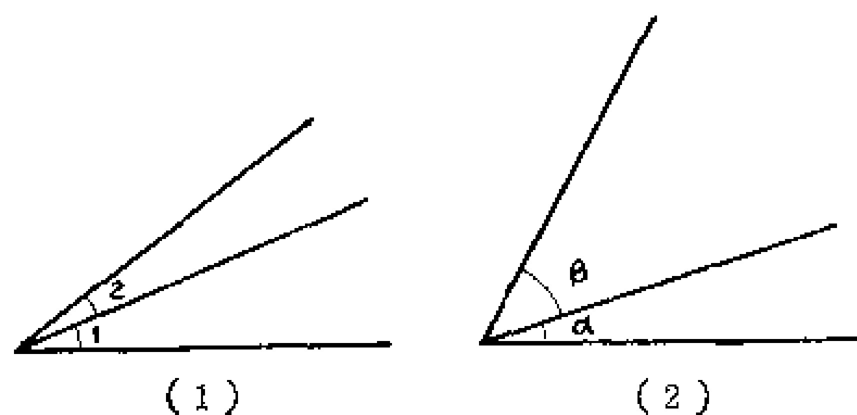


图6—2

是由射线OA和OB组成，O点是角的顶点，这个角记作$\angle AOB$或$\angle BOA$．记号"$\angle$"读作"角"．注意：表示角的顶点的字母O必须写在其它两个字母的中间．在不会与其它角发生混淆的情况下，$\angle AOB$可简记为$\angle O$．

有时，为了方便起见，在角的里面注上数字或小写希腊字母来表示角，如图6—3(1)中的$\angle 1$，$\angle 2$，图6—3(2)中的$\angle\alpha$，$\angle\beta$．



（1）　（2）
图6—3

角也可以看作是由一条射线绕着它的端点旋转而形成的．如图6—4中的角，就可看作是由射线OA，按逆时针方向，绕着它的端点O旋转到OB而形成的．此时，我们把OA叫做这个角的始边，OB叫做这个角的终边．

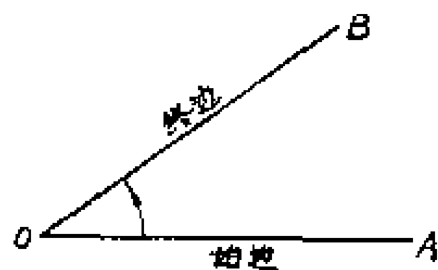


图6—4

当射线从OA的位置旋转到和OA成一直线的OB位置时，所形成的角叫做平角（图6—5）．

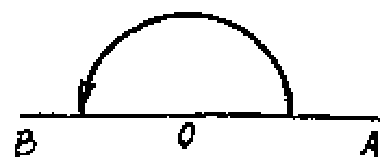


图6—5

当射线从OA的位置旋转一周，又回到OA的位置时，所形成的角叫做周角（图6—6）．

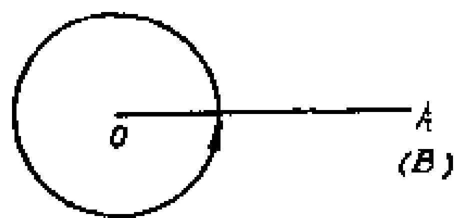
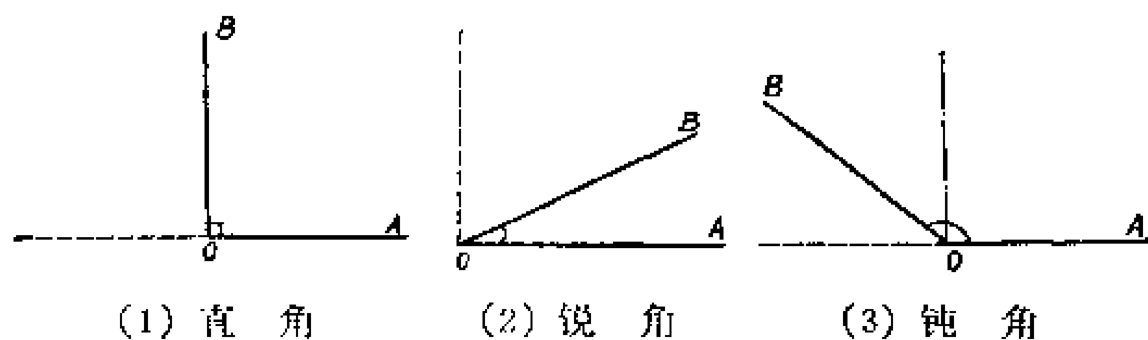


图6—6

如果两个角经过移动，能完全重合，就称这两个角相等．显然，凡平角都相等，凡周角都相等．

平角的一半叫做直角〔图6—7(1)〕．显然，凡直角都相等．

小于直角的角叫做锐角〔图6—7(2)〕；大于直角而小于平角的角叫做钝角〔图6—7(3)〕．



(1) 直　角　　(2) 锐　角　　(3) 钝　角
图6—7

三、角的度量

度量角的大小一般采用"角度制"，其单位为"度"、"分"、"秒"。

我们把周角分成360等分，每一等分的角叫做一度的角；把一度的角分成60等分，每一等分的角叫做一分的角；把一分的角分成60等分，每一等分的角叫做一秒的角．"度""分"、"秒"分别用"°"、"′"、"″"表示，例如60度15分30秒可以记作$60°15'30''$．度、分、秒之间是60进位制，即$1°=60'$、$1'=60''$．

按照上面的规定，可以知道：一周角是$360°$，一平角是$180°$，一直角是$90°$．

通常，我们用量角器（又称半圆仪）来度量角的大小.量角时，把量角器上的圆心和角的顶点重合，并使量角器上0°的刻线对准角的一边，这时，角的另一边在量角器上所对的读数，就是这个角的读数.如图 6—8 中$\angle AOB=50°$.

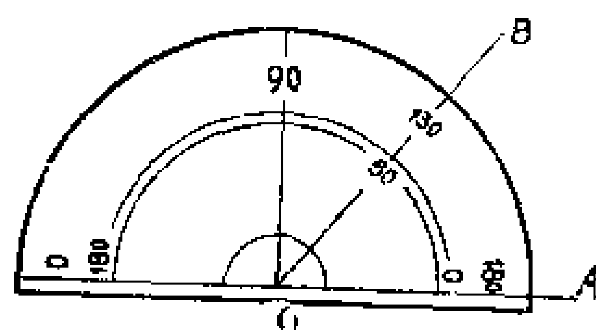


图 6—8

例 1　把25.28°化为度、分、秒.

解: ∵　$1°=60'$,　　∴　$0.28°=0.28\times60'=16.8'$;

∵　$1'=60''$,　　∴　$0.8'=0.8\times60''=48''$;

∴　$25.28°=25°16'48''$.

例 2　把102°15′化为度.

解: ∵　$1'=\left(\frac{1}{60}\right)°$,　　∴　$15'=15\times\left(\frac{1}{60}\right)°=0.25°$,

∴　$102°15'=102.25°$.

如果两个角之和等于90°，那末这两个角叫做互为余角,其中一个角是另一个角的余角.如图 6—9 中，∠1 和∠2 互为余角.

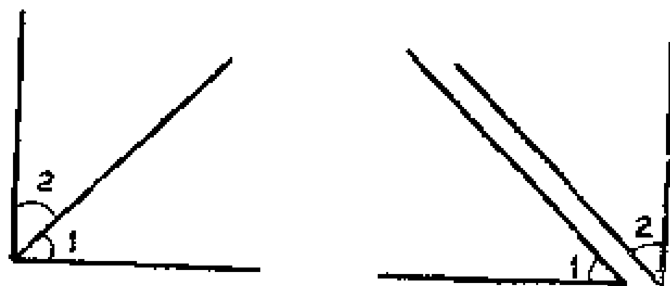


图 6—9

如果两个角之和等于180°，那末这两个角叫做互为补角，其中一个角是另一个角的补角.如图 6—10中,$\angle\alpha$和$\angle\beta$互为补角.

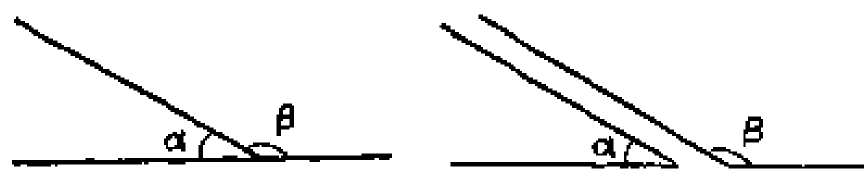


图 6—10

例 3　如图 6—11，已知AOB是一条直线，$\angle\alpha=41°50'$，求$\angle\beta$.

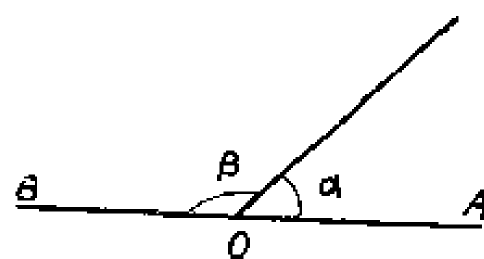


图 6—11

解: ∵　AOB是直线,

∴　$\angle\alpha+\angle\beta=180°$,

∴　$\angle\beta=180°-\angle\alpha$

$=180°-41°50'$

$=138°10'$.

例 4　图 6—12表示车刀在车外圆时的加工过程. 已知主偏角$\varphi=40°$，副偏角$\varphi_1=45°$，求刀尖角ε.

解: ∵　$\angle\varepsilon+\angle\varphi+\angle\varphi_1=180°$,

∴　$\angle\varepsilon=180°-(\angle\varphi+\angle\varphi_1)$

$=180°-(40°+45°)$

$=180°-85°=95°$.

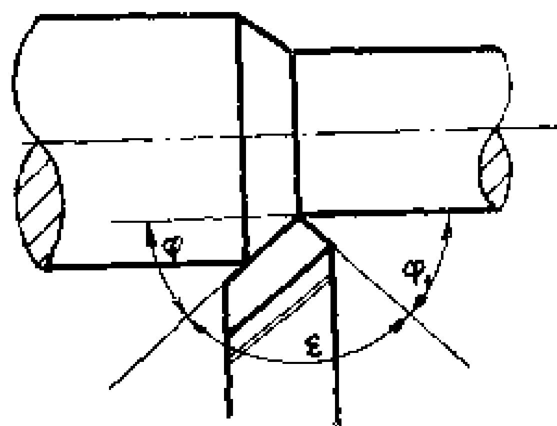


图 6—12

如果两条直线AB和CD相交于O点(图 6—13)，它们构成了四个角，其中$\angle AOC$和$\angle BOD$叫做对顶角，同样$\angle AOD$和$\angle COB$也是对顶角.

对顶角有下述性质:

定理*　凡对顶角都相等.

* 我们把经过证明确能成立的重要结论叫做定理。

已知：$\angle AOC$和$\angle BOD$是对顶角（图 6—13）．

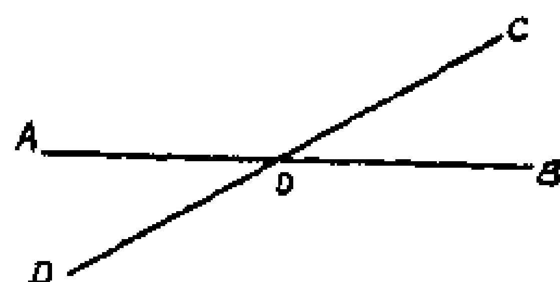


图 6—13

求证：$\angle AOC=\angle BOD$．

证明：∵ $\angle AOC+\angle COB=180°$（$AB$是一条直线），

∴ $\angle AOC=180°-\angle COB$；

又 ∵ $\angle BOD+\angle COB=180°$（$CD$是一条直线），

∴ $\angle BOD=180°-\angle COB$；

$\angle AOC=\angle BOD$．

几何中每一个定理都是由条件和结论两部分组成的．定理的证明，就是由条件作基础，根据已经掌握的知识，推导出结论来．因此，在定理证明之前，先要分清什么是条件，什么是结论；并把它们分别列在"已知"和"求证"栏内．在证明过程中，每一论证都必须有确切的根据；并要把这些根据写明白（通常写在右边的括号内）．

习　题

1．角的大小和所画的边的长短有没有关系？

2．指出下列图形中各有几个角，并分别把它们写出来．

3．把下列图形中用数字表示的角改用三个大写字母来表示．

4．用量角器分别画出 35°、90°、150° 的角．

（1）　（2）

（第 2 题）

5．计算：

（1）29.36°合多少度，多少分，多少秒；

（2）105°12′合多少度；

（3）45°＋11°28′＋33°42′；

（4）70°20′－15°11′＋24°51′；

（5）（12°10′12″）× 5；　（6）360° ÷ 5．

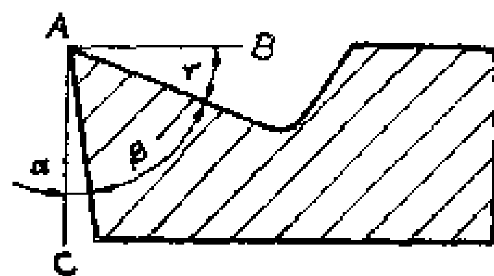
（1）　（2）

（第 3 题）

6．下列各角的余角和补角各为多少度？

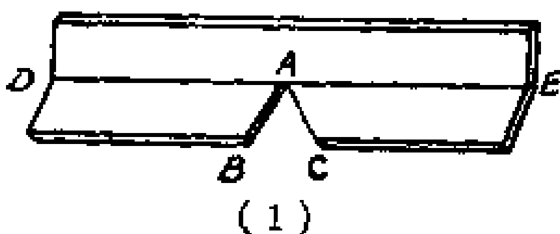
（1）50°；　（2）44°45′．

7．割槽刀的剖面如图所示，其中 $\angle BAC=90°$，用样板测得后角 $\alpha=6°$，前角 $\gamma=20°$，求它的楔角 β．

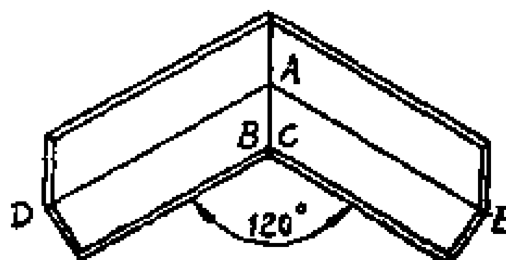


（第 7 题）

8．弯角铁是经常碰到的．如果把角铁折弯后成的角是 120°〔即图（2）中，$\angle DAE=120°$〕，问折弯前



（1）

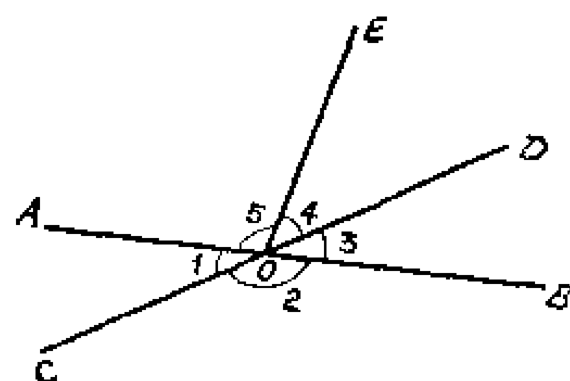


（2）

（第 8 题）

〔图（1）〕应把$\angle BAC$锯成多少度？

9.如图，已知两条直线AB、CD相交于O点，过O引射线OE，设$\angle 1=30°$，$\angle 4=45°$，求$\angle 2$，$\angle 3$和$\angle 5$的度数.



（第9题）

第二节　垂线和平行线

同一平面上的两条直线，它们的相互位置关系有各种不同的情况，其中以两直线互相垂直和互相平行为最重要，本节研究垂直和平行的基本理论.

一、垂　线

若两条直线相交成直角，则称它们是互相垂直的直线. 其中的一条叫做另一条的垂线，它们的交点叫做垂足.

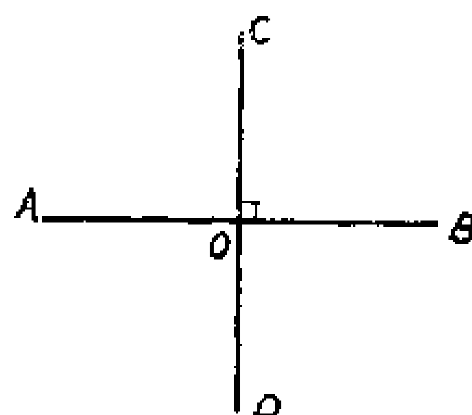
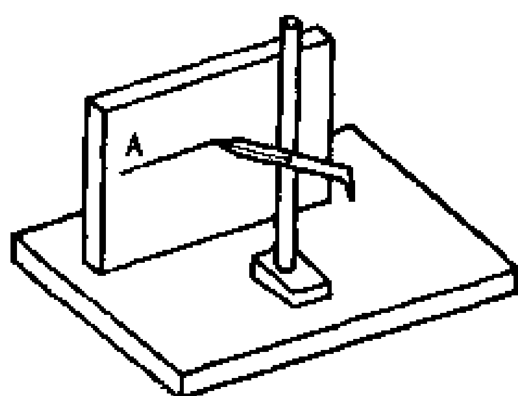


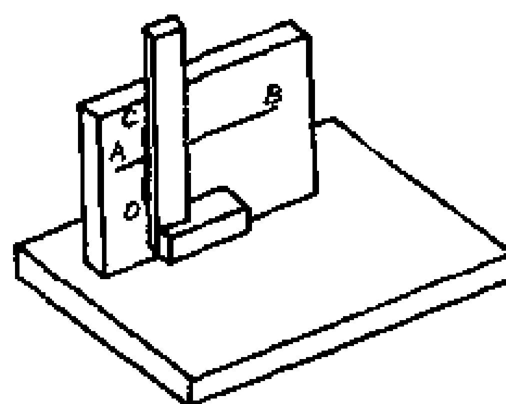
图6—14

在图6—14中，AB和CD就是互相垂直的两直线，而O点就是垂足.

我们用记号“⊥”（读作“垂直于”）来记两直线互相垂直的关系. 如在图6—14中，AB与CD互相垂直，就记作$AB\perp CD$（或$CD\perp AB$）.



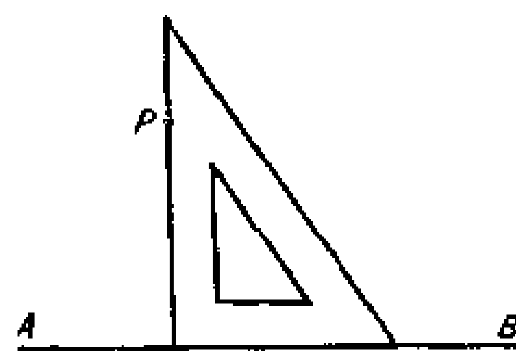
(1)



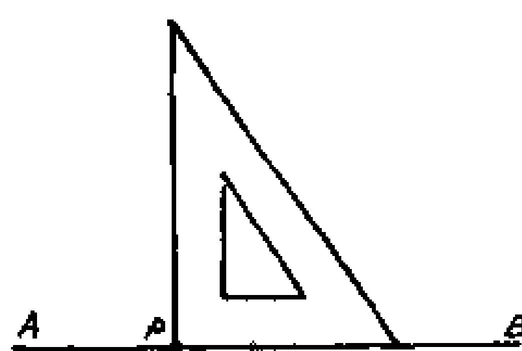
(2)

图6—15

在工厂常用划针盘和角尺画垂线. 如图6—15，先用划针盘画出直线AB，再把角尺放在平台上，紧靠工件，画出直线CD，那末$AB\perp CD$(工人师傅通常称这种互相垂直的直线为十字线).



(1) 过AB外一点P画AB的垂线



(2) 过AB上一点P画AB的垂线

图6—16

在绘制工程图时，也常利用三角板画垂线（图6—16）.

下面，我们介绍利用圆规、直尺画直线的垂线和线段的垂直平分线的方法.

例1　过直线l外一点P作l的垂线.

作法：

（1）以P为圆心，适当长为半径作圆弧，此圆弧与直线l交于A、B两点（图6—17）；

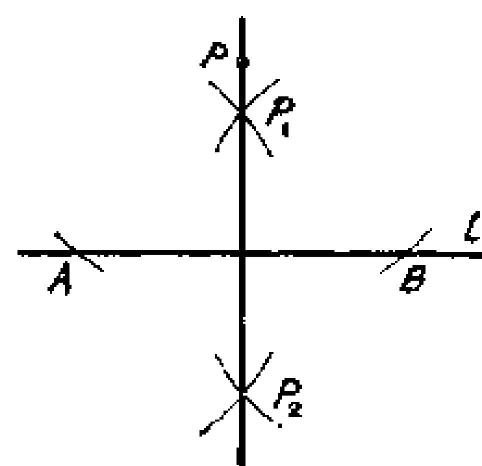


图6—17

（2）分别以A、B为圆心，同样长为半径$\left(须大于\frac{1}{2}AB\right)$画圆弧，两圆弧相交于$P_1$、$P_2$两点；

（3）连接P_1、P_2，那末，直线P_1P_2就是求作的垂线.

例 2 作线段AB的垂直平分线（即经过线段的中点，与线段互相垂直的直线）.

作法：

（1）分别以A、B为圆心，同样长为半径$\left(须大于\frac{1}{2}AB\right)$画圆弧，两圆弧相交于$C$、$D$两点（图6—18）；

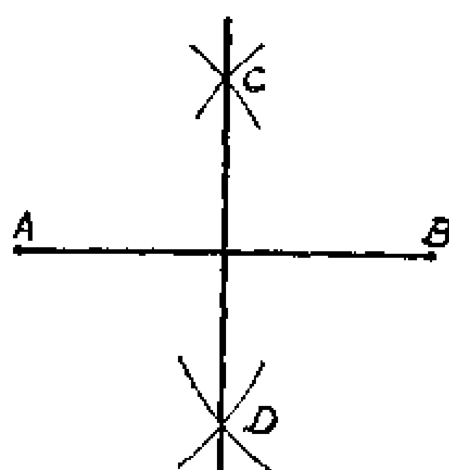


图6—18

（2）连接C、D，那么，直线CD就是求作的垂直平分线.

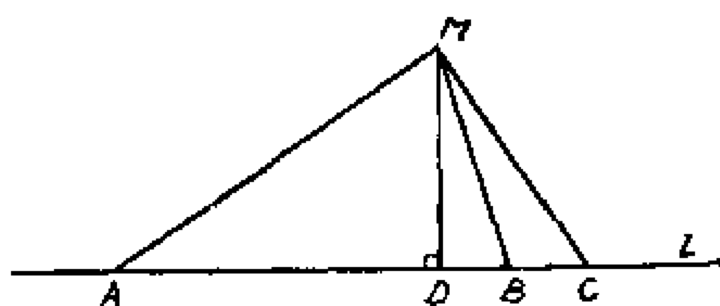


图6—19

从图6—19中可以看出，直线l外一点M与直线l上所有各点的连线中，以垂线（指垂直于l的线段MD）为最短，线段MD的长就叫做M点到直线l的距离.

二、平行线

笔直的铁路的两条铁轨、黑板的上沿和下沿都可以看作两条永不相交的直线.

在同一平面内永不相交的两条直线叫做互相平行的直线.

在图6—20中，AB、CD就是两条互相平行的直线.

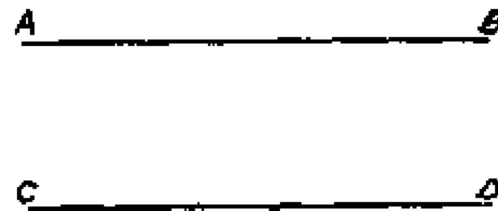


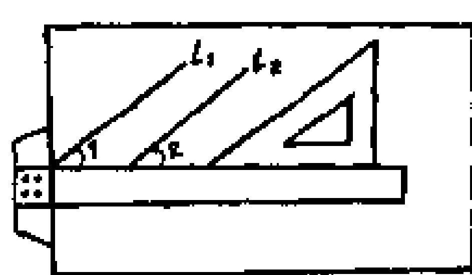
图6—20

我们用记号“$/\!/$”（读作“平行于”）来记两直线互相平行的关系. 如在图6—20中，AB与CD互相平行，就记作$AB/\!/CD$（或$CD/\!/AB$）.

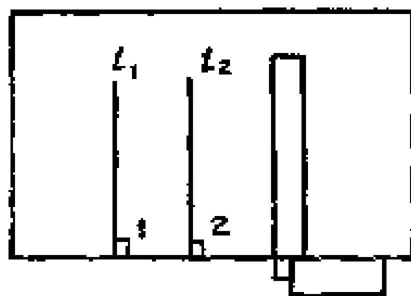
我们看到，黑板上沿的每一个点到下沿的距离都相等. 这说明：平行线间的距离处处相等.

工人师傅常用丁字尺、三角尺、角尺和活络角尺等工具，在图纸或工件上划出平行线，方法如图6—21所示.

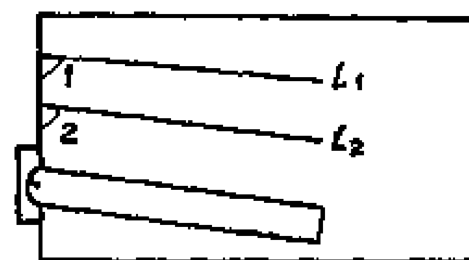
这几种平行线划法的共同特点是：在划线过程中∠1和∠2保持相等.



(1)



(2)



(3)

图6—21

在图6—22中，如果∠1和∠2不相等，那末划出的两条直线l_1和l_2就不平行.

一般地，两条直线AB、CD和第三条直线EF相交，构成八个角（图6—23）. 按这些角的位置把它们分成两类：

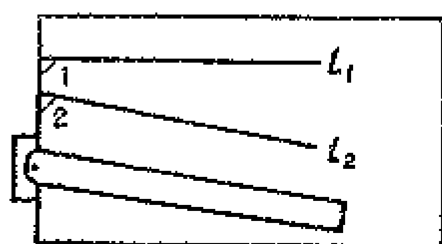


图 6—22

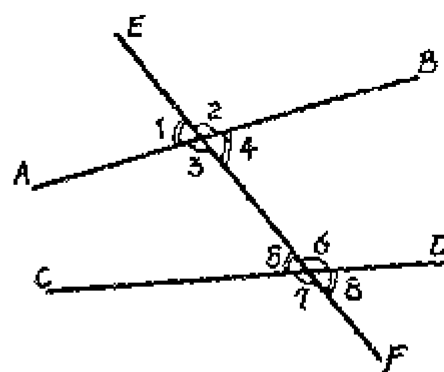


图 6—23

（1）∠1和∠5，∠2和∠6，∠3和∠7，∠4和∠8分别叫做同位角；

（2）∠3和∠6，∠4和∠5分别叫做内错角.

根据上面划平行线的方法，我们得到下面的结论：

定理 两条直线和第三条直线相交，如果有一对同位角相等，那末这两条直线相互平行；反之，如果两条直线平行，那末，同位角相等.

例 1 如图 6—24，已知∠1＝∠2，求证$AB /\!/ CD$.

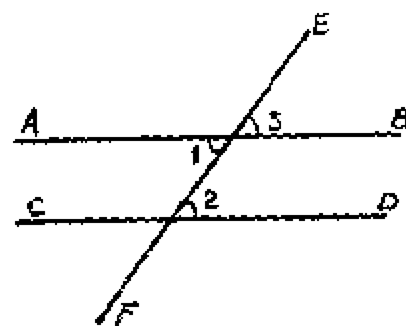


图 6—24

证明： ∵ ∠1＝∠2，（已知条件）

又 ∵ ∠1＝∠3，（对顶角相等）

∴ ∠2＝∠3.

∴ $AB /\!/ CD$.（同位角相等，两条直线平行）

从这个例题，我们得到下面的结论：

推论 两条直线和第三条直线相交，如果有一对内错角相等，那末这两条直线相互平行.

反之，如果两条直线平行，那末内错角相等.

例 2 在图 6—25中，已知∠1和∠2互补，求证$AB /\!/ CD$.

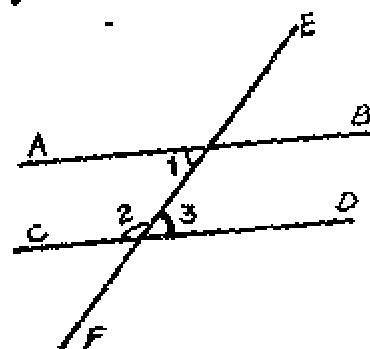


图 6—25

证明： ∵ ∠1＋∠2＝180°，（已知条件）

∴ ∠1＝180°－∠2.

又 ∵ ∠2＋∠3＝180°，（CD是一条直线）

∴ ∠3＝180°－∠2.

∴ ∠1＝∠3.

∴ $AB /\!/ CD$.（内错角相等，两直线平行）

例 3 如图 6—26已知$AB /\!/ CD$，$AE /\!/ CF$，求证∠A＝∠C.

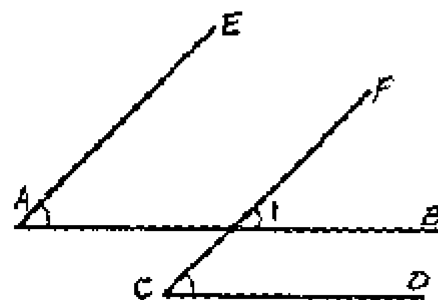


图 6—26

证明： 设CF和AB的交角为∠1，

∵ $AB /\!/ CD$，

∴ ∠1＝∠C.（两直线平行，同位角相等）

又 ∵ $AE /\!/ CF$，

∴ ∠1＝∠A.（两直线平行，同位角相等）

∴ ∠A＝∠C.

这个例题说明了：如果一个锐角的两条边分别平行于另一锐角的两条边，那末，这

两个锐角相等．这个结论，我们以后经常用到它．

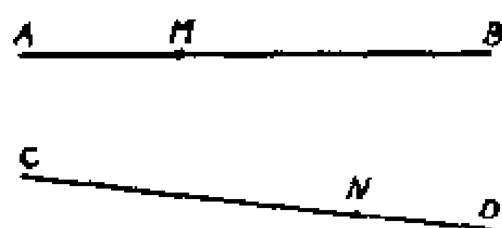
习　　题

1．试举出几个两条直线相互垂直和相互平行的实际例子．

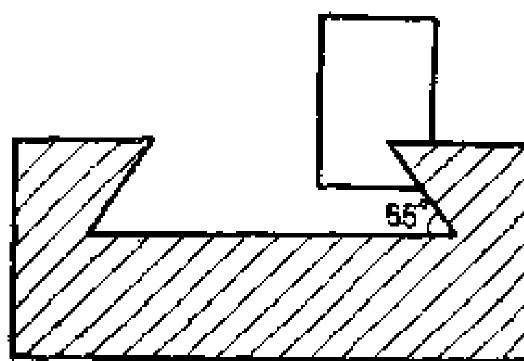
2．垂直于同一直线的两条直线有什么关系？平行于同一直线的两条直线有什么关系？

3．如图，试画出M点和N点之间的距离，M点到直线CD的距离和N点到直线AB的距离．

4．某车床的燕尾槽，按设计标准，其燕尾角是55°．加工时，工人同志用55°的样板角如图示的方法去检验，便可知燕尾角是否是55°．试说明其道理．



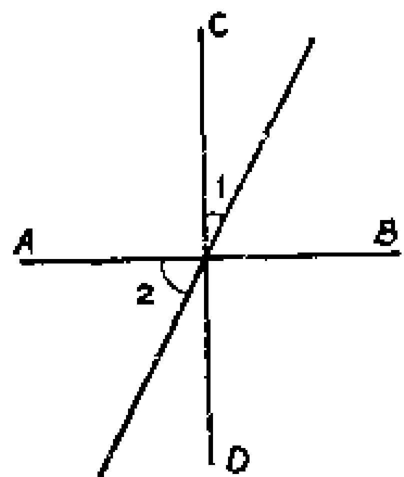
（第3题）



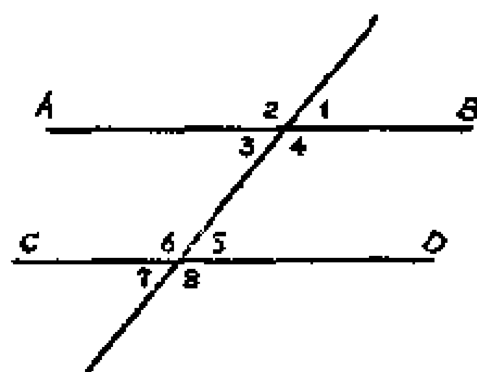
（第4题）

5．如图，已知$AB\perp CD$，$\angle 1=27°$，求$\angle 2$的度数．

6．如图，已知$AB\parallel CD$，$\angle 1=50°$，求其余各角的度数．



（第5题）



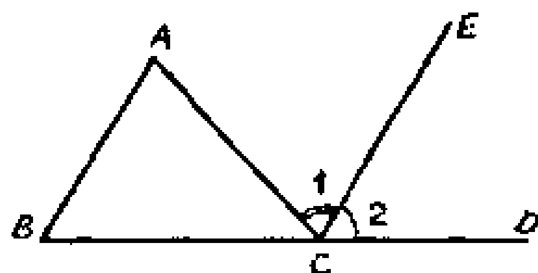
（第6题）

7．如图，已知C点在BD上，且$CE\parallel AB$，$\angle 1=75°$，$\angle 2=60°$．

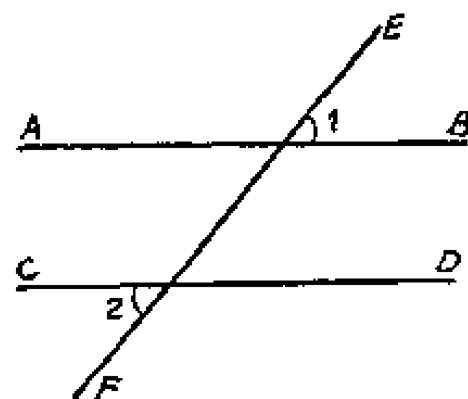
求：（1）$\angle A$，$\angle B$，$\angle ACB$各为多少度；

（2）$\angle A+\angle B+\angle ACB$为多少度．

8．如图，已知$AB\parallel CD$，求证$\angle 1=\angle 2$．



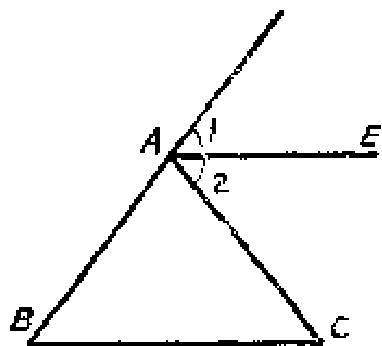
（第7题）



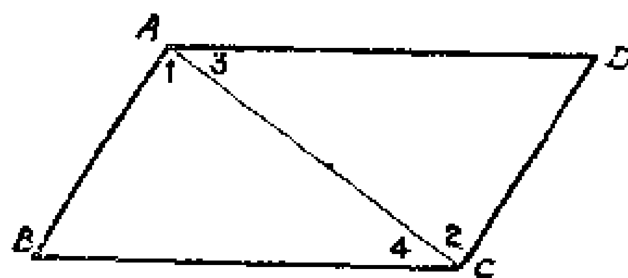
（第8题）

9.如图，已知$AE\parallel BC$，$\angle B=\angle C$，求证$\angle 1=\angle 2$.

10.如图，已知$AB\parallel DC$，$AD\parallel BC$，求证：
$\angle BAD=\angle BCD$.



（第9题）



（第10题）

第三节　三　角　形

三角形是一种基本的几何图形.在工农业生产中，形状为三角形的结构有着广泛的应用.例如，屋架、桥梁等都采用了许多三角形结构.

一、三角形的基本概念

不在同一直线上的三个点，用线段两两连接，所构成的图形叫做三角形.这三个点叫做三角形的三个顶点.

三角形用记号"△"表示，如图6—27中，顶点为A、B、C的三角形，记作"$\triangle ABC$"，读作"三角形ABC"，线段AB、BC、CA叫做$\triangle ABC$的三条边，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$叫做$\triangle ABC$的三个内角，或简称$\triangle ABC$的三个角.三角形的三条边有时也用小写字母来表示，习惯上总是把$\angle A$所对的边记作a，$\angle B$所对的边记作b，$\angle C$所对的边记作c（图6—27）.

1.三角形的分类

按照角的大小，三角形可以分为三类（图6—28）：

（1）锐角三角形——三个内角都是锐角的三角形；

（2）直角三角形——有一个内角是直角的三角形；

（3）钝角三角形——有一个内角是钝角的三角形.

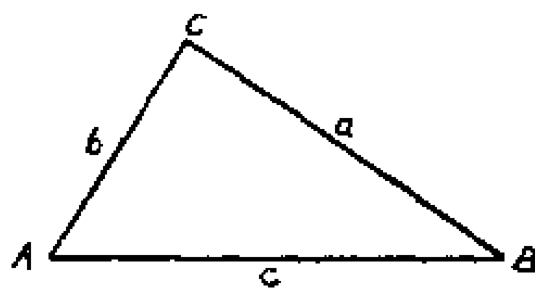
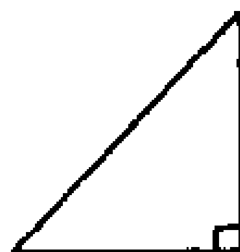


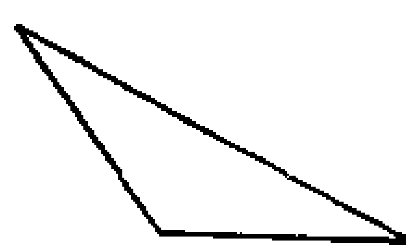
图6—27



锐角三角形



直角三角形



钝角三角形

图6—28

在直角三角形中，夹直角的两边叫做直角边，直角所对的边叫做斜边.

按照边的长短，三角形又可分为三类（图6—29）：

（1）不等边三角形——三条边的长度都不相等的三角形；

（2）等腰三角形——有两条边的长度相等的三角形；

(3) 等边三角形——三条边的长度都相等的三角形.

在等腰三角形中，相等的两条边叫做腰，第三条边叫底边，底边所对的角叫顶角，两腰所对的角叫底角.

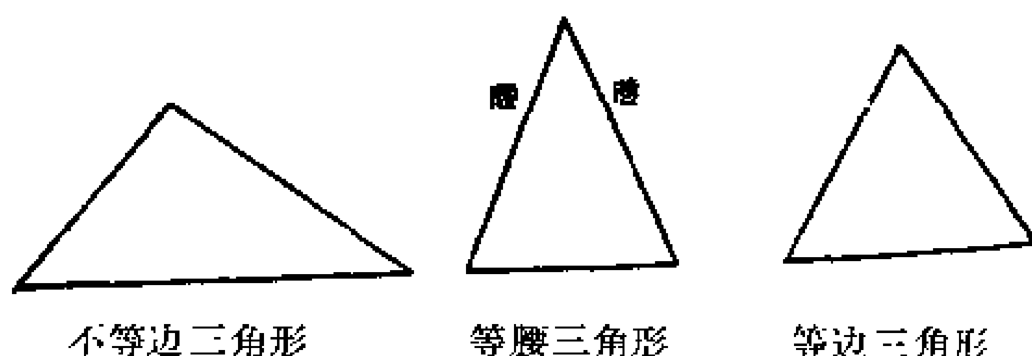


图 6—29

2.三角形的主要线段

连接三角形的任意一个顶点和它对边中点的线段，叫做三角形的中线.三角形中任意一个内角的平分线和对边相交，连接角的顶点和交点的线段，叫做三角形的角平分线.从三角形的任意一个顶点向对边（或对边的延长线）引垂线，连接顶点和垂足的线段叫做三角形的高（图 6—30）.

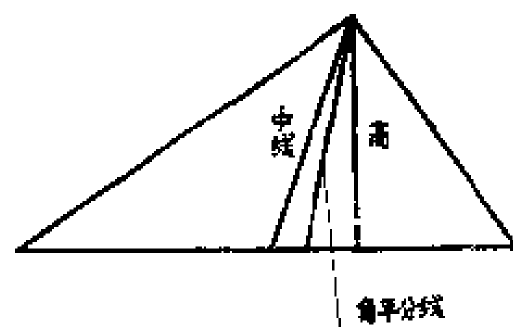


图 6—30

三角形的三条中线、三条角平分线和三条高都分别相交于一点.其中，三条中线的交点叫做三角形的形心.

二、三角形的内角和

我们先来做一个实验:

用硬纸板任意做一个三角形，然后把各个内角剪下来，并按照图 6—31的方法，把它们拼在一起，就会发现，这三个内角正好组成一个平角．即三角形三内角之和等于180°.

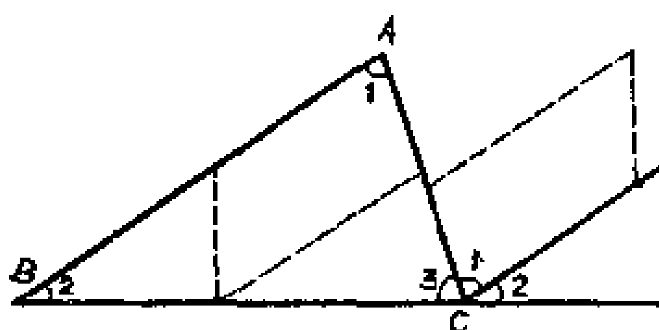


图 6—31

下面，我们用推理的方法来证明这个结论.

定理 三角形三内角之和等于180°.

已知: $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$是$\triangle ABC$的三个内角（图 6—32）.

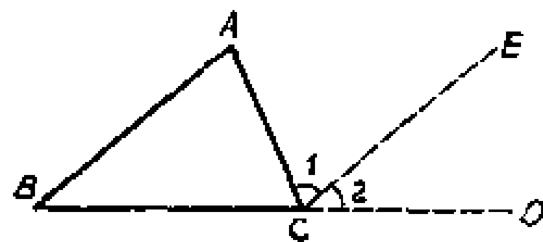


图 6—32

求证: $\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$.

证明: 延长BC至D，过C点作$CE\parallel AB$.

$\because$ $\angle A=\angle 1$（两直线平行，则内错角相等）

$\angle B=\angle 2$（两直线平行，则同位角相等）

$\therefore$ $\angle A+\angle B+\angle ACB=\angle 1+\angle 2+\angle ACB=180^\circ$,

即 $\angle A+\angle B+\angle C=180^\circ$.

在上面的证明过程中，我们在原来的图形上添作了BC的延长线CD和平行于AB的直线CE，CD和CE叫做辅助线.辅助线通常画成虚线.

我们把三角形的一边和另一边的延长线所组成的角（如图 6—32中$\angle ACD$）叫做三角形的一个外角.从上面的证明可知,

$$\angle ACD=\angle 1+\angle 2=\angle A+\angle B.$$

由此，得到三角形外角的性质:

推论 1 三角形的任何一个外角，等于和它不相邻的两个内角之和.

根据上面的定理，还可以推出另一个结论，即

推论 2　直角三角形的两个锐角互余．（即两锐角之和为90°）

例 1　六角螺帽各内角都相等，问每个内角等于多少度？

解： 如图 6—33，作对角线AC、AD、AE，这样，我们便得到四个三角形，即$\triangle ABC$、$\triangle ACD$、$\triangle ADE$和$\triangle AEF$．因为这四个三角形的内角和都是180°，而六角螺帽内角和就是这四个三角形内角的总和，所以

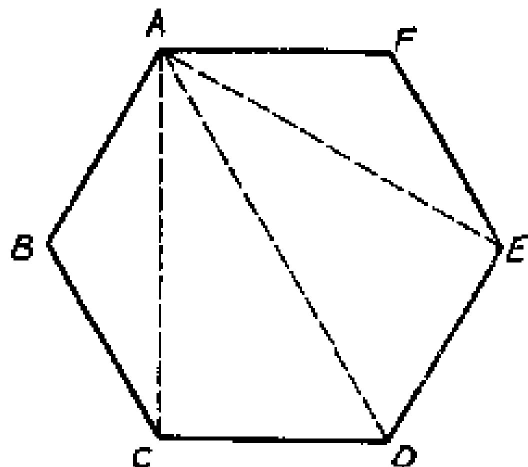


图 6—33

$$\text{六角螺帽六个内角之和}=4\times 180^\circ=720^\circ,$$

从而得，
$$\text{六角螺帽的每一个内角}=\frac{720^\circ}{6}=120^\circ.$$

仿照这个例题的解法，我们可以从n边形的一个顶点作对角线，而把该n边形分成$n-2$个三角形．因为n边形的内角和就等于这$n-2$个三角形的内角总和，所以有

$$\boxed{n\text{边形的内角和}=(n-2)\times 180^\circ}$$

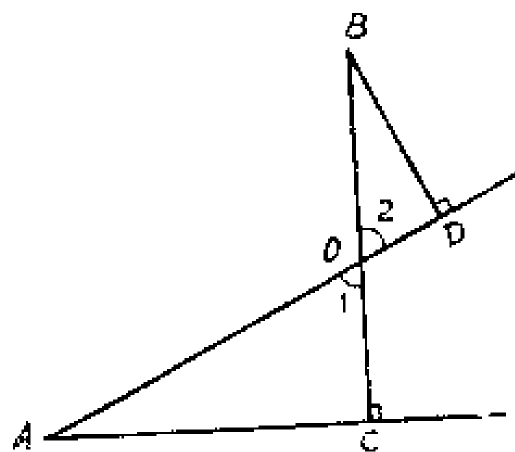


图 6—34

例 2　已知锐角$\angle A$的两边分别垂直于另一锐角$\angle B$的两边（图6—34），求证$\angle A=\angle B$．

证明： 在$\triangle ACO$中，$\angle C=90^\circ$，（$\because AC\perp BC$）

$\therefore \angle A+\angle 1=90^\circ$．（直角三角形两锐角互余）

即　$\angle A=90^\circ-\angle 1$，

在$\triangle BOD$中，$\angle D=90^\circ$，　（$\because AD\perp BD$）

$\therefore$　$\angle B+\angle 2=90^\circ$　（直角三角形两锐角互余）

即　$\angle B=90^\circ-\angle 2$．

又　$\because$　$\angle 1=\angle 2$，　（对顶角相等）

$\therefore$　$\angle A=\angle B$．

这个例题说明了：如果一个锐角的两条边分别垂直于另一个锐角的两条边，那末，这两个锐角相等．这个结论，我们以后经常用到它．

三、全等三角形及其判定

工人师傅在下料时，往往先按样板划出图形，然后再进行切割．这样切割下来的钢板和原来样板的形状、大小完全一样，放在一起就能完全重合．

我们把能够完全重合的两个图形叫做全等形．能够完全重合的两个三角形叫做全等三角形．通常用符号“≌”表示全等，读作“全等于”，如图 6—35中，$\triangle ABC$与

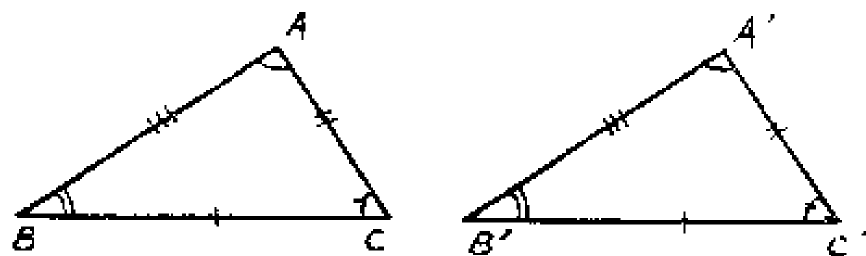


图 6—35

$\triangle A'B'C'$全等，就记作$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$。

在两个全等三角形中，互相重合的边叫做对应边，互相重合的角叫做对应角. 如在图 6 —35中的两个全等三角形之间，AB与$A'B'$、BC与$B'C'$、AC与$A'C'$是对应边，$\angle A$与$\angle A'$、$\angle B$与$\angle B'$、$\angle C$与$\angle C'$是对应角. 容易看出，对应边所对的角是对应角，对应角所对的边是对应边。

很明显，全等三角形的对应边相等，对应角也相等。

下面我们介绍判定两个三角形全等的法则.

要确定两个三角形是否全等，可以把其中一个放在另一个上面，看一看它们是否重合. 很明显，如果两个三角形的三条边和三个角都对应相等，那末这两个三角形就能重合.但实际上，要判定两个三角形全等，只要知道某些边和角对应相等就够了.

判定定理 1 如果一个三角形的两个角和它们的夹边与另一个三角形的两个角和它们的夹边对应相等.那末这两个三角形全等（简写成角、边、角）.

证明从略.

根据判定定理 1，在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中（图 6 —36），如果

$\angle A = \angle A'$，$\angle B = \angle B'$，$AB = A'B'$，

那末就有

$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$。

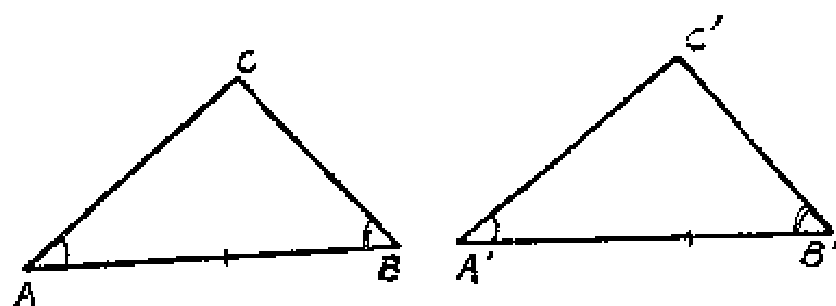


图 6 —36

除判定定理 1 外，我们还有两个判定定理：

判定定理 2 如果一个三角形的两条边和它们的夹角与另一个三角形的两条边和它们的夹角对应相等. 那末这两个三角形全等（简写成边、角、边）.

判定定理 3 如果一个三角形的三条边与另一个三角形的三条边对应相等，那末这两个三角形全等（简写成边、边、边）.

判定定理 2 和判定定理 3 的证明从略.

由判定定理 3 可知，只要三角形的三条边固定，这个三角形的形状就完全确定. 例如，用三根木条钉成一个三角形的架子（图 6 —37），它的形状不会改变.如果用四根木条钉成一个四边形的架子，它的形状就很容易改变（图 6 —38）.三角形的这种特性叫做三角形的稳定性.

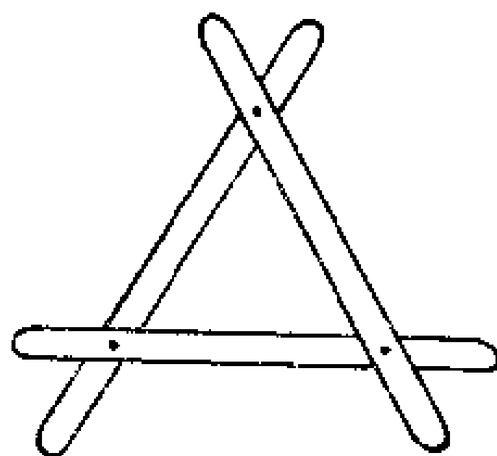


图 6 —37

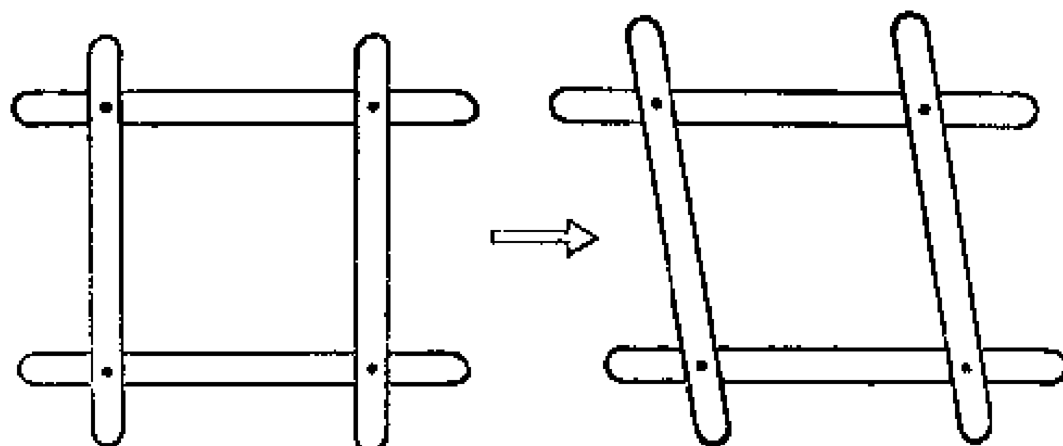
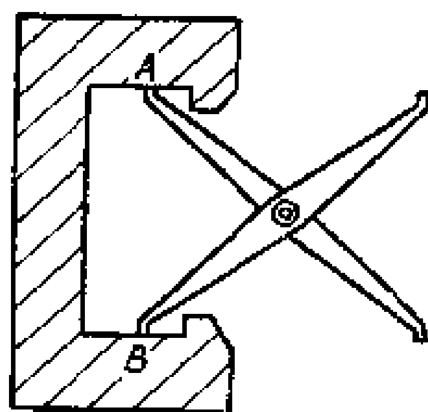


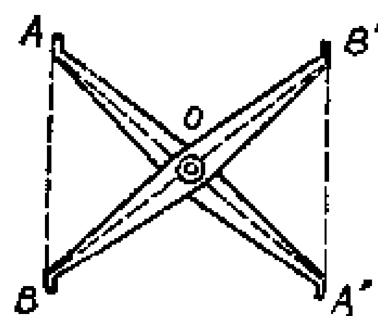
图 6 —38

为什么要研究全等三角形呢？我们知道，在实际工作中，常常要判断两条线段或两个角相等．基本方法是把它们重合在一起比一比，或是量一量．但是有时还会遇到不能直接比或直接量，这时可以利用全等三角形作出判断．

例　如图 6—39所画的工具叫做卡钳，它是根据全等三角形的原理制造的．在图 6—39（2）中 A、O、A' 三点在一条直线上，B、O、B' 三点也在一条直线上，而且$OA=OA'$，$OB=OB'$．要测量工件内槽的宽AB，只要量出A'、B'两点间的距离就可知道．为什么？



（1）



（2）

图 6—39

解：∵　$OA=OA'$，$OB=OB'$，　　（已知条件）

又　∵　$\angle AOB=\angle A'OB'$，　　（对顶角相等）

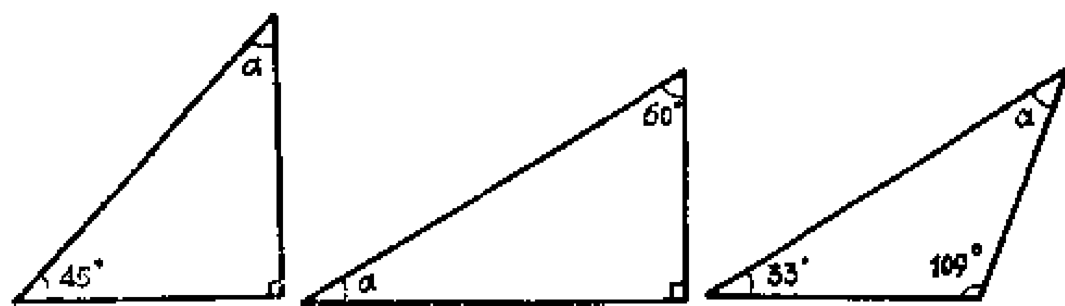
∴　$\triangle AOB\cong\triangle A'OB'$．　　（边、角、边）

∴　$AB=A'B'$．　　（全等三角形对应边相等）

因此，A'、B'两点间的距离就是工件内槽的宽AB．

习　　题

1．如图，求下列各三角形中α角的大小．

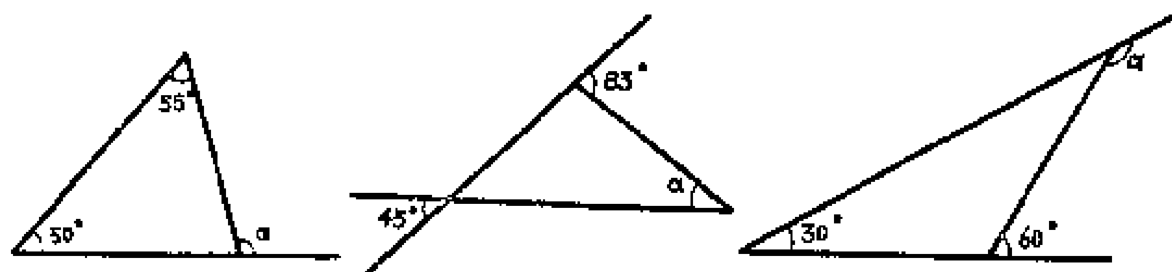


（1）　（2）　（3）

（第1题）

2．已知$\triangle ABC$中，$\angle A=\angle B=\angle C$，求每个角的大小．

3．如图，求下列各图形中α角的大小．



（1）　（2）　（3）

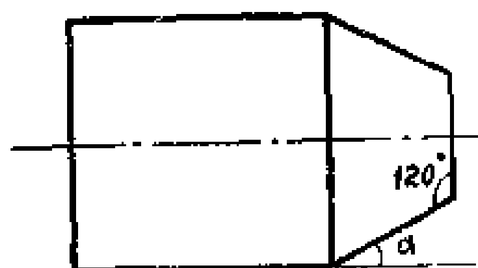
（第3题）

4．飞机从 A 地飞往 B 地，因受侧风的影响，一开始就偏离航线 AB，飞到了 C 点（如图）．已知偏航角$\angle A=7°$，偏离角$\angle B=9°$，求修正角$\angle BCD$．

5．车工在车锥形工件时，刀架应扳动的角度为α（如图），试计算出α角的大小．



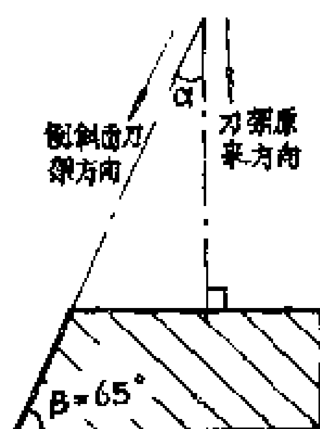
（第 4 题）



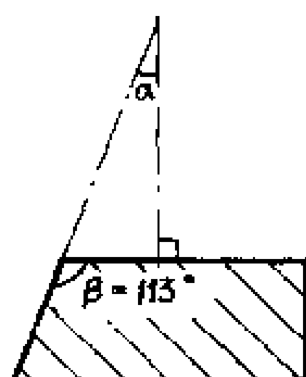
（第 5 题）

6．刨床刨斜面时，图纸标明工件的夹角为 β，刀架应扳动的角度为 α〔如图（1），（2）〕，试分别计算出 α 角的大小．

7．如图所示的工件，在铣床用端面铣刀铣切斜面，图纸标明 $\angle\beta=150°$，求铣刀应转动的角度 α．

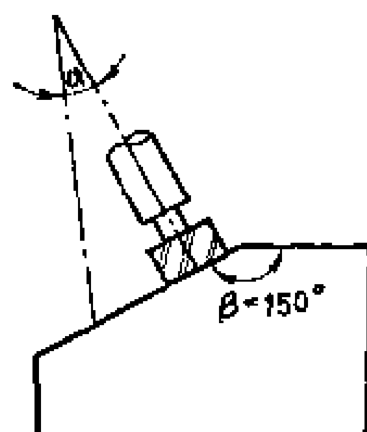


（1）



（2）

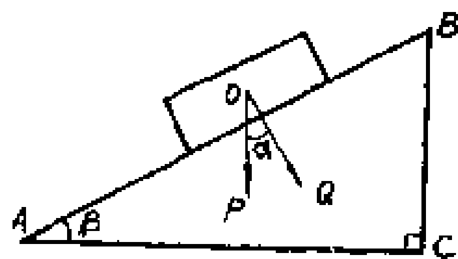
（第 6 题）



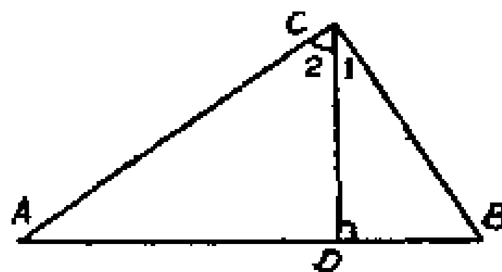
（第 7 题）

8．在斜面上，物体所受的重力的方向 OP（$OP\perp AC$），和物体对斜面的压力的方向 OQ（$OQ\perp AB$），所夹的角为 α，斜面的倾斜角为 β（如图），问 α 与 β 有什么关系？

9．如图，在直角三角形 ABC 中，CD 是斜边 AB 的高，求证：$\angle A=\angle 1$，$\angle B=\angle 2$．



（第 8 题）

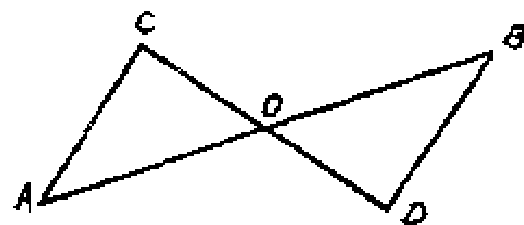


（第 9 题）

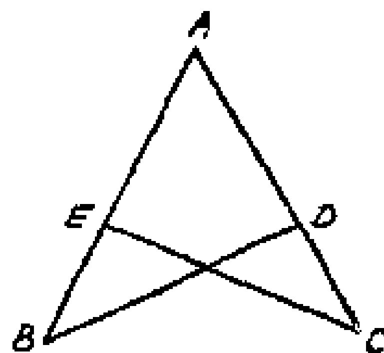
10．如图，已知线段 AB 和 CD 相交于 O 点，且 $OA=OB$，$OC=OD$．求证：$AC=BD$．

11．如图，已知 $AB=AC$，$\angle B=\angle C$，求证：$BD=CE$．

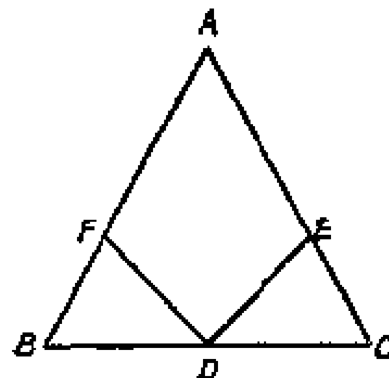
12．如图，已知 $AB=AC$，$BD=CD$，$BF=CE$，求证：$\angle BDF=\angle CDE$．



（第10题）



（第11题）



（第12题）

第四节　几种常见三角形的性质、勾股定理

在这一节里，我们将研究等腰三角形、等边三角形、直角三角形以及平行四边形的一些重要性质．这些性质，特别是直角三角形的勾股定理，是学习后面各章节所不可缺少的知识．

一、等腰三角形的性质

定理　在等腰三角形中，

（1）顶角的平分线、底边的中线、底边上的高是同一条线段；

（2）两底角相等．

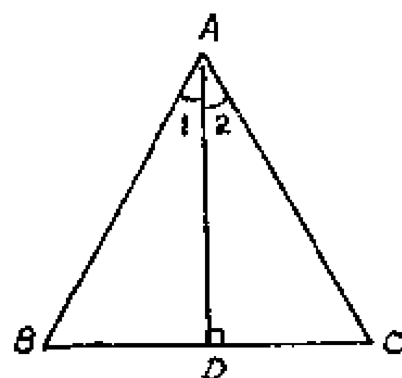


图 6—40

已知：$\triangle ABC$是等腰三角形（图 6—40），即$AB=AC$，AD是$\angle A$的平分线．

求证：（1）AD是底边BC的中线，即$BD=DC$；

AD是底边BC上的高，即$AD\perp BC$；

（2）底角相等，即$\angle B=\angle C$．

证明：（1）在$\triangle ABD$和$\triangle ACD$中，

$\because$ $AB=AC$，　$\angle 1=\angle 2$，（已知）

又　$\because$ $AD=AD$，（公用边）

$\therefore$ $\triangle ABD\cong\triangle ACD$．（边、角、边）

$\therefore$ $BD=DC$．（全等三角形对应边相等）

又　$\because$ $\angle ADB=\angle ADC$，（全等三角形对应角相等）

$\angle ADB+\angle ADC=180^\circ$，（$B$、$D$、$C$ 在一直线上）

$\therefore$ $\angle ADB=\angle ADC=90^\circ$，

即　$AD\perp BC$．

（2）$\because$ $\triangle ABD\cong\triangle ACD$，（前已证）

$\therefore$ $\angle B=\angle C$．（全等三角形的对应角相等）

根据这个定理，我们知道：在同一三角形中，等边所对的角相等．反之，如果在一个三角形中，有两个内角相等，那么它们所对的边也必相等（从而是等腰三角形）．这个结论，我们留给学员自己证明．

从图 6—40中可以看出，等腰三角形是关于底边上的高对称的图形．

由等腰三角形的性质知道，在同一三角形中，等边对等角，所以等边三角形的三内角都相等．又因三角形三内角之和是180°，所以等边三角形每个内角都等于60°．反之，若一个三角形的三内角都相等，则因在同一三角形中，等角对等边，所以这个三角形是等边三角形．即等角三角形必是等边三角形．

二、直角三角形的性质、勾股定理

定理　在直角三角形中，30°角所对的直角边等于斜边的一半．

已知：在$\triangle ABC$中，$\angle BCA=90^\circ$，$\angle A=30^\circ$（图 6—41）．

求证：$BC=\frac{1}{2}AB$．

证明： 延长BC至B'，使$B'C=BC$，并连接AB'.

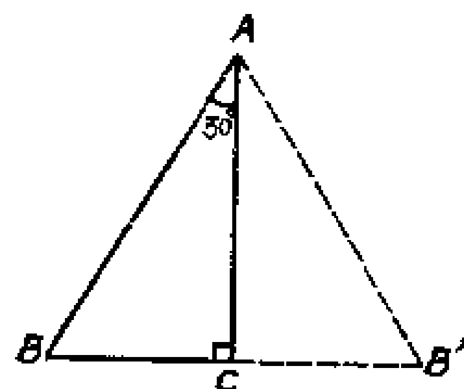


图 6—41

∵ $BC=B'C$，（作图）

$\angle BCA=\angle B'CA=90°$，（$B$、$C$、$B'$在一直线上）

$AC=AC$，（公共边）

∴ $\triangle ABC\cong\triangle AB'C$.（边、角、边）

∴ $AB=AB'$，（全等三角形对应边相等）

∴ $\angle B=\angle B'$.（等腰三角形底角相等）

又 ∵ $\angle B=60°$，（在直角$\triangle ABC$中，$\angle BAC=30°$）

∴ $\angle B'=60°$，

$\angle BAB'=60°$，（三角形内角之和是180°）

$BB'=AB$.（同一三角形中，等角对等边）

$BC=\frac{1}{2}AB$.

反之，还可以证明，如果直角三角形的一直角边是斜边的一半，那么这直角边所对的角必是30°.

下面，我们介绍关于直角三角形的一个非常重要的性质——勾股定理.

毛主席指出：**"中国是世界文明发达最早的国家之一"**.早在三千多年前，我国劳动人民就研究了直角三角形三条边之间的关系，总结出了著名的勾股定理：

$$勾^2+股^2=弦^2.$$

其中，"勾"是指直角三角形中较短的直角边，"股"是指较长的直角边，"弦"是指斜边.

现在，我们就来证明这一定理.

勾股定理 直角三角形中，斜边的平方等于两直角边的平方的和.

已知：在$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$（图 6—42）.

求证：$a^2+b^2=c^2$.

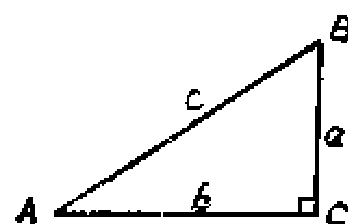


图 6—42

证明： 将四个和图 6—42一样的直角三角形拼接在一起，组成如图 6—43所示的边长为$a+b$的正方形$CFGH$.

先证四边形$ABDE$也是正方形.

事实上，∵ $\triangle ABC\cong\triangle BDF$，

∴ $\angle 1=\angle 3$；

又 ∵ $\angle 1+\angle 2=90°$，

∴ $\angle 2+\angle 3=90°$，

∴ $\angle 4=90°$.

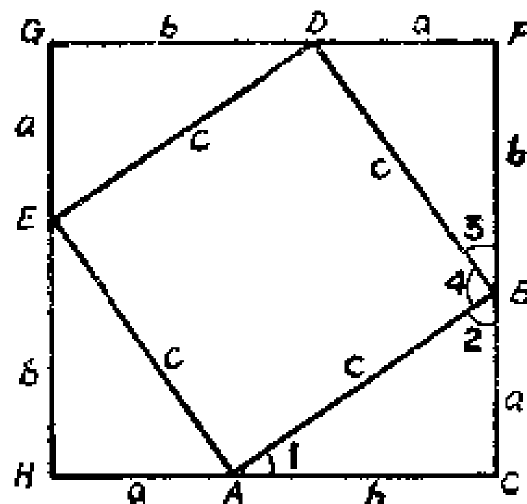


图 6—43

同样，我们还可以证明四边形$ABDE$的其他三内角也是90°，从而它是一个正方形.

因为正方形$ABDE$的面积与四个直角三角形面积之和，等于正方形$CFGH$的面积，所以有

$$c^2+4\times\frac{1}{2}ab=(a+b)^2,$$

$$c^2+2ab=a^2+2ab+b^2,$$

于是得 $$a^2+b^2=c^2.$$

在直角三角形中，如果有两条边的长度已经知道，那末，另一条边的长度就可按照勾股定理计算出来.

例 1 一个工件的尺寸如图 6—44所示（单位是毫米），求A、B两孔中心的距离.

解: 连结AB，并作直角$\triangle ABC$.

由图可知: $AC=40-21=19$,

$BC=66-21=45$.

根据勾股定理知:

$$AC^2+BC^2=AB^2,$$

$$\therefore\quad AB=\sqrt{19^2+45^2}=48.85(\text{毫米}).$$

答: A、B两孔中心的距离为48.85毫米.

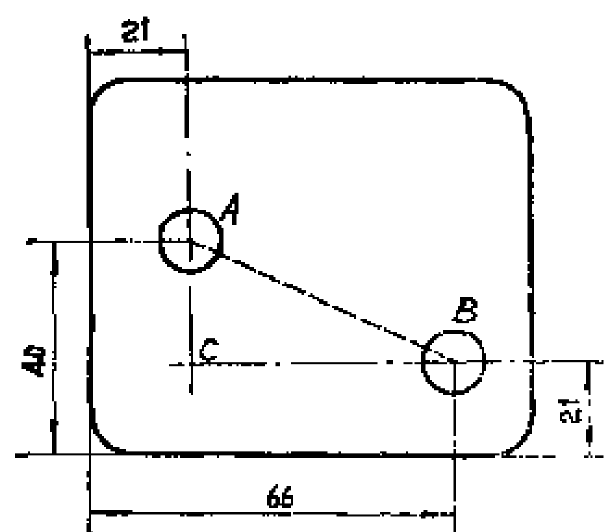


图 6—44

例 2 在直角三角形ABC中，$\angle A=30°$，$BC=a$，求AB、AC的长（图 6—45）.

解: $\because\ \angle A=30°,\ BC=a,$

$\therefore\ AB=2a.$

由勾股定理知: $AB^2=AC^2+BC^2$,

$$\therefore\quad AC^2=AB^2-BC^2=(2a)^2-a^2$$

$$=4a^2-a^2=3a^2,$$

$$\therefore\quad AC=\sqrt{3}a.$$

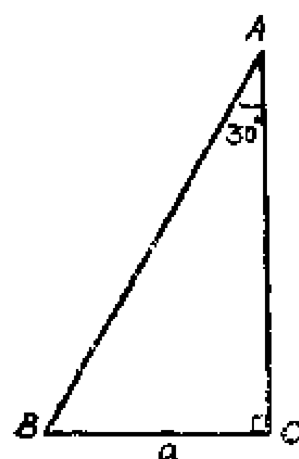


图 6—45

例 3 某车间要把一批截面为正方形的钢料，去掉四个角，加工成如图 6—46所示的正八边形工件. 已知正方形每边长为50毫米，问加工后八边形的每边长是多少？

解: 设八边形每边长为x（单位毫米）. 从图 6—46中可看出，去掉的四个角都是直角三角形，其斜边长为x，两个直角边长均为$\frac{50-x}{2}$. 由勾股定理得:

$$x^2=\left(\frac{50-x}{2}\right)^2+\left(\frac{50-x}{2}\right)^2.$$

即有 $$x^2=2\left(\frac{50-x}{2}\right)^2,$$

$$x^2=\frac{50^2-100x+x^2}{2},$$

$$x^2+100x-2500=0.$$

解之得 $$x=\frac{-100\pm\sqrt{100^2+4\times2500}}{2},$$

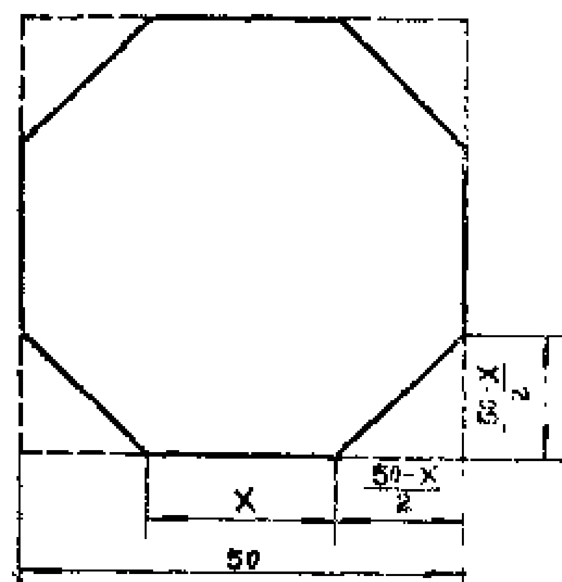


图 6—46

$$x=\frac{-100\pm100\sqrt{2}}{2}=-50\pm50\sqrt{2},$$

∴ $x_1=-50+50\sqrt{2}\approx-50+50\times1.414=20.7$（毫米）；

$x_2=-50-50\sqrt{2}$（因边长不能为负数，故舍去）.

答: 正八边形每边长大约为20.7毫米.

三、平行四边形的性质

两组对边分别互相平行的四边形叫做平行四边形.

平行四边形用记号"▱"表示. 如图6—47中的平行四边形$ABCD$，可表示为"▱$ABCD$".

平行四边形有下面的性质:

定理 凡平行四边形，都有

(1) 对边相等;

(2) 对角相等;

(3) 两对角线互相平分.

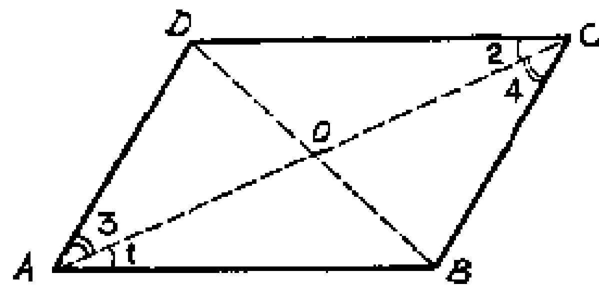


图6—47

已知: $ABCD$为一平行四边形（图6—47），即 $AB\parallel DC$、$AD\parallel BC$，

它们的两条对角线AC、BD相交于O点.

求证: (1) $AB=DC$、$AD=BC$;

(2) $\angle ADC=\angle ABC$、$\angle DAB=\angle DCB$;

(3) $AO=CO$、$BO=DO$.

证明: 在$\triangle ABC$和$\triangle CDA$中，

∵ $AB\parallel DC$、$BC\parallel AD$,

∴ $\angle1=\angle2$、$\angle4=\angle3$，（两线平行，内错角相等）

又 ∵ $AC=AC$,　　（公共边）

∴ $\triangle ABC\cong\triangle CDA$.　　（角、边、角）

于是. 我们得到:

(1) $AB=DC$,　$BC=AD$;（全等三角形，对应边相等）

(2) $\angle ABC=\angle ADC$.　（全等三角形，对应角相等）

此外，还有 $\angle DAB=\angle1+\angle3=\angle2+\angle4=\angle DCB$.

(3) 两条对角线互相平分，留给学员自己证明.

例 把线段AB三等分.

作法: （图6—48）

(1) 过A点作射线AP;

(2) 从A点开始，在AP上连续截取三段相等的线段AA_1、A_1A_2、A_2A_3;

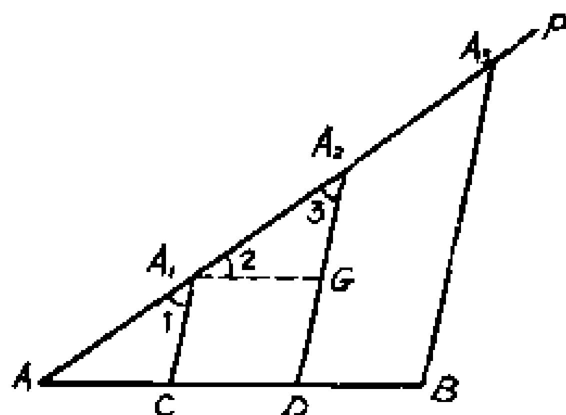


图6—48

(3) 连接A_3B，并过A_1、A_2分别作平行于A_3B的直线，交AB于C、D两点，则

线段AB就被C、D三等分，即

$$AC=CD=DB.$$

证明　作$A_1G /\!/ AB$，于是$CDGA_1$是平行四边形，

$\therefore$　$A_1G=CD$.

$\because$　$\angle A=\angle 2$，$\angle 1=\angle 3$，（两直线平行，同位角相等）

$AA_1=A_1A_2$，（作法）

$\therefore$　$\triangle AA_1C \cong \triangle A_1A_2G$.（角、边、角）

$\therefore$　$AC=A_1G$，　　　（全等三角形对应边相等）

$\therefore$　$AC=CD$.

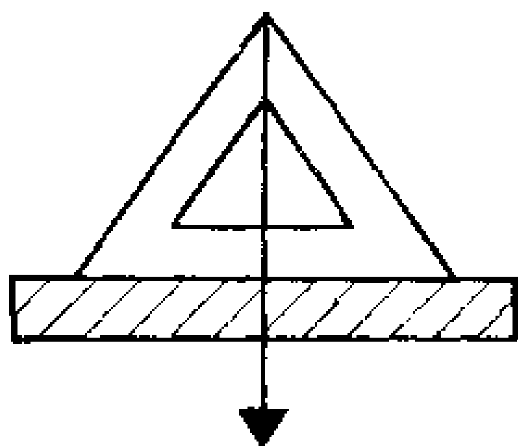
同理可证　　$CD=DB$.

从上例可知，如果一组平行线在一条直线上截得相等的线段，那末在与它相交的另一条直线上也截得相等的线段.

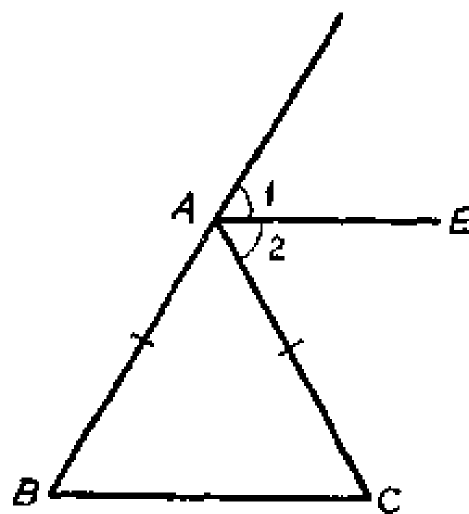
习　　题

1.为了检验房梁是否水平，常用一块顶角系一个重锤的等腰三角板，立在屋梁上（如图）.如果系重锤的线经过底边的中点，就说明房梁是水平的，这是根据什么道理？

2.证明等腰三角形顶角的外角平分线平行于底边.



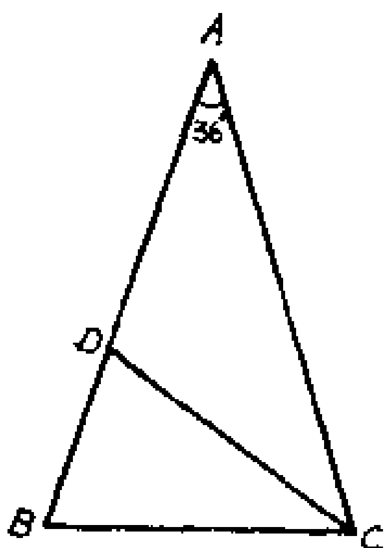
（第 1 题）



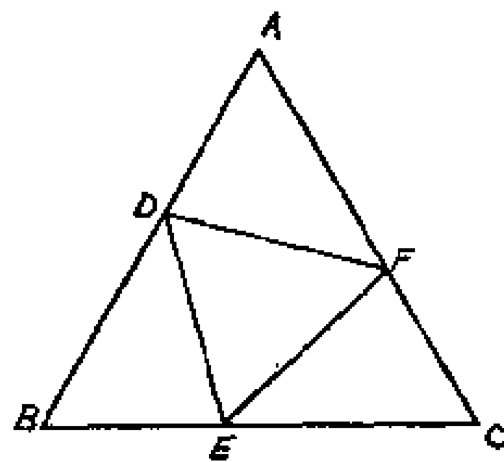
（第 2 题）

3.如图，在等腰三角形ABC中，顶角A是36°，CD平分$\angle BCA$，求证$\triangle BCD$也是等腰三角形.

4.如图，$\triangle ABC$是等边三角形，且$AD=BE=CF$，求证$\triangle DEF$也是等边三角形.



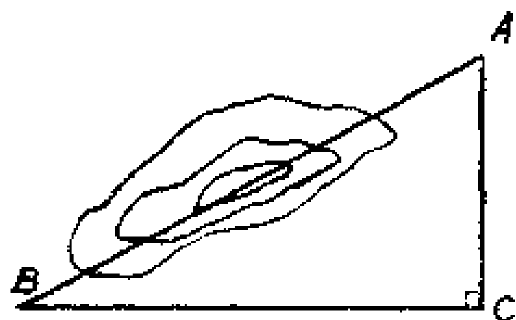
（第 3 题）



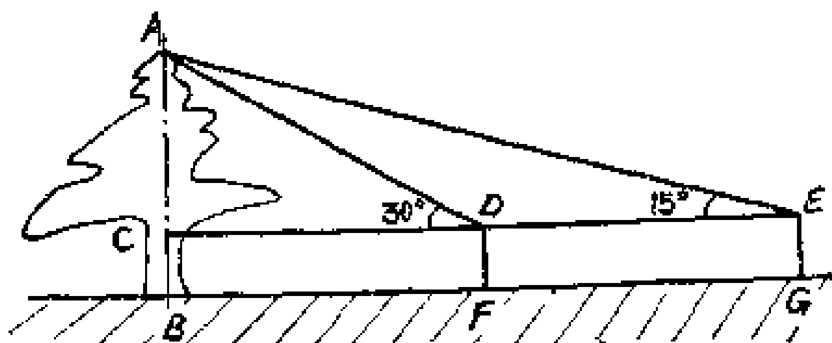
（第 4 题）

5.如图，测得$\angle BAC=60^{\circ}$，$AC\perp BC$，$AC=3.3$米，求池塘的长AB.

6.如图，要测树高AB，可先在地面找一点G，使$\angle AEC=15^{\circ}$，再在BG方向上选一点F，使$\angle ADC=30^{\circ}$.若量出FG的长和EG的高分别为16米和1.35米，求树高.



（第5题）



（第6题）

7.直角三角形ABC的三条边分别记为a，b，c，根据勾股定理，求出未知边并填入表内：

直角边 a		16	5	8	0.3
直角边 b	3		12		0.4
斜边 c	5	20		17	

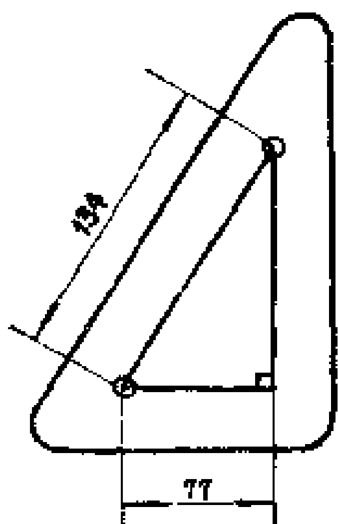
8.已知$\triangle ABC$为直角三角形，$\angle C=90^{\circ}$，$\angle B=45^{\circ}$，$AC=5$厘米，求BC，AB.

9.设一直角三角形的一个锐角为60°，它所对的直角边长为3厘米，求其余两边之长.

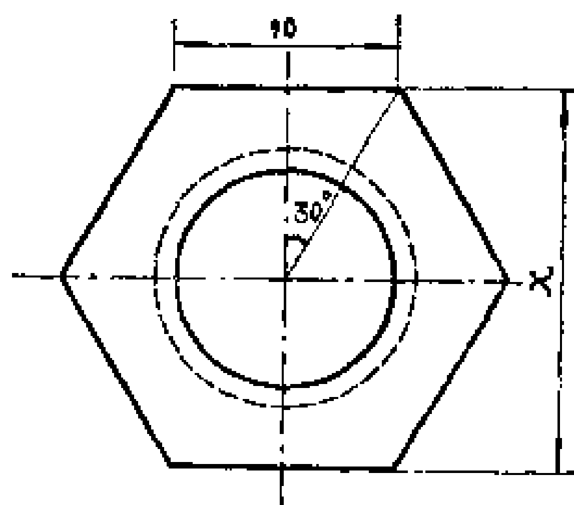
10.已知两个直角形的斜边和一直角边分别对应相等，试证这两个直角三角形全等.

11.某机械零件尺寸如图所示，其两孔中心距离为134毫米，水平距离为77毫米，求两孔间的垂直距离.

12.已知六角螺母的边长为10毫米，求对边间的距离.



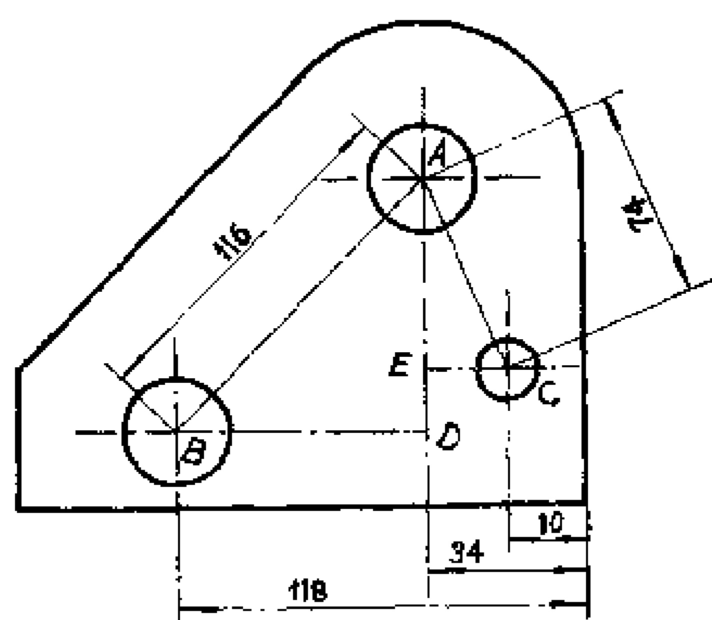
（第11题）

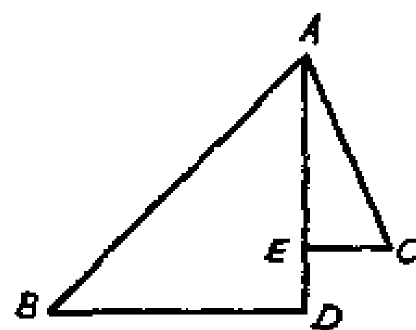


（第12题）

13.求边长为a的等边三角形的高和面积.

14.镗工在镗如图所示的箱壳侧面的孔时，工作台和主轴箱移动的距离BD，EC及AE，ED各是多少？





（第14题）

15.已知 $ABCD$ 为一平行四边形（参看图6—47），即$AB /\!/ DC$，$AD /\!/ BC$，它的两条对角线AC和BD相交于O点，求证：$AO=OC$，$DO=OB$.

16.在一个四边形中，已知两组对边分别相等，求证：这个四边形是平行四边形.

17.在一个四边形中，已知一组对边平行，并且相等，求证：这个四边形是平行四边形.

第五节　相似三角形

在日常生活和生产实践中，我们经常遇到形状相同、大小不同的图形.例如，原来的照片和放大后的照片；比例不同的两张中国地图；用不同比例绘制的同一个烟囱风帽的视图（图6—49）等.观察这些图形，可以知道，在每组图形中，其中一个图形可由另一图形按比例放大（或缩小）而得到．我们把这样一些形状相同、大小不同的图形叫做相似形.

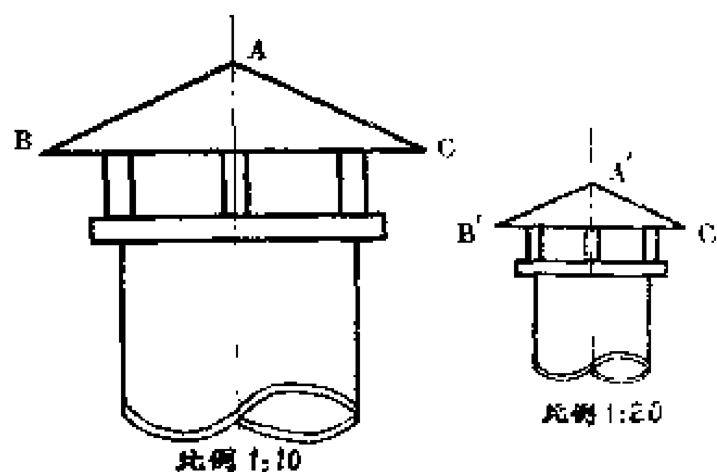


图6—49

相似形的种类很多，本节主要介绍相似三角形．下面，先介绍成比例的线段的知识.

一、成比例的线段

在图6—49中，所注的“1∶10”和“1∶20”，是指图纸上线段的长度与实物上对应线段的长度之比．我们把两条线段长度之比简称为两条线段之比.

现在我们考察图6—49中$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$．经过测量得$AB=16$毫米，$BC=30$毫米，$A'B'=8$毫米，$B'C'=15$毫米．于是线段AB与线段$A'B'$之比

$$AB:A'B'=16:8=\frac{16}{8}=2，$$

线段BC与线段$B'C'$之比

$$BC:B'C'=30:15=\frac{30}{15}=2.$$

比较以上的两个式子，就会发现：线段AB与线段$A'B'$之比等于线段BC与线段$B'C'$之

比，即

$$AB:A'B'=BC:B'C'.$$

满足这个关系式的四条线段叫做成比例的线段.

上面的关系式叫做比例式，简称比例.比例式一般地可表示为

$$a:b=c:d,$$

a和d叫做比例的外项，b和c叫做比例的内项.比例式也可以写成

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d},$$

两端同乘bd，就有

$$ad=bc.$$

于是，我们得到比例式的基本性质：

性质 比例式的两内项之积等于两外项之积.

根据这个性质，我们知道：在比例式中已知任意三项，就可以求出另外一项.

例1 设$2:3=x:18$，求未知数x.

解：由比例式的基本性质，得

$$3x=36.$$

这是一个一元一次方程，显然

$$x=12.$$

例2 在比例尺是1:35000000的地图上，量得北京到井冈山的距离是4.2厘米，求北京到井冈山的实际距离.

解：设北京到井冈山的实际距离是x，依题意

$$1:35000000=4.2:x,$$

$$\therefore \quad x=4.2\times 35000000$$

$$=147000000(\text{厘米}).$$

即 $$x=1470\ (\text{公里}).$$

答：北京到井冈山的距离是1470公里.

二、相似三角形的判定

形状相同的图形之间具有哪些内在联系呢？为了弄清这个问题，我们把图6—49中的两个三角形抽出来作比较，不难看出，这两个三角形$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$有以下联系：

(1) $\angle A=\angle A'$，$\angle B=\angle B'$，$\angle C=\angle C'$；

(2) $AB=2A'B'$，$BC=2B'C'$，$AC=2A'C'$，

即 $$\frac{AB}{A'B'}=\frac{BC}{B'C'}=\frac{AC}{A'C'}=2.$$

这就是说，形状相同的两个三角形，实质上就是三个角都对应相等，三条边都对应成比例的两个三角形.这里，我们把彼此相等的角叫做对应角，对应角所对的边叫做对应边.

一般地，如果两个三角形的对应角都相等，对应边都成比例，那末这两个三角形叫做相似三角形.

相似用记号"∽"表示，读作"相似于".如在图 6—50中，$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$相似，就记作$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$.

相似三角形对应边的比叫做相似比.很明显，当两个相似三角形的相似比等于1时，这两个三角形就是全等三角形，可见全等三角形不过是相似三角形的一种特殊情况.

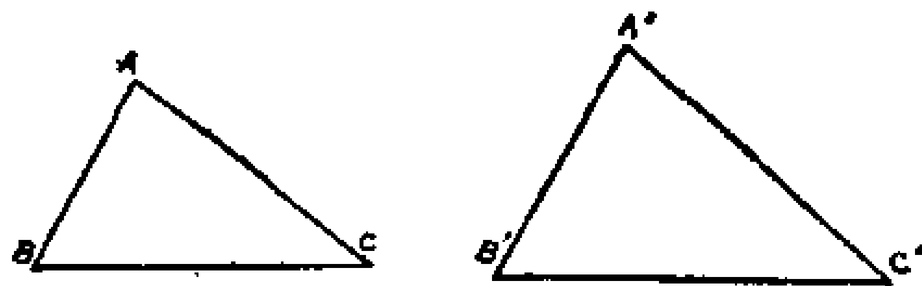


图 6—50

在绘图、测量和计算等工作中，经常要用到相似三角形的性质，因此必须掌握判定两个三角形相似的方法.判定两个三角形相似和判定两个三角形全等相仿，并不一定要知道所有的对应角都相等，对应边都成比例，只要知道某些边、角的对应关系就够了.

判定定理1 如果一个三角形的两个角和另一个三角形的两个角对应相等，那末这两个三角形相似.

证明从略.

根据判定定理1，在$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$中（图 6—50），如果

$$\angle A=\angle A',\ \angle B=\angle B',$$

那末，就有

$$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'.$$

由判定定理1，可得到一个很有用的推论:

推论 平行于三角形的一边并且和其他两边相交的直线，截得的三角形和原三角形相似.

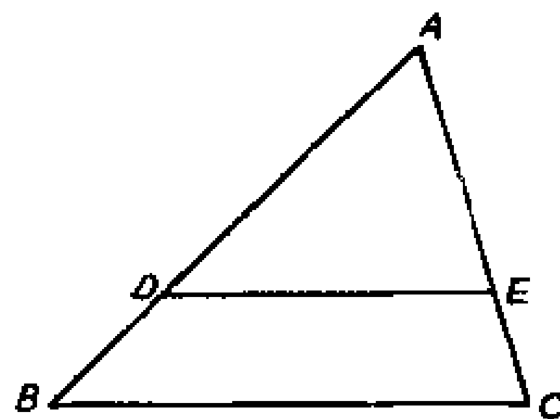


图 6—51

已知：在$\triangle ABC$中$DE\parallel BC$（图 6—51）.

求证：$\triangle ADE\backsim\triangle ABC$.

证明：$\because$ $\angle A=\angle A$，（公共角）

又 $\because$ $\angle ADE=\angle B$，（两直线平行，同位角相等）

$\therefore$ $\triangle ADE\backsim\triangle ABC$.（判定定理1）

除判定定理1外，我们还有两个判定定理:

判定定理2 如果一个三角形的两条边和另一个三角形的两条边对应成比例，并且夹角相等，那末，这两个三角形相似.

判定定理3 如果一个三角形的三条边和另一个三角形的三条边对应成比例，那末，这两个三角形相似.

判定定理2和判定定理3的证明从略.

在上述三个判定定理中，以判定定理1及其推论用得最多，因而也最重要.

例1 证明两相似三角形对应角的平分线之比等于对应边之比.

已知：$\triangle ABC\backsim\triangle A'B'C'$，$AD$平分$\angle BAC$，$A'D'$平分$\angle B'A'C'$（图 6—52）.

求证：$\frac{AD}{A'D'}=\frac{AB}{A'B'}$.

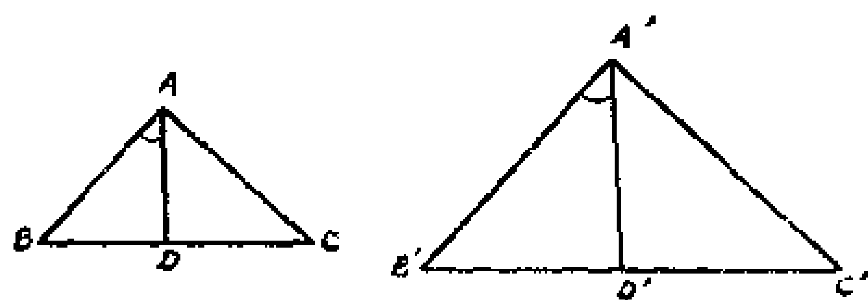


图 6—52

证明： ∵ $\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，（已知）

∴ $\angle BAC=\angle B'A'C'$，（相似三角形对应角相等）

∴ $\angle BAD=\angle B'A'D'$，（AD 平分$\angle BAC$，$A'D'$ 平分$\angle B'A'C'$）

又 ∵ $\angle B=\angle B'$，（相似三角形对应角相等）

∴ $\triangle ABD \backsim \triangle A'B'D'$.（判定定理 1）

∴ $\frac{AD}{A'D'}=\frac{AB}{A'B'}$.（相似三角形对应边成比例）

除此之外，我们还可以证明相似三角形的对应中线之比，对应高之比都等于对应边之比.概括起来就是：相似三角形的对应线段都成比例.

例 2 工人师傅用交叉卡钳测量内孔直径AB（图 6—53），卡尺AD和BC等长．已知$\frac{CO}{BO}=\frac{DO}{AO}=\frac{5}{4}$，并量得$CD=20$毫米，求内孔直径.

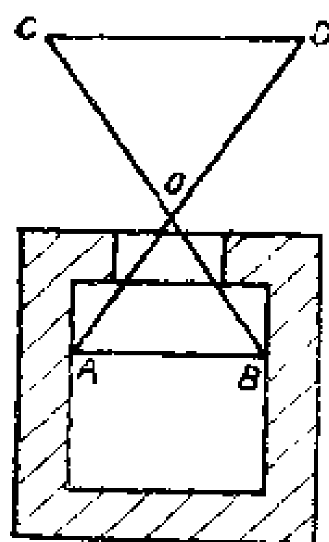


图 6—53

解： 在交叉卡钳形成的$\triangle COD$和$\triangle BOA$中，

∵ $\angle COD=\angle BOA$,（对顶角相等）

又 ∵ $\frac{CO}{BO}=\frac{DO}{AO}$.（已知）

∴ $\triangle COD \backsim \triangle BOA$.（判定定理 2）

∴ $\frac{CD}{AB}=\frac{CO}{BO}=\frac{5}{4}$.（相似三角形对应边成比例）

得 $AB=\frac{4}{5}CD=\frac{4}{5}\times 20=16$（毫米）.

答： 工件内孔直径为16毫米.

通过这个例子，我们可以看出，应用相似三角形解决实际问题的思路是：先根据已知条件，利用相似三角形判定定理，证明两三角形相似，再根据需要，利用相似三角形对应线段成比例的性质，列出计算式子，算出所需结果.

例 3 用腕测法测量水塔的高AB（图 6—54）：拿一根直尺，把手臂水平伸直，使直尺和水塔平行，这时用一只眼睛看到直尺上一段CD恰好遮住水塔，已知CD的长度为12厘米，测者到水塔的距离OE为84米，臂长OF约为60厘米，求水塔的高AB.

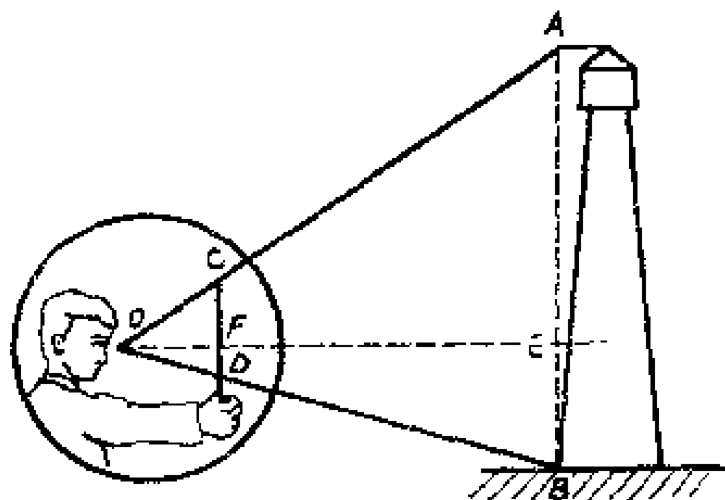


图 6—54

解： ∵ $AB /\!/ CD$,

∴ $\triangle OAB \backsim \triangle OCD$,（判定定理 1 的推论）

$\therefore \quad \dfrac{OE}{OF}=\dfrac{AB}{CD}$，（相似三角形对应高之比等于对应边之比）

即 $\quad \dfrac{84}{0.6}=\dfrac{AB}{0.12}$，

于是 $\quad AB=\dfrac{0.12\times 84}{0.6}=16.8$（米）。

答：水塔的高AB约为16.8米。

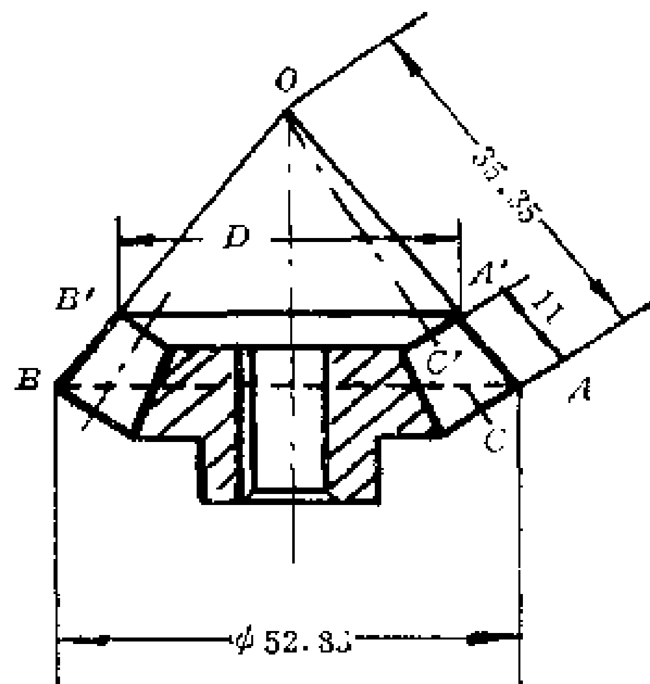


图6—55

例4 有一伞齿轮（图6—55）大端外径是52.83毫米，节锥半径是35.35毫米，齿宽是11毫米，求小端外径D。

解：$\because \quad A'B' \parallel AB$，

$\therefore \quad \triangle OA'B' \backsim \triangle OAB$，

$\therefore \quad \dfrac{OA}{OA'}=\dfrac{AB}{A'B'}$。 （1）

又 $\quad \because \quad AC \parallel A'C'$，

$\therefore \quad \triangle OAC \backsim \triangle OA'C'$，

$\therefore \quad \dfrac{OA}{OA'}=\dfrac{OC}{OC'}$。 （2）

由（1）、（2）得 $\quad \dfrac{OC}{OC'}=\dfrac{AB}{A'B'}$。

而 $\quad OC'=OC-CC'$

$=35.35-11=24.35$（毫米），

$\therefore \quad \dfrac{35.35}{24.35}=\dfrac{52.83}{D}$，

$D=\dfrac{24.35\times 52.83}{35.35}=35.59$（毫米）。

答：伞齿轮的小端外径是35.59毫米。

习 题

1.求下列比例式中的未知数x：

（1）$36:14=x:7$； （2）$\dfrac{x}{30}=\dfrac{7}{10}$；

（3）$\dfrac{1}{2}:\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{4}:x$； （4）$\dfrac{a+b}{b}=\dfrac{2x}{c}$；

（5）$\dfrac{x}{5}=\dfrac{4+x}{6}$； （6）$\dfrac{\frac{3}{2}+x}{4}=\dfrac{x-1}{5}$。

2.已知图纸上注明比例是 1∶2，量得图纸上一线段的长是10厘米，求实物上对应线段的尺寸.

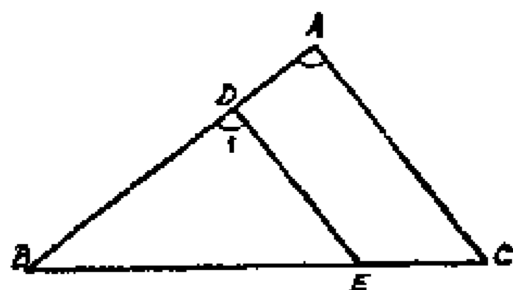
3.台湾是我国神圣不可侵犯的领土，我们一定要解放台湾！在比例为 1∶15000000 的地图上，量得台湾海峡最窄的宽度为 1 厘米，求实际宽度.

4.根据记录，每升高800米，温度下降5.2°C，问 10000 米高空上比地面温度低多少度.

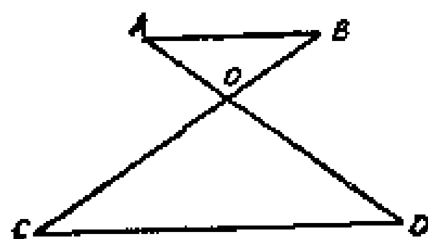
5.有一块矩形钢板，长150厘米，宽50厘米，现在要画一个按比例缩小的图形，图形的长取30厘米，问图形的宽应为多少厘米？

6.如图，$\triangle ABC \backsim \triangle DBE$，其中$\angle A=\angle 1$，指出它们所有的对应角和对应边.

7.如图，$\triangle ABO \backsim \triangle DCO$，$OB$和$OC$是对应边，指出它们所有的对应角和对应边.



（第 6 题）



（第 7 题）

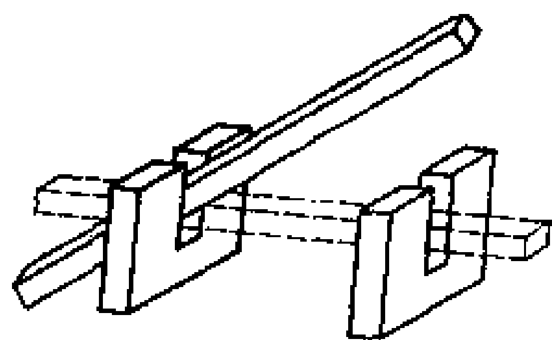
8.（1）所有的等边三角形都相似吗？为什么？

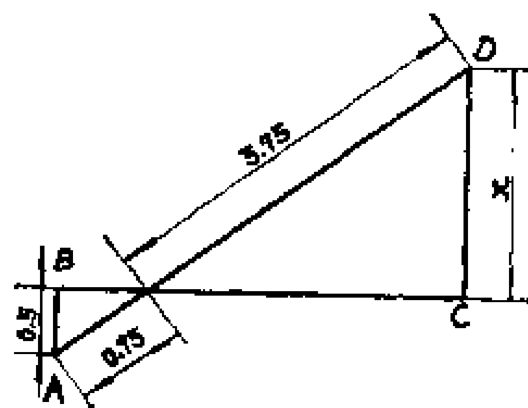
（2）所有的等腰三角形都相似吗？为什么？

（3）所有的等腰直角三角形都相似吗？为什么？

9.已知$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$，$AB=40$毫米，$BC=50$毫米，$CA=60$毫米，$\triangle A'B'C'$中最短的边$A'B'=30$毫米，求其余两边之长.

10.如图，已知杠杆的短臂是0.75米，长臂是3.75米.当短臂的端点下降0.5米时，问长臂的端点上升多少米？

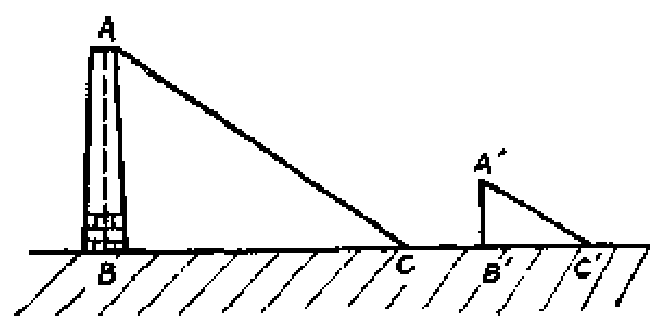




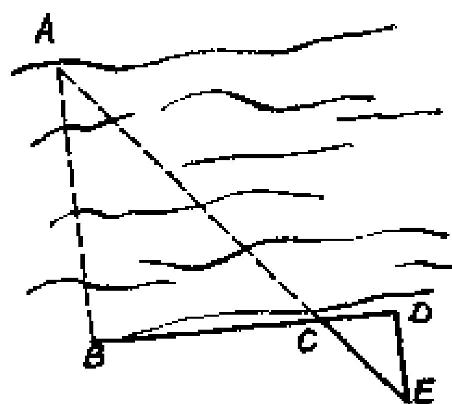
（第10题）

11.要测量烟囱的高AB，在它的附近立一根2.5 米高的标杆 $A'B'$，测出标杆的影长$B'C'$是4米，同时测出烟囱的影长BC是56米，求烟囱的高AB.

12.要测量河宽AB（如图），从B点沿着和AB 垂直的方向走100步到C点插一标杆，又走20步到D点，转一直角再走32步到E点，这时E、C、A三点恰好在一条直线上，求河宽多少米？（每步按0.75米计算.）



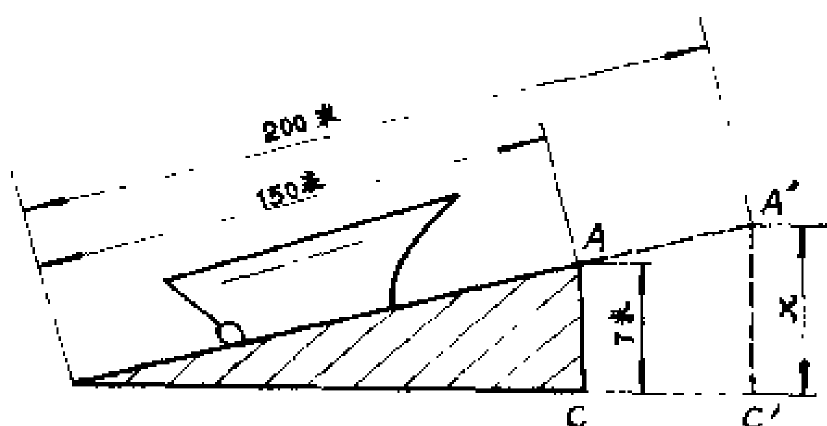
（第11题）



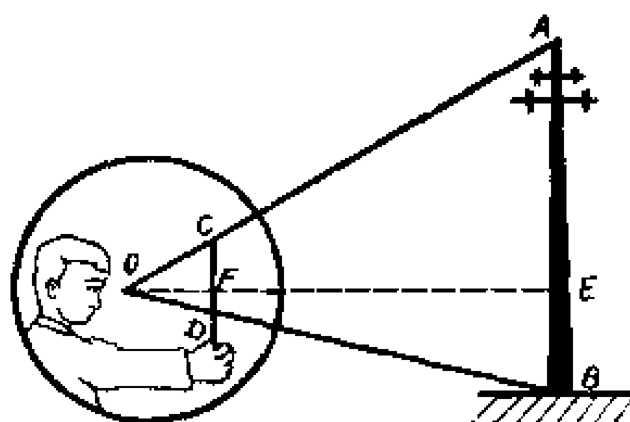
（第12题）

13.某船厂轮船下水时的滑道如图所示，它的全长是150米，高是7米，为了适应生产发展的需要，要把原来滑道的长扩建成200米，求扩建后的高度.

14.用腕测法测电线杆高（如图），OE为水平线，$OE\perp CD$，垂足为F，$OE\perp AB$，目测者到电线杆的距离$OE=42$米，臂长$OF=60$厘米，视线OA与OB之间的尺长$CD=12$厘米，求电线杆的高AB.



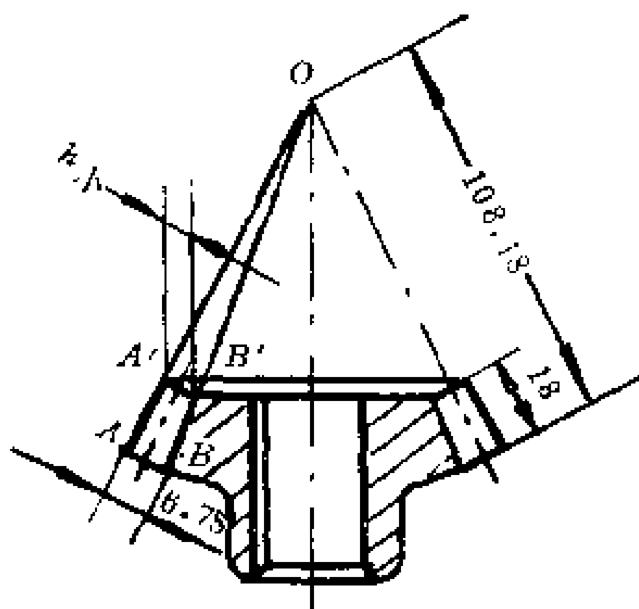
（第13题）



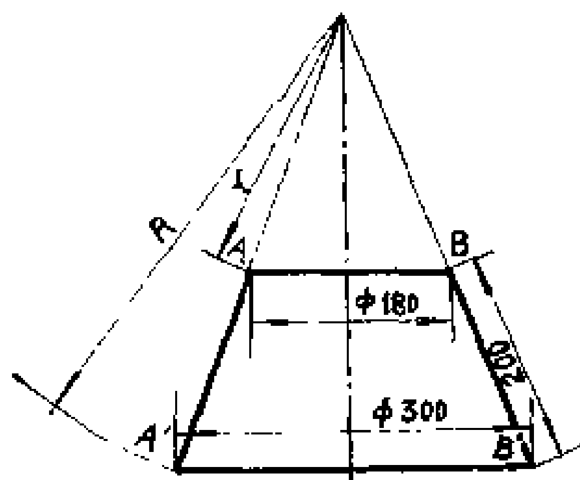
（第14题）

15.一伞齿轮节锥半径是108.18毫米，齿宽是18毫米，大端齿高是6.75毫米，求小端齿高$h_{小}$.

16.一圆台的上底直径为180毫米，下底直径为300毫米，斜高为200毫米，求侧面展开后，大小圆弧的半径R和r.



（第15题）



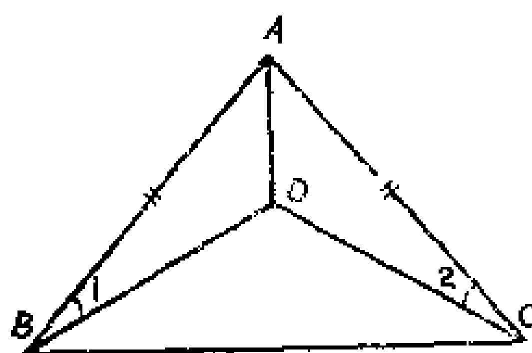
（第16题）

复 习 题

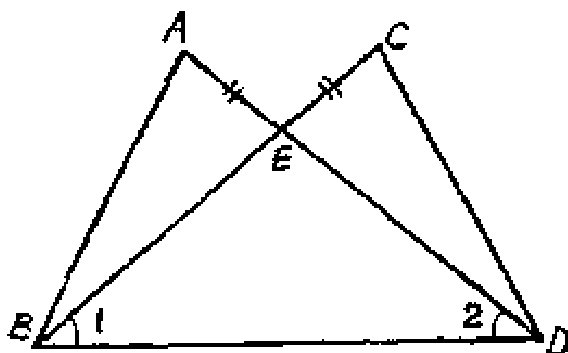
1. 如图，已知$AB=AC$，$\angle 1=\angle 2$，求证：$\angle ADB=\angle ADC$。

2. 如图，已知$\angle 1=\angle 2$，$AE=CE$，求证：$AB=CD$。

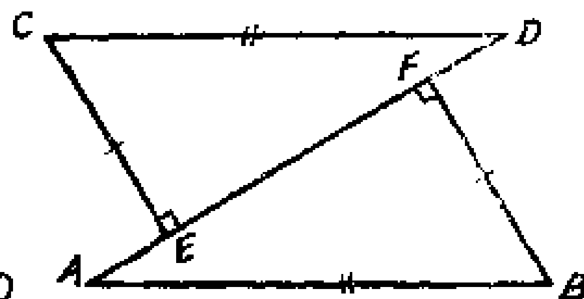
3. 如图，已知$BF\perp AD$，$CE\perp AD$，$BF=CE$，$AB=CD$，求证：$AE=DF$。



（第1题）



（第2题）



（第3题）

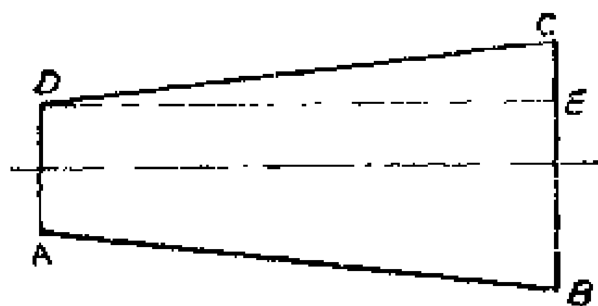
4. 证明角的平分线上任意一点到角的两边的距离相等。

5. 证明线段的垂直平分线上任意一点到线段两端的距离相等。

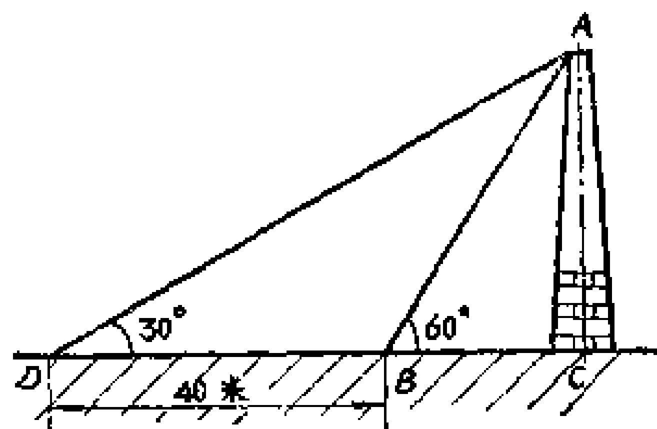
6. 等腰直角三角形一腰是200毫米，求斜边的长。

7. 如图，已知圆锥形工件的小头直径$AD=12$毫米，大头直径$BC=28$毫米，长$DE=96$毫米。求它的斜边AB的长。

8. 如图，在B点测烟囱，得$\angle ABC=60°$；在D点测得$\angle ADC=30°$，量得$BD=40$米。求烟囱高AC。



（第7题）



（第8题）

9. 如图，在$\triangle ABC$中，已知$\angle C=90°$，$B'C'\parallel BC$。求证：

$$\frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{AB'};\qquad \frac{AC}{AB}=\frac{AC'}{AB'};\qquad \frac{BC}{AC}=\frac{B'C'}{AC'}.$$

10. 如图，已知$AB\parallel A'B'$。

（1）若$BO:OB'=1:2$，$A'B'=5$厘米，求$AB=$？

（2）若$BO=2$厘米，$BB'=5.5$厘米，$AB=4$厘米，求$A'B'=$？

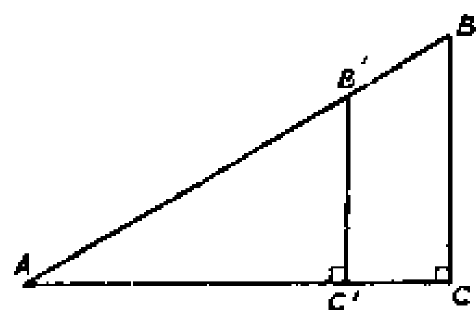
11. 木屋架的结构如图所示，中间等距离地设置五根直腹杆，已知木屋架跨度是12米，高度是3米，求其他四根直腹杆的长度。

12、在直角三角形ABC中，$\angle C=90°$，$CD\perp AB$，求证：

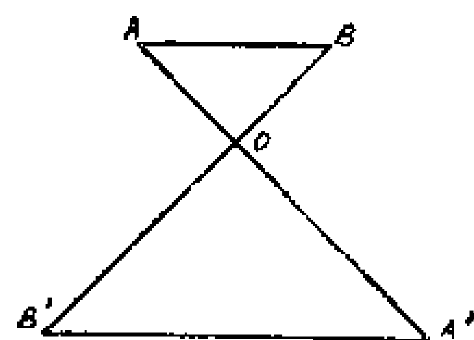
（1）$AC^2=AB\cdot AD$；

（2）$BC^2=AB\cdot DB$；

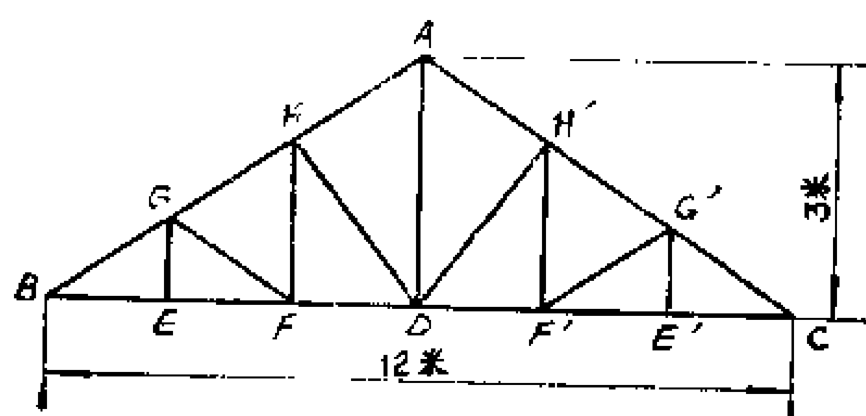
（3）$AC^2+BC^2=AB^2$。



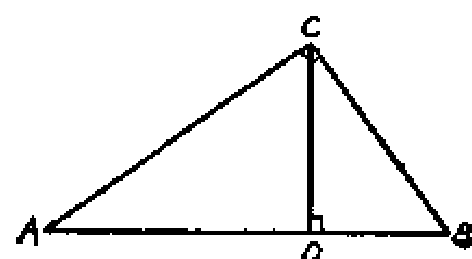
（第9题）



（第10题）



（第11题）



（第12题）

第七章　圆

第一节　圆的性质

一、圆的一般概念

圆是常见的一种曲线图形．圆的特点是：圆上任何一点到一个定点的距离是一个定长．定点叫做圆心，常用O点表示．圆心在O点的圆记作“$\odot O$”．连接圆心和圆上任何一点的线段叫做半径，常用R或r表示〔图7—1(1)〕．

由圆的特点知道：确定了圆心的位置和半径的长短，圆的位置和大小也就完全确定了．

两个半径相等的圆，只要把圆心重合在一起，这两个圆就完全重合，所以半径相等的圆叫做等圆．

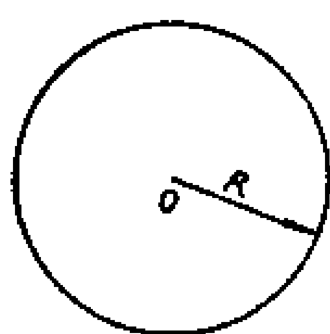
连接圆上任意两点的线段叫做弦，经过圆心的弦叫做直径．如图7—1(2)中EF是弦，AB是直径．直径常用D、d或ϕ表示．显然，直径等于半径的两倍．

圆的直径把圆分成相等的两部分，每一部分叫做半圆．

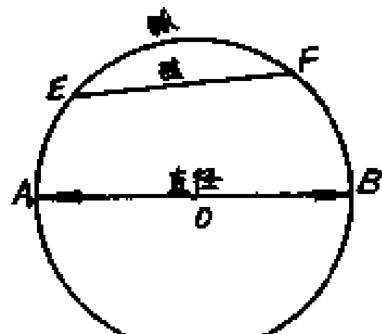
圆上任意两点间的部分叫做圆弧、简称弧．图7—1(2)中以E、F为端点的弧记作“$\overset{\frown}{EF}$”，读“EF弧”．通常说的弧是指小于半圆的弧，叫做劣弧．

容易看出，在同圆或等圆中，等弦对等弧，等弧对等弦．

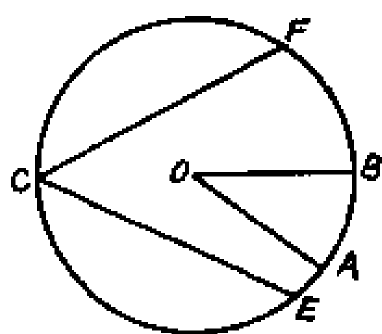
顶点在圆心的角叫做圆心角，如图7—1(3)中的$\angle AOB$．顶点在圆周上，两边与圆周相交的角叫做圆周角，如图7—1(3)中的$\angle ECF$．



(1)



(2)



(3)

图7—1

从图7—2中可以看出，如果$\angle AOB=\angle EOF$，就有$\triangle OAB\cong\triangle OEF$，从而弦$AB$＝弦$EF$；反之，如果弦$AB$＝弦$EF$，也可推得$\angle AOB=\angle EOF$．这样，我们得到下面的结论：

在同圆或等圆中，等圆心角对等弦（或等弧）；反之也成立．

例　一圆形工件有5个孔，沿圆周均匀分布，试计算相邻两孔的中心与圆心连线之间的夹角α是多少度（图7—3）．

解： 夹角α是圆心角．因为等弧对等圆心角，所以这5个圆心角相等，故有

$$5\alpha=360°,$$

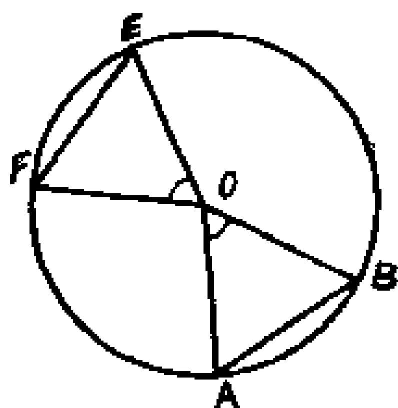


图 7—2

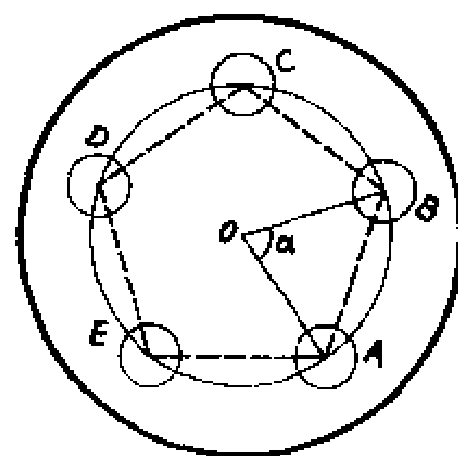


图 7—3

$$\therefore \quad \alpha = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ.$$

在生产实践中，常常要求把圆周分成若干等分，等分圆周的方法一般有两种：

（1）等分圆心角法：先算出每等分的圆弧所对的圆心角的度数（如上例），再用量角器以圆心为端点逐次画出各等分射线，这些射线和圆周的交点便把圆周等分成若干分．

铣工师傅用分度头等分圆周，就是根据这个道理．

（2）等弦法：先算出每等分的圆弧所对的弦长（其方法将在下章介绍），再使圆规（或两脚规）两脚尖间的距离等于弦长，并用它在圆周上逐次画出各分点，这些分点就把圆周分成若干等分．

二、圆的性质

我们知道，当圆心的位置和半径的长短确定之后，圆也就确定了．但是怎样确定一个圆的圆心位置和半径的长短呢？这是生产中常常需要解决的问题．比如有一个残缺不全的皮带轮，如何求出它的半径，以便重新配制一个呢？又如，在一个圆形（或圆弧形）工件上，如何定出圆心的位置，以便划线呢？为了解决这些问题，我们有必要对圆的性质作进一步的研究．为此，先介绍弦的性质．

定理 弦的垂直平分线必经过圆心．

已知：AB是$\odot O$的一条弦．

求证：圆心O在AB的垂直平分线上．

证明： 过圆心O作$EF\perp AB$，交AB与C点（图 7—4），连接OA，OB．

$\because \quad OA=OB$，

$\therefore \quad \triangle OAB$是等腰三角形．

于是OC是等腰三角形底边AB上的高．

因为等腰三角形底边上的高就是底边上的中线．

$\therefore \quad AC=CB$．

所以EF是AB的垂直平分线，即圆心O在AB的垂直平分线上．

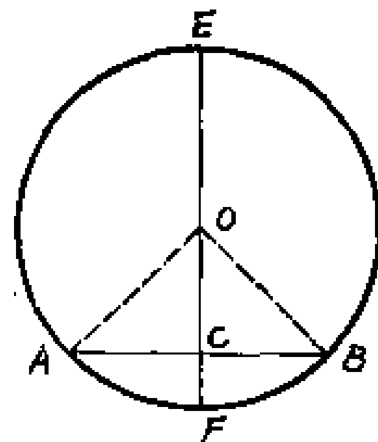


图 7—4

例 1 工人师傅常利用这个性质找圆弧的圆心（三点定圆法），其方法为：

（1）在圆弧上任取三个点A、B、C，

（2）连结AB和BC，并作它们的垂直平分线EF、GH，

（3）EF和GH的交点O就是所求的圆心（图7—5）.

由这个例题，可以得到下述的结论：

经过不在同一直线上的三个点，可以作一个圆.

我们还可以证明：这种圆只有一个.

例2 测得残缺圆轮的弦AB长为320毫米，矢高CD为46.2毫米，求圆轮的直径（图7—6）.

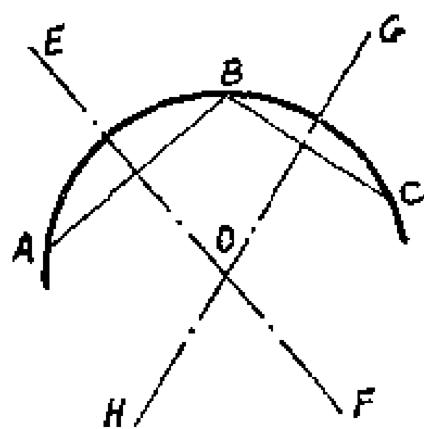


图7—5

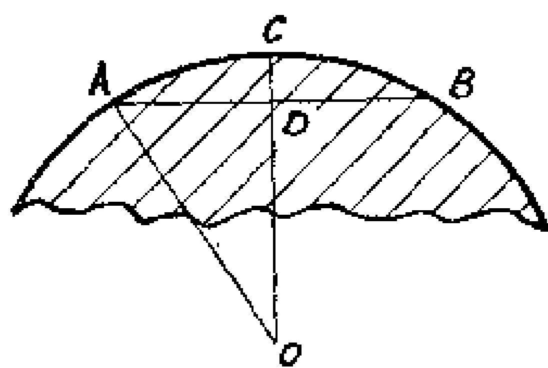


图7—6

解： 矢高CD是指弦AB的垂直平分线介于弦与对弧间的线段长，所以它所在的直线必经过圆心O.

设圆轮半径为R，在直角$\triangle ADO$中，

$\because$ $AD=\frac{1}{2}AB=\frac{1}{2}\times 320=160$,

$OD=OC-DC=R-46.2$,

$\therefore$ $R^2=(R-46.2)^2+160^2$，（勾股定理）

即 $R^2=R^2-92.4R+2134.44+25600$,

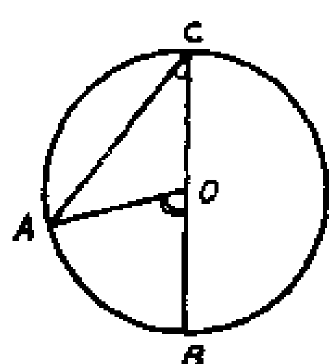
$\therefore$ $R\approx 300$.

因此，圆轮的直径约为600毫米.

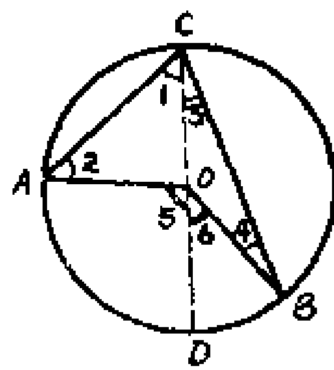
上面我们介绍了弦的性质，现在介绍圆周角的性质.

定理 圆周角等于它所对的弧上的圆心角的一半.

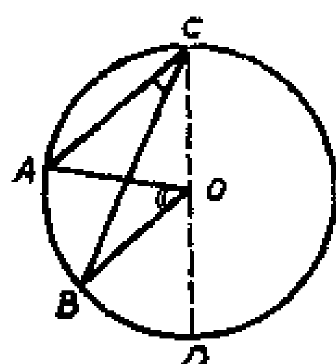
已知：$\angle ACB$是$\odot O$的圆周角，$\overset{\frown}{AB}$是它所对的弧，$\angle AOB$是$\overset{\frown}{AB}$上的圆心角（图7—7）.



（1）



（2）



（3）

图7—7

求证：　$\angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB$.

圆周角和它所对的弧上的圆心角之间的位置关系，可分三种情况：

(1) 圆心在$\angle ACB$的一条边上〔图 7—7 (1)〕;

(2) 圆心在$\angle ACB$内〔图 7—7 (2)〕;

(3) 圆心在$\angle ACB$外〔图 7—7 (3)〕.

这里仅就第二种情况对定理进行证明，至于其它两种情况下定理的证明，留给学员自己完成.

证明：　〔见图 7—7 (2)〕.

作直径CD,

∵　$\triangle AOC$是等腰三角形,

∴　$\angle 1=\angle 2$,　　　（等腰三角形的性质）

∴　$\angle 5=\angle 1+\angle 2=2\angle 1$.　　　（三角形外角的性质）

同理可证　$\angle 6=2\angle 3$,

∴　$\angle 5+\angle 6=2(\angle 1+\angle 3)$,

即　$\angle AOB=2\angle ACB$,

$\angle ACB=\frac{1}{2}\angle AOB$.

由上述定理很容易推出下面的两个推论：

推论 1　在同圆中，同弧（或等弦）所对的圆周角相等.

如在图 7—8 中，$\overset{\frown}{AB}$所对的圆周角$\angle C_1=\angle C_2=\angle C_3$.

推论 2　直径所对的圆周角是直角；反之，若圆周角是直角，则它所对的弦必是直径.

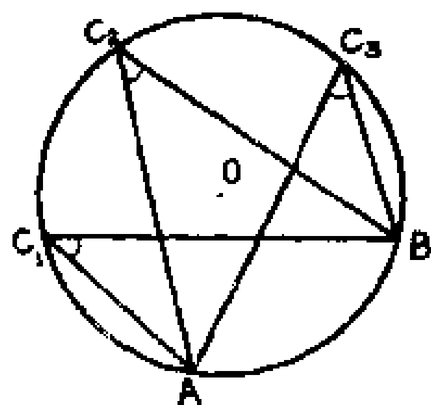


图 7—8

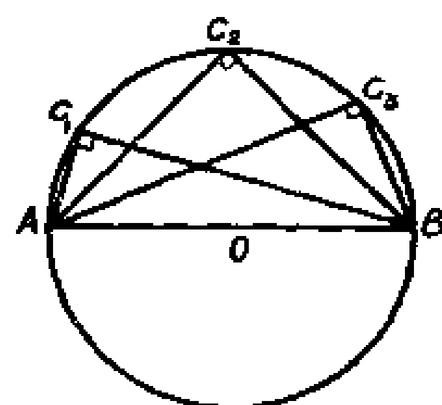


图 7—9

如在图 7—9 中，若AB为$\odot O$的直径，那末$\angle C_1=\angle C_2=\angle C_3=90°$；反之，若$\angle C_1=90°$，则$AB$必是$\odot O$的直径.

例 3　木工师傅经常用角尺找圆形工件的圆心（直径相交法），其方法见图 7—10：

(1) 将角尺的顶点紧靠圆形工件的边缘，得到角尺的两条直角边与工件边缘的两个交点A、B;

(2) 连结AB，它必是圆的一条直径（推论 2）；

(3) 用相同的方法，可得圆的另一条直径CD;

(4) AB和CD的交点O就是工件的圆心。

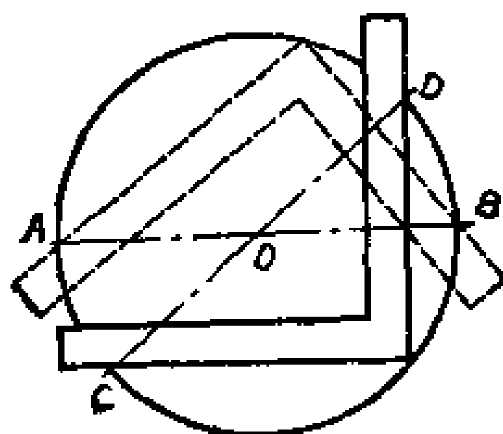


图 7—10

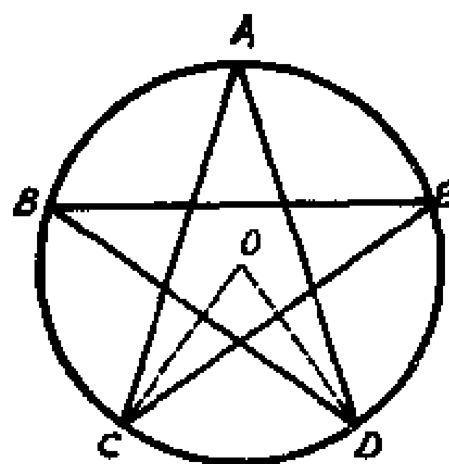


图 7—11

例 4　五角星的五个点都在同一个圆上（图7—11），并且

$$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{DE}=\overset{\frown}{EA},$$

求五角星的每个角的度数。

解： 五角星的五个顶点把圆周分成五等分．根据等弧所对的圆心角相等和圆周角的性质知道，五角星的五个顶角都相等．现在只计算$\angle A$．

$$\because\quad \angle COD=\frac{360^\circ}{5}=72^\circ,$$

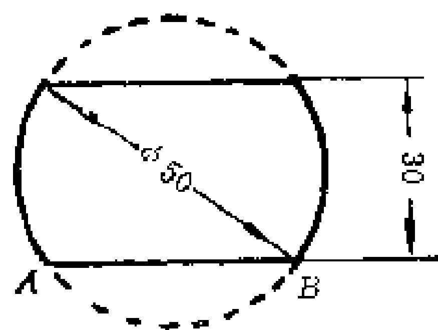
$$\therefore\quad \angle A=\frac{1}{2}\angle COD=36^\circ.$$

习　　题

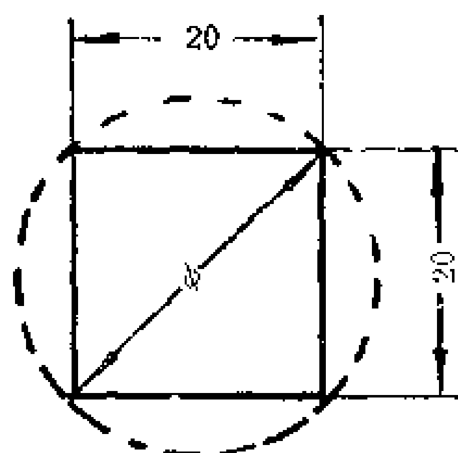
1．若干个圆孔均匀地分布在圆周上，试计算相邻两孔中心之间的圆弧所对的圆心角是多少度．设孔的数目分别为：(1) 6个；(2) 8个；(3) 18个．

2．如图，在一圆形材料上，上下铣去同样大小的弓形，成一扁平形零件，求弦AB的长．

3．直径ϕ为多少毫米的圆形材料，方能加工成边长为20毫米的正方形工件（如图）．



（第 2 题）



（第 3 题）

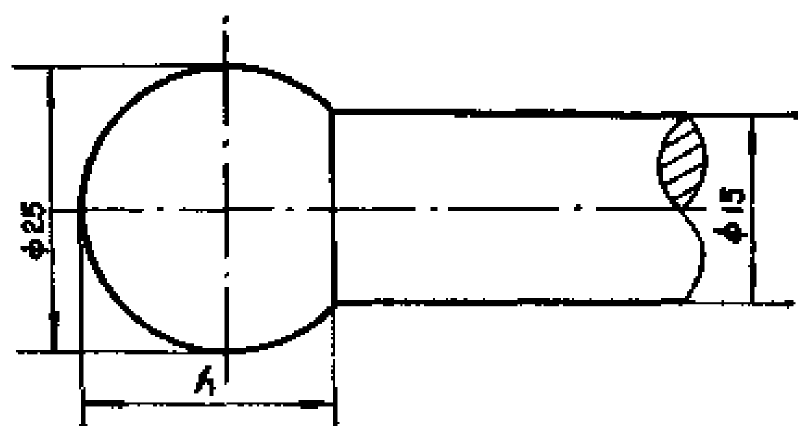
4.球头手柄的尺寸如图所示，求球头的长度$h=$?

5.计算下列各题（R表示半径，a表示弦长，b表示圆心到弦的距离）．

(1) 已知：$R=10$厘米，$b=6$厘米，求a；

(2) 已知：$a=8$厘米，$b=4$厘米，求R（精确到0.1厘米）；

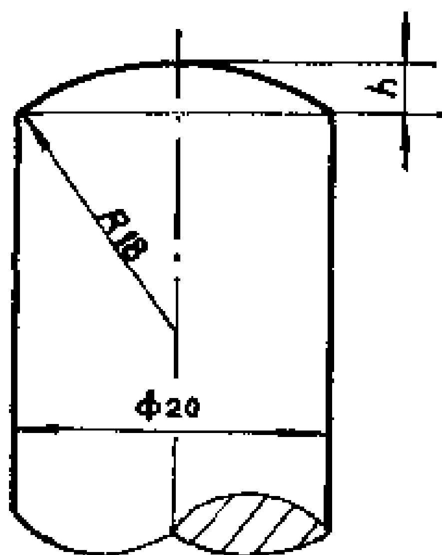
(3) 已知：$a=24$毫米，$R=24$毫米，求b（精确到0.1毫米）．



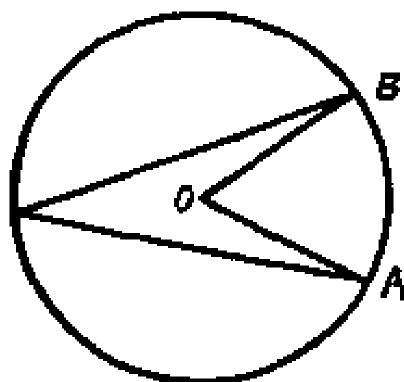
（第4题）

6.如图，轴的直径是20毫米，球头半径为18毫米，求球头部分的高度h（精确到0.01毫米）．

7.如图，在⊙O内弦AB的长等于半径长，求弦AB所对的圆心角和圆周角的度数．



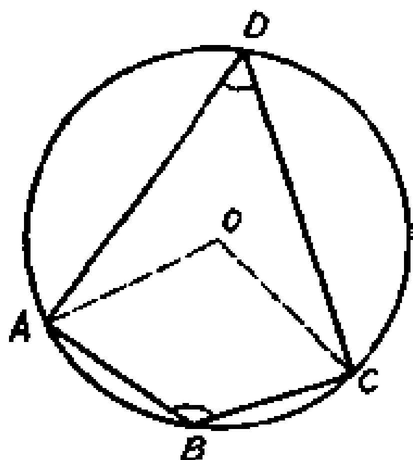
（第6题）



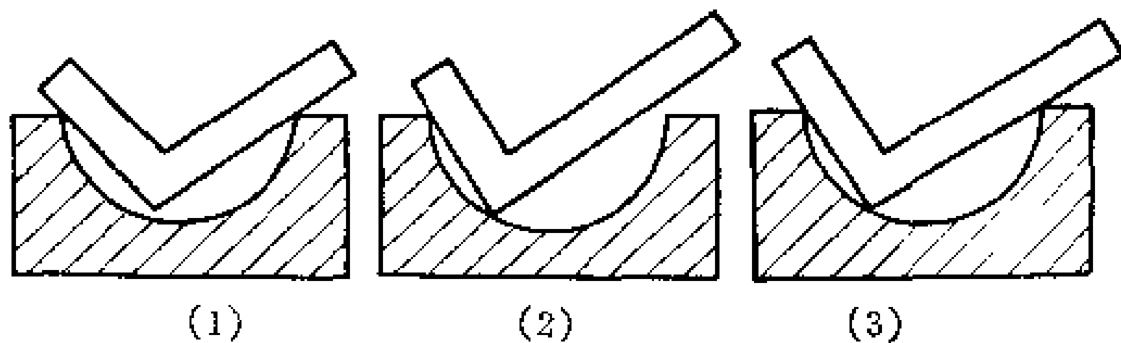
（第7题）

8.已知四边形$ABCD$的四个顶点在同一圆周上（这样的四边形叫做圆的内接四边形），求证这个四边形两组对角之和都是180°（见图）．

9.浇铸圆轴的模子由两个半圆形的槽合成．工人师傅用角尺检验半圆形的模子：把角尺的两边靠在模子的边缘上，来回滑动，观察角尺的顶点是否与圆弧接触．试说明图中三个模子哪一个是半圆形，为什么？



（第8题）



（第9题）

第二节 相 切

毛主席教导我们："**每一事物的运动都和它的周围其他事物互相联系着和互相影响着。**"在这一节中，我们研究圆和直线之间、圆和圆之间的相互位置关系，着重研究相切的问题．

一、直线和圆相切

在同一平面上的圆和直线之间，其相互位置关系，不外乎下列三种情况（图 7—12）：

（1）圆和直线不相交；

（2）圆和直线有两个交点，这时直线叫做圆的割线；

（3）圆和直线只有一个交点，这时直线叫做圆的切线．亦称圆和直线相切．它们的交点叫做切点．

图 7—12

圆和直线相切的情况在生活和生产实践中经常遇到．例如，火车的车轮与铁轨相切；用游标卡尺测量圆形工件外圆的直径时，卡尺的每一只脚与工件的外圆相切．

下面我们介绍切线的性质和切线的判定．

设直线l与$\odot O$相切，切点为A（图 7—13），显然，在圆心与l上各点的连线中，以OA为最短．所以，OA垂直于l．这样，我们便得到切线的一个重要性质：

定理 圆的切线垂直于过切点的半径．

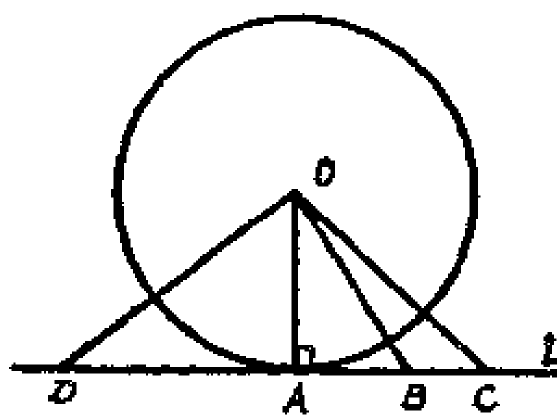


图 7—13

反之，若直线l经过半径OA的外端点A，且垂直于OA（图 7—13），那末，l上其余各点B、C、D……到O点的距离OB、OC、OD……都必大于OA，因而B、C、D……各点都在圆外，也就是直线l与圆只有一个公共点，所以直线l与圆相切．这样，我们得到判定圆的切线的法则．

判定定理 经过半径外端，并垂直于半径的直线是圆的切线．

切线的判定定理给我们指出了怎样过一点P作圆的切线的方法．

例 1 过$\odot O$上的一点P，作$\odot O$的切线（图 7—14）．

作法：（1）连结OP；

（2）过P作垂直于半径OP的直线l，l就是所求的切线．

例 2 过$\odot O$外的一点P，作$\odot O$的切线（图 7—15）．

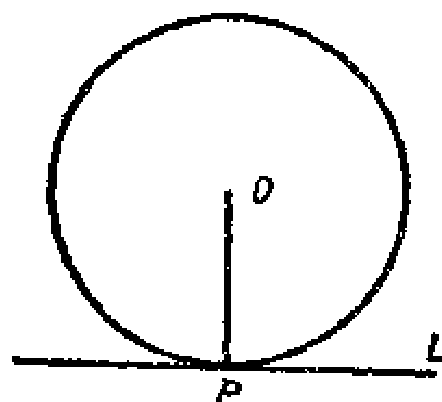


图 7—14

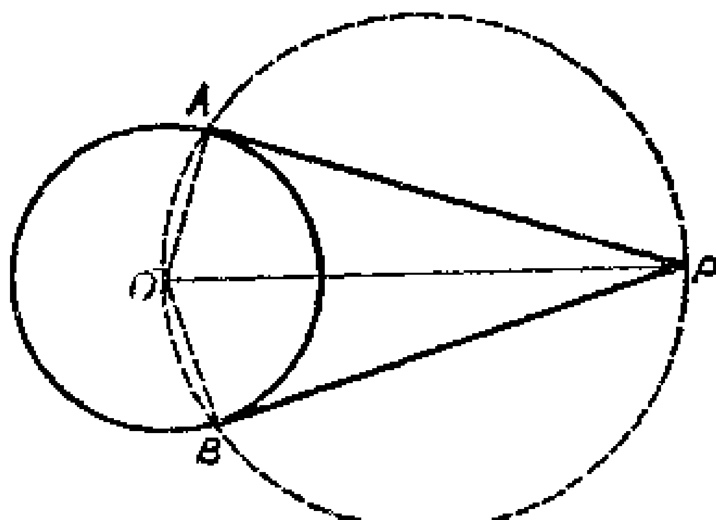


图 7—15

作法：（1）连结OP；

（2）以OP的中点为圆心，OP为直径作圆，交$\odot O$于A、B两点；

（3）连结PA、PB，PA、PB就是所求的切线.

证明： 连结OA、BO.

$\because$ $\angle OAP=\angle OBP=90°$，（直径所对的圆周角是直角）

$\therefore$ $PA\perp OA$，$PB\perp OB$，

$\therefore$ PA、PB是$\odot O$的切线.（切线的判定定理）

由这个例题可以知道，从圆外一定点可以作圆的两条切线，由定点到切点间线段的长叫做切线的长.

例3 试证从圆外一点所作的圆的两条切线的长相等.

已知：如图7—15，P为圆外一点，PA、PB是$\odot O$的两切线，A、B为切点，OP是P与圆心O的连线.

求证：$PA=PB$.

证明： 连接OA、OB，

$\because$ $\angle PAO=\angle PBO=90°$，（切线的性质）

又 $\because$ $OA=OB$，

$\therefore$ $PA=\sqrt{OP^2-OA^2}$

$=\sqrt{OP^2-OB^2}$

$=PB$. （勾股定理）

从上面这个例题还可证明$\angle APO=\angle BPO$，所以P点和圆心O的连线平分从P点所作两切线的夹角.

反之，从圆外一点所作圆的两条切线，其夹角的平分线必经过圆心.

工厂里用以找圆心的一种工具叫做“中心规”（图7—16），就是根据上面的结论制造的.中心规上钢尺的一边AB是两脚所夹角的平分线.工人师傅常用中心规来找圆心工件的圆心，其方法是把中心规两脚卡紧圆形工件，然后沿尺边AB在工件上画出一条直线，再把工件转动一下，又画出另一条直线，这两条直线的交点就是圆心.

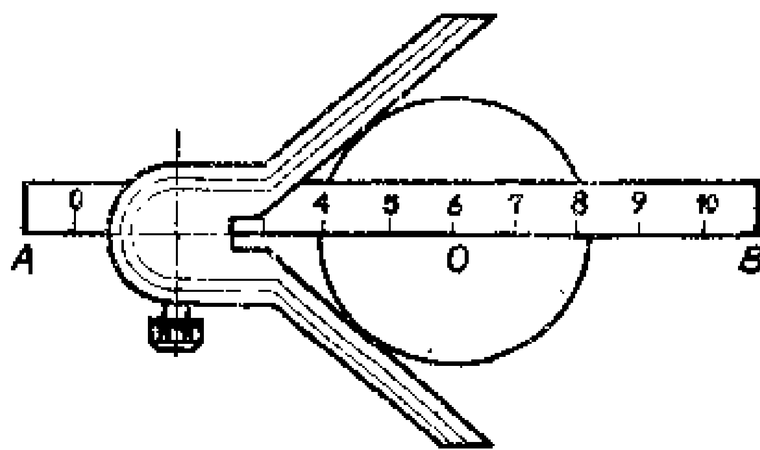


图7—16

二、两圆的公切线

在生产和日常生活中，还经常遇到一条直线和两个圆相切的情况.例如自行车的链条和轮盘、飞轮相切；皮带轮的传动带和主动轮、从动轮相切.

一条直线和两个圆都相切，那么，这条直线就叫做两圆的公切线.如果两圆在公切线的同旁，这条公切线就叫做外公切线（图7—17）；如果两圆在公切线的两旁，这条公切线叫做内公切线（图7—18）.公切线上两个切点间的距离叫做公切线的长.

例 证明两个圆的两条外公切线的长相等.

已知：图7—17中AB、CD是$\odot O_1$和$\odot O_2$的外公切线的长.

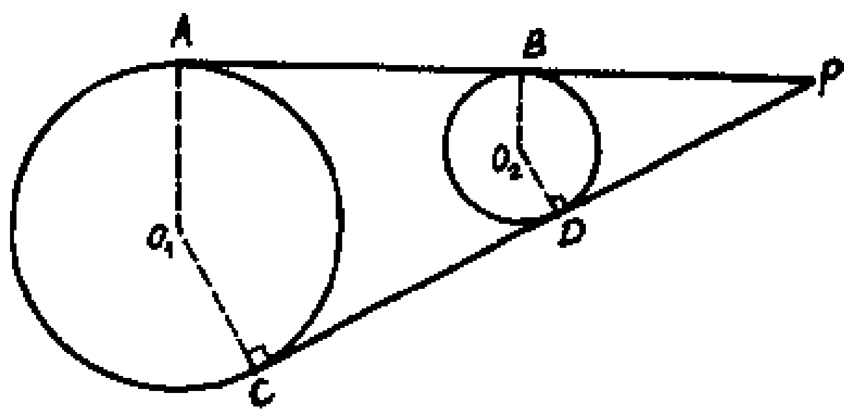


图 7—17

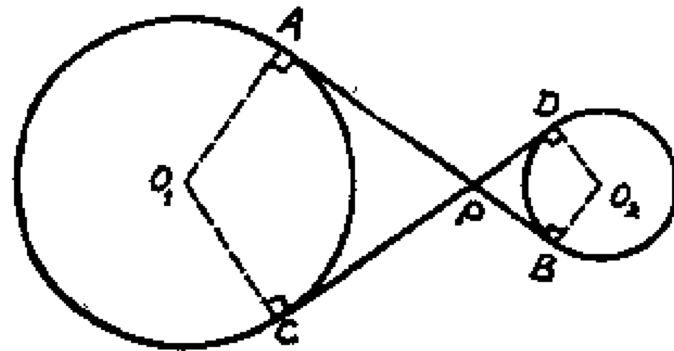


图 7—18

求证：$AB=CD$.

证明： 设两条外公切线相交于P点，则有

$$PA=PC,\ PB=PD.$$

$$\therefore\quad PA-PB=PC-PD,$$

即

$$AB=CD.$$

两圆的两条内公切线的长也是相等的，由学员自己证明.

三、圆和圆相切

如果在同一平面内的两个圆只有一个公共点，我们就说这两圆相切，两圆的公共点就叫做切点.

两圆相切共有两种情况：一个圆在另一个圆的外面，叫做两圆外切（图 7—19）；一个圆在另一个圆的里面，叫做两圆内切（图 7—20）.

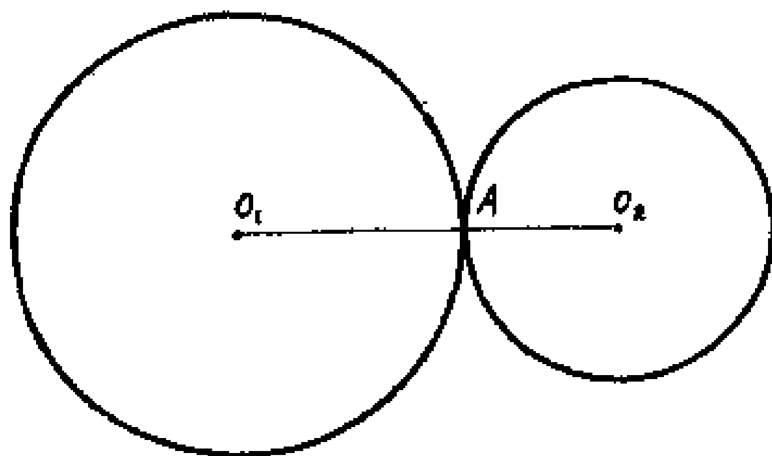


图 7—19

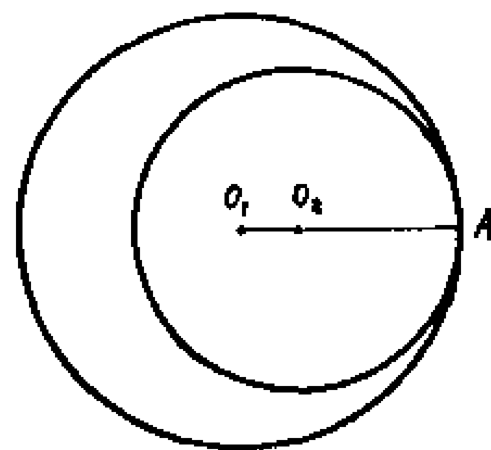


图 7—20

两圆相切的情况也是常见的．例如，齿轮传动机构上的两个齿轮，它们的节圆外切或内切；滚珠轴承的滚珠和轴承套之间也是外切或内切.

从图 7—19和图 7—20中不难看出：

定理 两圆相切，切点必在连结两圆圆心的直线上．而且，当两圆外切时，两圆心之间的距离等于两圆半径之和；当两圆内切时，两圆心之间的距离等于两圆半径之差.

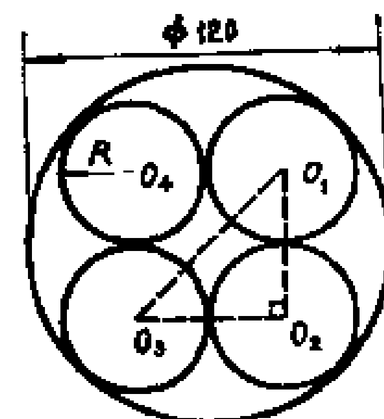


图 7—21

例 固体燃料火箭发动机外壳的内径是$\phi 120$毫米，在它里面装四根大小一样的圆柱形火药柱（图 7—21），求火药柱的最大直径D是多少.

解： 设火药柱的最大半径为R，O_1、O_2、O_3、O_4分别

为四根火药柱的圆心．连结O_1O_2、O_2O_3、O_1O_3，则因$\triangle O_1O_2O_3$是直角三角形，故有

$$O_1O_2^2+O_2O_3^2=O_1O_3^2,$$

考虑到$O_1O_2=O_2O_3=2R$，$O_1O_3=120-2R$，便得

$$(2R)^2+(2R)^2=(120-2R)^2,$$

即　　$R^2+120R-3600=0$，

解之得　　$R=60(-1\pm\sqrt{2})$，

因为R不能取负值，所以

$$R=60(\sqrt{2}-1)\doteq 24.85\text{（毫米）},$$

故得　　$D=2R=49.7$（毫米）．

答：火药柱的最大直径D为49.7毫米．

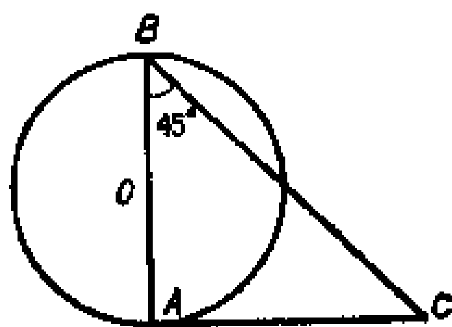
习　　题

1．如图，AB是$\odot O$的直径，$\angle B=45°$，$AB=AC$，试证：AC是$\odot O$的切线．

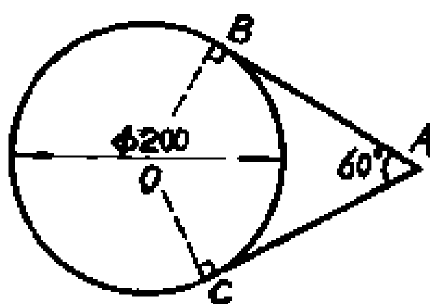
2．如图，已知$\odot O$的直径$\phi=200$毫米，$\angle BAC=60°$．试求：

（1）A与圆心O的距离；　　（2）切线AB与AC的长．

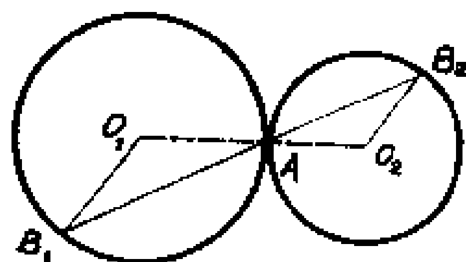
3．如图，已知：$\odot O_1$与$\odot O_2$外切于A点，过A作B_1B_2交$\odot O_1$于B_1，交$\odot O_2$于B_2．试证：$O_1B_1/\!/O_2B_2$．



（第1题）



（第2题）

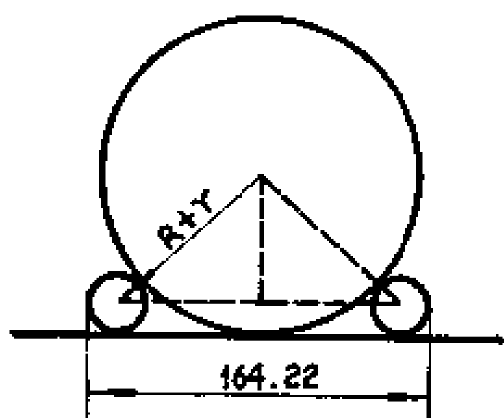


（第3题）

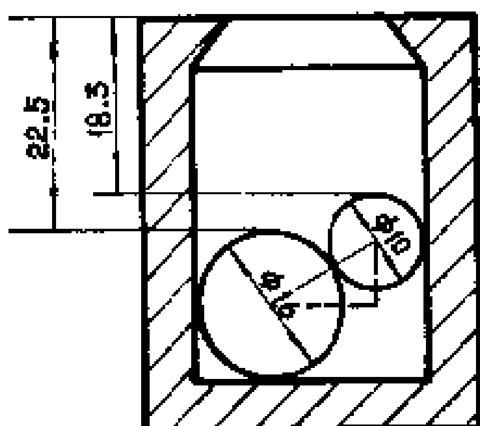
4．要测量一个大型圆柱工件的直径，工人师傅拿着两根直径约为20厘米的钢柱，放成图示的形状，并测得这两根钢柱间的距离为164.22厘米，试求出大型圆柱的直径．

5．口小内大的深圆孔零件，用卡钳不能测得圆孔直径，但可用钢珠来量，其尺寸如图所示（单位是毫米），试求圆孔直径．

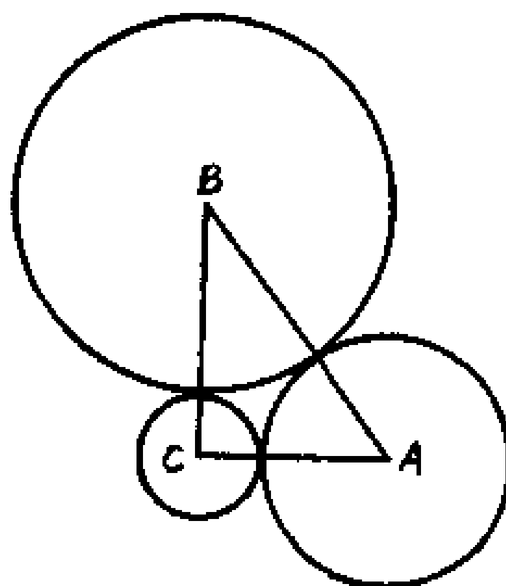
6．如图，三圆两两外切，它们的圆心距分别是3厘米、4厘米、5厘米，求这三个圆的半径各为多少？



（第4题）



（第5题）



（第6题）

第三节　弧度制，弧长和扇形的面积

一、弧度制

1.弧度的概念

长度的度量可以采用"公制"（单位为米、分米、厘米、毫米等），也可以采用"市制"（单位为尺、寸、分等）.和长度的度量一样，角的大小也可以用不同的"单位制"来度量.除了第六章已介绍过的"角度制"外，还经常采用另一种单位制——"弧度制"来度量角的大小.

弧度制就是用"弧度"作单位来度量角的大小．那末，什么是1弧度的角呢？我们规定：弧长等于半径的圆弧所对的圆心角叫做1弧度的角或叫做1径的角（图7—22）．

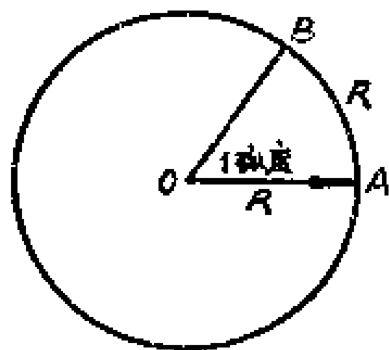


图7—22

现在我们来介绍圆心角的大小和弧长、半径之间的关系．

在图7—23中，设$\widehat{AB}=R$，那末，$\angle AOB=\frac{\widehat{AB}}{R}=\frac{R}{R}=1$(弧度)；设$\widehat{AC}=2R$，那末，$\angle AOC=\frac{\widehat{AC}}{R}=\frac{2R}{R}=2$（弧度）．一般地，对于任意一个圆心角$\angle AOD$，我们有：

$$\angle AOD=\frac{\widehat{AD}}{R}．$$

若以α表示$\angle AOD$的弧度数，l表示$\widehat{AD}$的弧长，上式可写作

$$\alpha=\frac{l}{R}$$

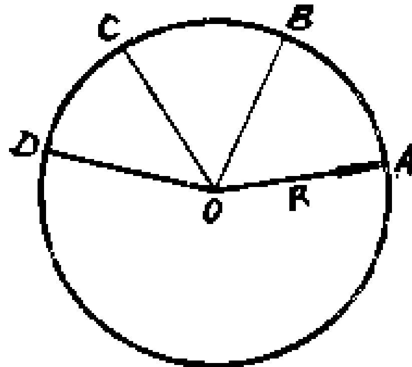


图7—23

即　　　圆心角的弧度数$=\frac{\text{圆心角所对的弧长}}{\text{半　　径}}$．

2.弧度与角度的换算

我们知道，半径为R的圆周长$l=2\pi R$，所以一个周角的弧度数为

$$\alpha=\frac{2\pi R}{R}=2\pi\text{（弧度）},$$

但是一周角＝360°，所以我们有

$$2\pi\text{（弧度）}=360°,$$

或　　　$$\pi\text{（弧度）}=180°.$$

这样，我们便得到弧度与角度的换算公式：

$$1\text{（弧度）}=\frac{180°}{\pi}\approx 57°17'45''$$

$$1°=\frac{\pi}{180}\text{（弧度）}\approx 0.01745\text{（弧度）}$$

应用这两个公式，就可以把一角的弧度数化为角度数，把一角的角度数化为弧度数。

例 （1）将36°换算成弧度数；

（2）将$\frac{3}{5}\pi$（弧度）换算成角度数。

解：（1）∵ $1°=\frac{\pi}{180}$（弧度），

∴ $36°=36\times\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{5}\doteq0.628$（弧度）。

（2）∵ 1（弧度）$=\frac{180°}{\pi}$，

∴ $\frac{3}{5}\pi$（弧度）$=\frac{3}{5}\pi\times\frac{180°}{\pi}=108°$。

下表列出了常用角的角度数和弧度数的换算关系，这些关系希望学员们能够熟记。

角度数	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
弧度数	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π

二、弧　长

上面我们已介绍过弧长、半径和圆心角之间的关系：

$$\text{圆心角的弧度数}=\frac{\text{圆心角所对的弧长}}{\text{半　径}},$$

即

$$\alpha=\frac{l}{R}.$$

这个式子也可以写成

$$\boxed{l=\alpha\cdot R}$$

即　　弧长＝圆心角的弧度数×半径.

如果圆心角和半径已经知道，就可根据这个公式算出弧长来。

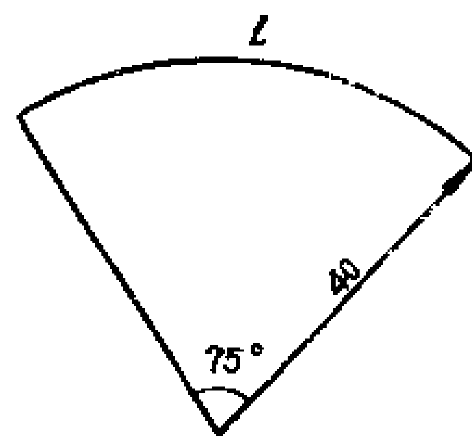


图7—24

例1　已知圆心角$\alpha=75°$，半径$R=40$毫米，求圆心角所对的弧长l(图7—24)。

解：先把圆心角α的角度数换算成弧度数，有

$$\alpha=75°=75\times\frac{\pi}{180}=\frac{5}{12}\pi(\text{弧度}),$$

于是

$$l=\alpha\cdot R=\frac{5}{12}\pi\times40\doteq52.4\ (\text{毫米}).$$

答：弧长约为52.4毫米。

例2　图7—25表示一节排气管道，试计算管道总长。

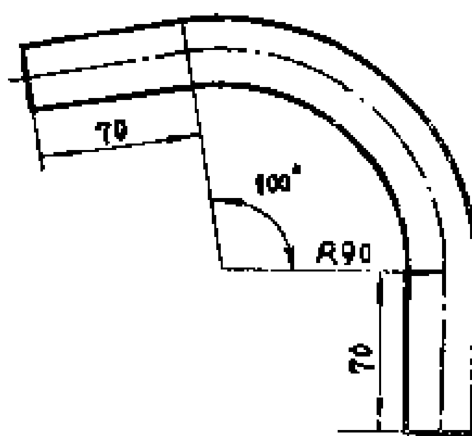


图7—25

解：弯管的长度一般按中心线长度计算，图中点划线表示中心线。

∵ $100° = 100 \times \frac{\pi}{180} = \frac{5}{9}\pi$（弧度），

∴ 弧长 $l = \frac{5}{9}\pi \times 90 = 50\pi \doteq 157$（毫米）．

∴ 管道总长 $\doteq 2 \times 70 - 157 \doteq 297$（毫米）．

答：管道总长约为297毫米．

三、扇形面积

在半径为R的圆中，两条半径所夹的部分叫做扇形（图 7—26）．

我们知道，圆可以看成圆心角为 2π 弧度的扇形．因为圆的面积等于 πR^2，所以，圆心角为 1 弧度的扇形面积

$$A = \frac{\pi R^2}{2\pi} = \frac{1}{2}R^2;$$

圆心角为 2 弧度的扇形面积

$$A = 2 \cdot \frac{1}{2}R^2.$$

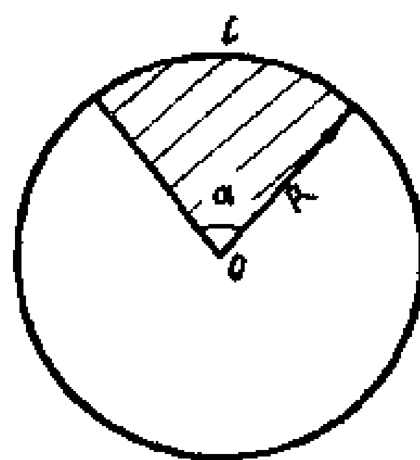


图 7—26

一般地，圆心角为 α 弧度的扇形面积

$$A = \alpha \cdot \frac{1}{2}R^2,$$

即
$$\boxed{A = \frac{1}{2}\alpha R^2}$$

因为扇形的弧长$l = \alpha \cdot R$，所以我们又有

$$\boxed{A = \frac{1}{2}lR}$$

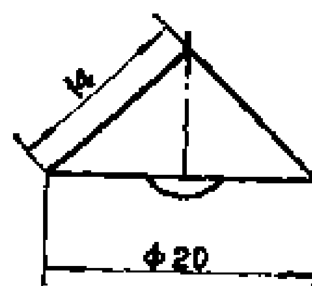
例 1　在图 7—26中，设 $R = 3$ 厘米，圆心角 $\alpha = 80°$，求扇形面积．

解：　∵ $\alpha = 80° = 80 \times \frac{\pi}{180} = \frac{4}{9}\pi$（弧度），

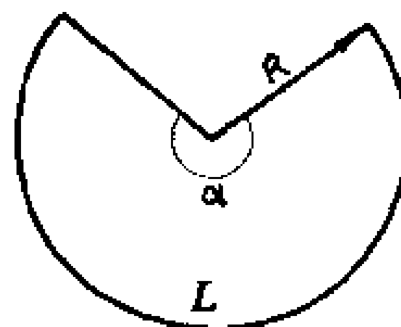
∴ $A = \frac{1}{2}\alpha R^2 = \frac{1}{2} \times \frac{4}{9}\pi \times 3^2 = 2\pi \doteq 6.28$（厘米^2）．

答：扇形面积约为6.28厘米^2．

例 2　电灯罩的底面直径是20厘米，斜边长是14厘米，如图 7—27（1），求灯罩展开图（扇形）的面积（即灯罩的表面积）和圆心角 α（灯罩顶端的小孔不计）．



（1）



（2）

图 7—27

解：　灯罩的展开图为一扇形，其半径R = 灯罩的斜边长14厘米，其弧长 l =

灯罩底面的圆周长 $= \pi \times 20 = 20\pi$（厘米），

$\therefore$ 扇形的面积 $= \frac{1}{2} lR = \frac{1}{2} \times 14 \times 20\pi \doteq 440$（厘米²）；

扇形的圆心角 $\alpha = \frac{l}{R} = \frac{20\pi}{14} = \frac{10}{7}\pi$（弧度）$\doteq 257°$。

答：扇形的面积约为440厘米²，扇形的圆心角约为257°。

习　　题

1.（1）在同圆或等圆中，两个圆心角的弧度数相同，两角所对的弧长是否相等？

（2）在大小不同的两圆中，各有一圆心角，设它们的弧度数相同，问它们所对的弧长是否相等？

2.把下列各角的度数化为弧度数：

75°，120°，150°，210°，240°，300°，22°30′.

3.把下列各角的弧度数化为度数：

$\frac{\pi}{12}$，$\frac{3}{4}\pi$，$\frac{4}{3}\pi$，3，1.2，0.314.

4.设 α、R、D、l 分别表示圆心角、半径、直径、圆心角 α 所对的弧长，试计算下列各题：

（1）已知 $R = 150$ 毫米，$\alpha = 40°$，求 l；

（2）已知 $D = 40$ 厘米，$\alpha = 210°$，求 l；

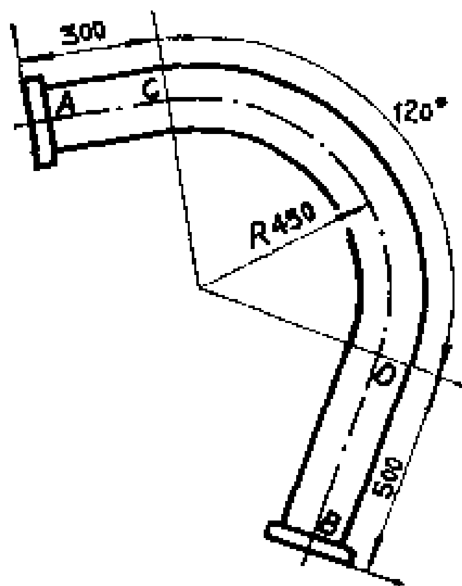
（3）已知 $l = 30$ 毫米，$R = 10$ 毫米，求 α 的度数；

（4）已知 $l = 200$ 毫米，$D = 180$ 毫米，求 α 的度数；

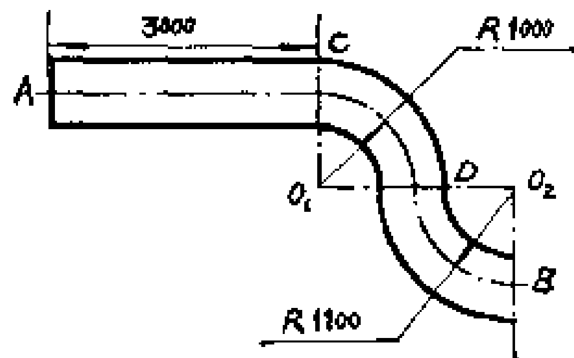
（5）已知 $l = 75$ 毫米，$\alpha = 1.5$（弧度），求 R.

5.锅炉中有一段进水弯管，尺寸如图所示（单位是毫米），试计算管子总长.

6.碾米机中有一段管道，尺寸如图所示（单位是毫米），试计算管道的总长.



（第5题）



（第6题）

7.为了避免由于膨胀而使蒸汽汽管破裂，蒸汽管道中一般都装有膨胀节，求图中这一段管道的总长（单位是毫米）.

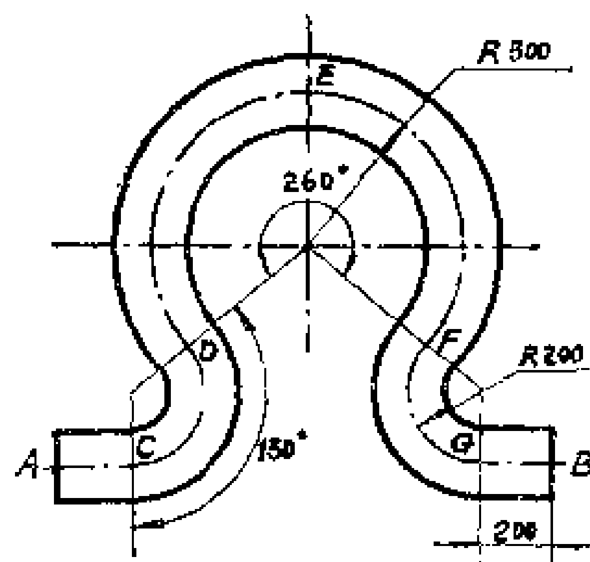
8.用 α、R 和 l 分别表示扇形的圆心角、半径和弧长，求扇形的面积：

(1) 设 $R=150$ 毫米，$\alpha=\frac{\pi}{4}$；　(2) 设 $R=110$ 毫米，$\alpha=2.2$（弧度）；

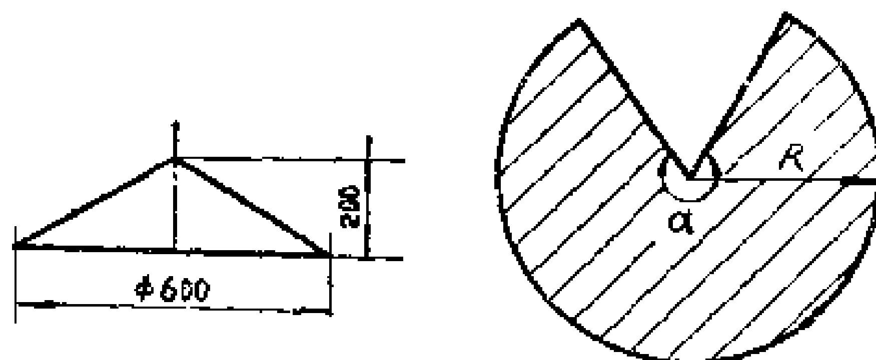
(3) 设 $R=40$ 毫米，$\alpha=120°$；　(4) 设 $R=30$ 厘米，$\alpha=40°$；

(5) 设 $R=8$ 厘米，$l=5$ 厘米；　(6) 设 $R=100$ 毫米，$l=170$ 毫米.

9.烟囱上的圆锥形风帽其尺寸如图所示（单位是毫米），它的展开图是一个扇形，试计算这个扇形的半径 R、圆心角 α（度数）和面积 A.

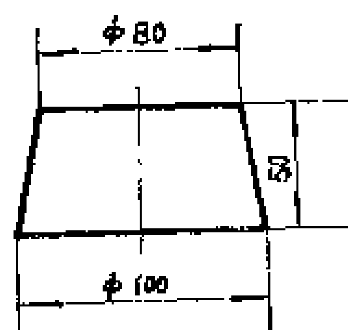


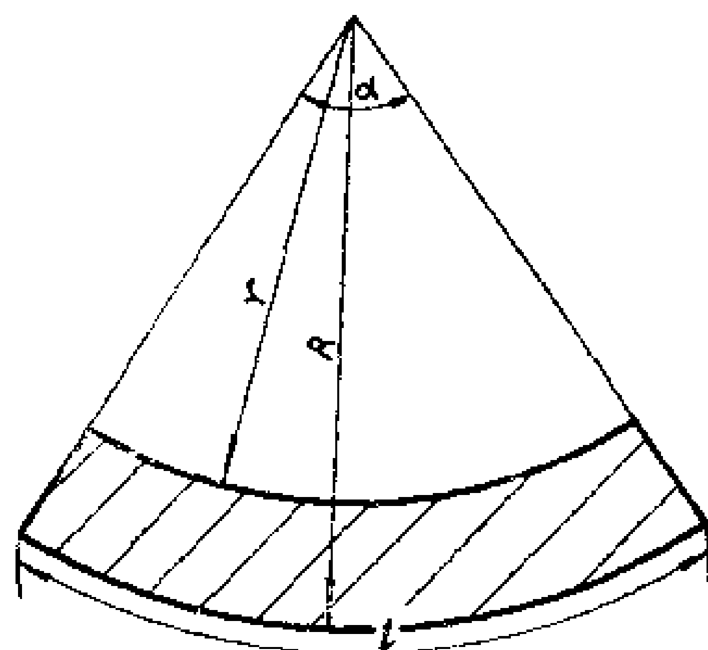
（第7题）



（第9题）

10.要用薄铁皮制造如图所示的圆台（单位是毫米），求它展开成平面图形时的弧长 l、半径 r 和 R、圆心角 α，以及面积 A 的大小.





（第10题）

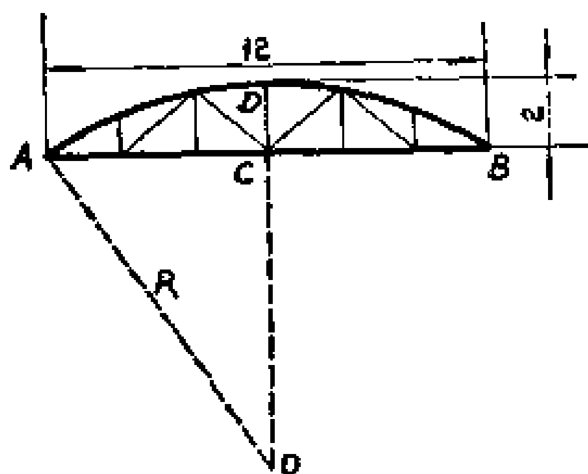
复　习　题

1.某地修建一个田径场跑道．内圈总周长400米，其中两直线部分各长100米．试计算两端半圆部分的半径 R.

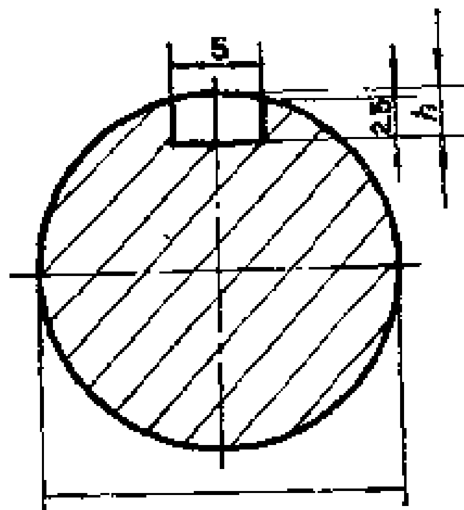
2.某地下建筑，上部为弓形，弓形的弦长与半径均为10米，问这弓形的弧长是多长？

3.一个圆拱形结构（见图），长度 $AB=12$ 米，高度 $CD=2$ 米，求圆拱形的半径 R.

4.铣工要在直径为20毫米的圆轴上铣出一个键槽，其尺寸如图所示，求铣刀进刀



（第 3 题）



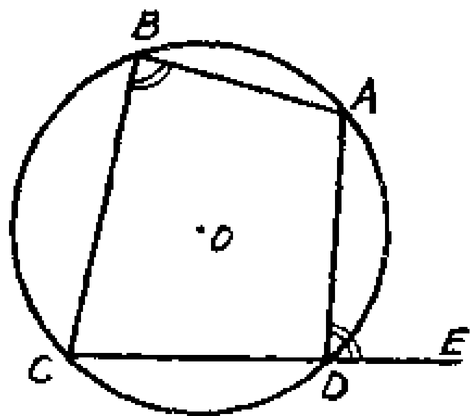
（第 4 题）

深度h.

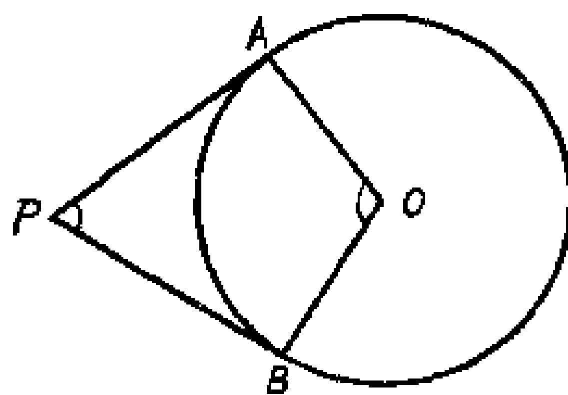
5.20个孔沿直径$\phi=400$毫米的圆周均匀分布，试计算相邻两孔中心之间的圆弧所对的圆心角的度数和弧度数各为多少？弧长是多少？

6.证明圆的内接四边形的任意一个外角等于它的内对角（即与它相邻的那个内角的对角）见图.

7.如图，已知PA和PB是$\odot O$的切线，A和B是切点.求证：$\angle AOB+\angle APB=180°$.



（第 6 题）

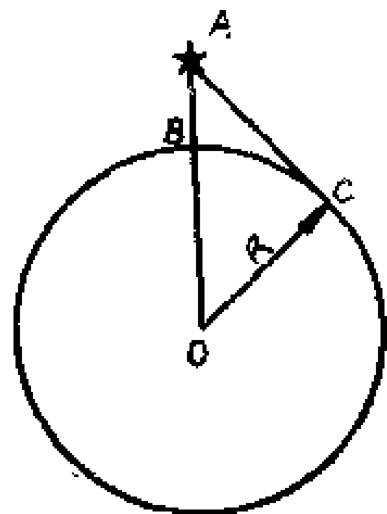


（第 7 题）

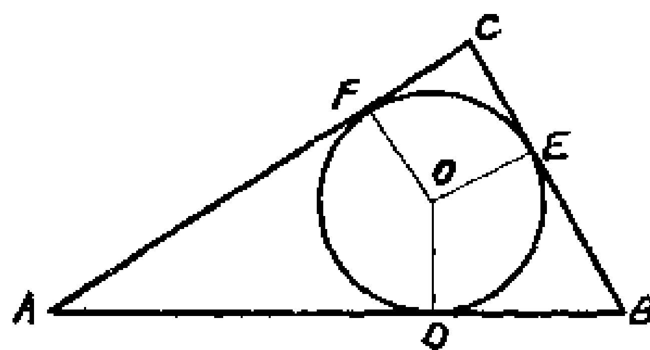
8.一九七〇年四月二十四日，我国成功地发射了第一颗人造地球卫星，这是毛泽东思想的伟大胜利！

已知地球半径$R=6370$公里，当卫星距地面最远点时，$AB=2384$公里，问此时地面上能看到这颗卫星的最远的地方，离卫星约多少公里（见图）.

9.如图，在$\triangle ABC$中，已知$AB=14$厘米、$BC=9$厘米、$AC=13$厘米，它的内切圆分别和AB、BC和AC相切于D、E和F，求AD、BE、CF的长.

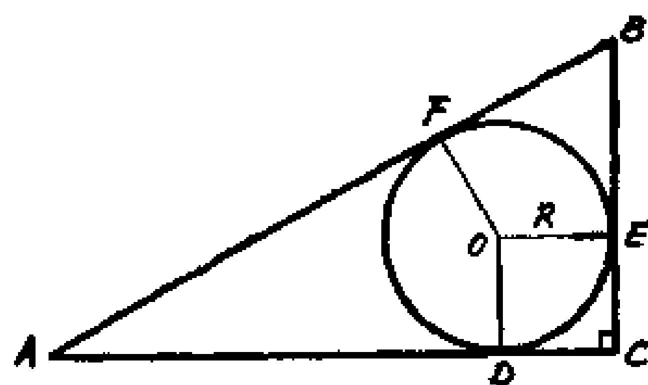


（第 8 题）



（第 9 题）

10.证明直角三角形内切圆的直径长等于它的两条直角边长的和减去斜边的长（见图）。



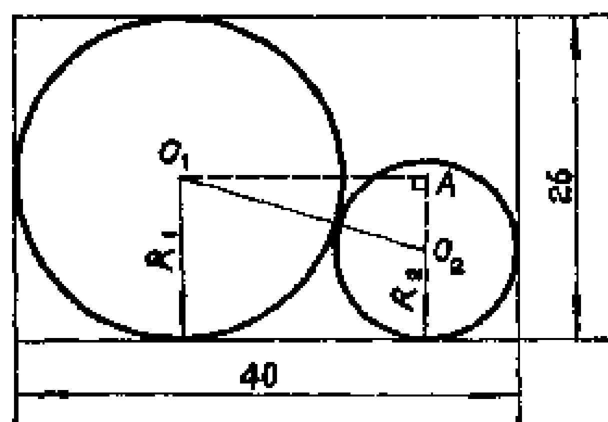
（第10题）

11.如图，在长 40 厘米、宽 26 厘米的铜板上切取一个最大的圆，用剩下的材料再割一个最大的圆，求后一圆的半径。

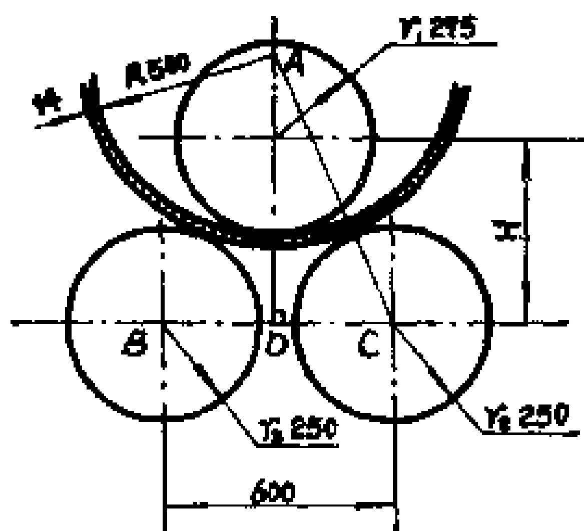
12.锅炉厂工人自行设计弯管机，用它把钢板轧成圆筒形，为了控制圆筒半径大小，需要求出上下辊轮中心的垂直距离 H（如图）。

已知：上辊轮的半径为 275 毫米；下辊轮的半径均为250毫米；下辊轮的中心距为600毫米；钢板厚度为14毫米；轧制圆筒的内径为500毫米。

试求 H = ?



（第11题）



（第12题）

第三篇　平 面 三 角

第八章　锐角三角函数

勾股定理揭示了直角三角形三条边之间的关系，利用它我们能解决不少实际问题.但是，在生产实践中，还会遇到直角三角形的另外一些问题，这些问题仅用勾股定理是不能解决的，必须用直角三角形边与角之间的关系才能解决.本章就是研究直角三角形边与角之间的关系.

第一节　锐角三角函数

一、正弦和余弦

1.正弦和余弦的概念

实例　某大队要在一个山坡下的河边修建一座扬水站.已测得河边到山顶的距离AB为50米，山坡和地面的夹角为35°.为了选择适当扬程的水泵，需要知道出水口的高度（即扬程）BC和水平距离AC（图8－1）.

这个例子就是：在直角三角形ABC中，已知斜边AB和一个锐角$\angle A$，求$\angle A$的对边BC和$\angle A$的邻边AC.为了解决这一问题，我们必须考虑直角三角形边与角之间的关系.

先看一个锐角是30°的直角三角形，边与角之间的关系.

由平面几何可知，在直角三角形中，30°角所对的边等于斜边的一半.这就是说，在以30°角为一个角的所有直角三角形中（图8－2），$\angle A$的对边与斜边的比都是$\frac{1}{2}$，即$\frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{AB'}=\frac{B''C''}{AB''}=\frac{1}{2}$.

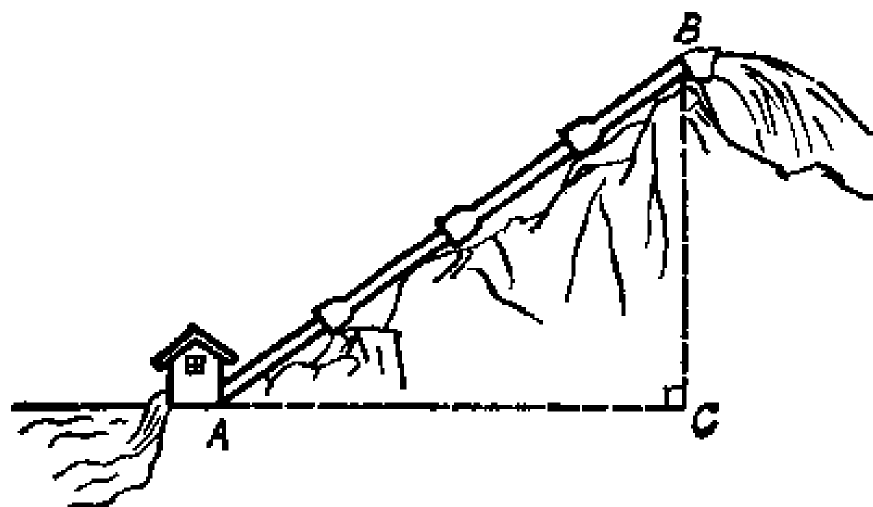


图8－1

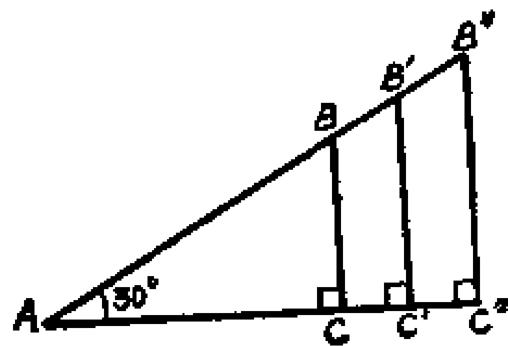


图8－2

一般地说，如果锐角A的大小确定了，那末以这个锐角为一个角的所有直角三角形中（图 8—3），$\angle A$ 的对边和斜边的比，$\angle A$ 的邻边和斜边的比都是一个定数.

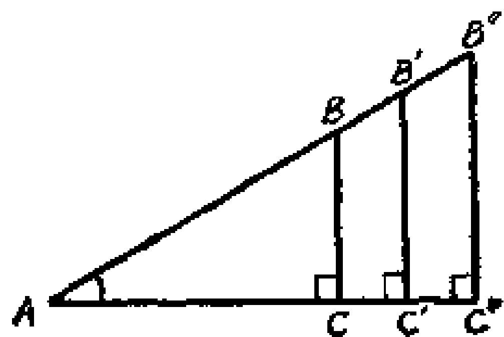


图 8—3

事实上，由图 8—3 知，

$$\triangle ABC \backsim \triangle AB'C' \backsim \triangle AB''C'',$$

$$\therefore \quad \frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{AB'}=\frac{B''C''}{AB''};$$

$$\frac{AC}{AB}=\frac{AC'}{AB'}=\frac{AC''}{AB''}.$$

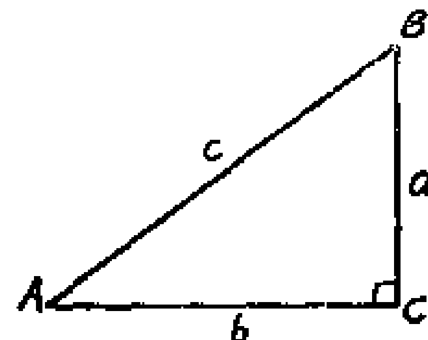


图 8—4

根据直角三角形边和角之间的这种关系，我们得出正弦和余弦的定义:

在直角三角形ABC中（图 8—4），

$\angle A$ 的对边和斜边的比叫做 $\angle A$ 的正弦，用符号"$\sin A$"来表示.即

$$\boxed{\sin A=\frac{\angle A\text{的对边}}{\text{斜边}}=\frac{a}{c}}$$

"$\sin A$"读作"赛因A".

$\angle A$ 的邻边和斜边的比叫做$\angle A$的余弦．用符号"$\cos A$"来表示.即

$$\boxed{\cos A=\frac{\angle A\text{的邻边}}{\text{斜边}}=\frac{b}{c}}$$

"$\cos A$"读作"扣赛因A".

例 1 求出图 8—5 中的$\sin A$、$\cos A$、$\sin B$、$\cos B$的值.

解:

$$\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{3}{5};$$

$$\cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{4}{5};$$

$$\sin B=\frac{AC}{AB}=\frac{4}{5};$$

$$\cos B=\frac{BC}{AB}=\frac{3}{5}.$$

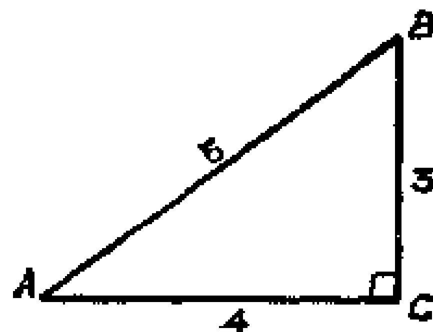


图 8—5

在这里我们看到:

$$\sin A = \cos B; \qquad \cos A = \sin B.$$

而$\angle A$和$\angle B$互为余角，即$\angle B = 90° - \angle A$，所以

$$\sin A = \cos(90° - A); \qquad \cos A = \sin(90° - A).$$

这两个关系叫做余角关系，它们对任意锐角 A 都成立.

2.特殊角的正弦和余弦的值

特殊角30°、45°、60°的正弦和余弦的值，在生产实践中经常用到，下面把它们计算出来.

（1）45°角的正弦和余弦的值

如图 8—6，在直角$\triangle ABC$中，

$\because \angle A = \angle B = 45°$，

$\therefore b = a$.

由勾股定理，得

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2}a,$$

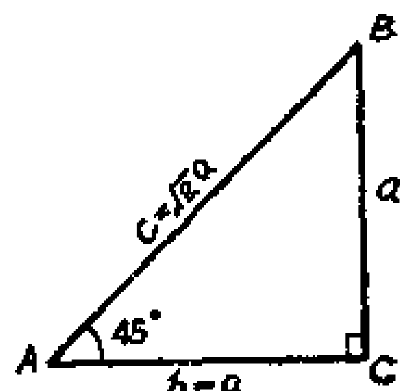


图 8—6

$$\therefore \sin 45° = \frac{a}{c} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos 45° = \frac{b}{c} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

（2）30°角和60°角的正弦和余弦的值

如图 8—7，在直角$\triangle ABC$中，

$\because \angle A = 30°$，

$\therefore c = 2a$.

由勾股定理，得

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = \sqrt{3}a.$$

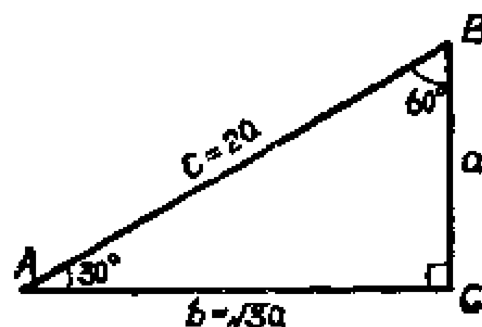


图 8—7

$$\therefore \sin 30° = \frac{a}{c} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2};$$

$$\cos 30° = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\sin 60° = \frac{b}{c} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos 60° = \frac{a}{c} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}.$$

例 2 计算：$\frac{1}{2}\sin 60° + \cos 45° - \sin 30°\cos 30°$.

解： $\frac{1}{2}\sin 60° + \cos 45° - \sin 30°\cos 30°$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

在有些问题里，会遇到正弦(或余弦)的平方、立方等，我们把 $(\sin\alpha)^2$ 简记作 $\sin^2\alpha$，$(\sin\alpha)^3$ 简记作 $\sin^3\alpha$ 等.

例 3　计算：$\sin^2 30°+\cos^2 30°$.

解：　$\sin^2 30°+\cos^2 30°=(\sin 30°)^2+(\cos 30°)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=1$.

3.查表求正弦、余弦的值

30°、45°、60°角的正弦和余弦的值，我们已经算得，其他任一锐角（如10°、5°等等）的正弦和余弦的值，可以利用《三角函数表》查得.关于查表的方法，学员可看表中的说明，这里应注意以下几点：

第一，在例 1 中，我们已经介绍过余角关系：

$$\sin\alpha=\cos(90°-\alpha);\qquad \cos\alpha=\sin(90°-\alpha).$$

即一个锐角的正弦等于它的余角的余弦；一个锐角的余弦等于它的余角的正弦. 例如，若取 $\alpha=60°$，则有 $\sin 60°=\cos 30°$；$\cos 60°=\sin 30°$.因此，正弦和余弦用同一个函数表.

第二，查一个角的正弦时，应当从左边的直行和顶端的横行中，分别查出这个角的度数和分数.查一个角的余弦时，应当从右边的直行查度数，从底端的横行查分数.

第三，从表中看出：当 α 在0°到90°之间逐渐增大时，正弦 $\sin\alpha$ 由小变大，其值不大于 1；余弦 $\cos\alpha$ 由大变小，其值也不大于 1.

查表补修正值时，要注意它们的增减性.查正弦时，如果所给的角比表中的角大，应加修正值；如果所给的角比表中的角小，应减修正值.

查余弦时，则相反，如果所给的角比表中的角大，应减修正值；如果所给的角比表中的角小，应加修正值.

例 4　查表求：(1) $\sin 51°43'$；(2) $\sin 30°35'$；(3) $\cos 37°19'$；(4) $\cos 62°16'$.

解：　(1) $\sin 51°43'=0.7848+0.0002=0.7850$；

(2) $\sin 30°35'=0.5090-0.0003=0.5087$；

(3) $\cos 37°19'=0.7955-0.0002=0.7953$；

(4) $\cos 62°16'=0.4648+0.0005=0.4653$.

已知一个角的正弦和余弦的值，利用《三角函数表》可以查出对应的锐角.

例 5　已知 $\sin\alpha=0.9234$，$\cos\beta=0.3931$，求 α，β.

解：　$\because$ $\sin\alpha=0.9234=0.9232+0.0002$，

$\therefore$ $\alpha=67°24'+2'=67°26'$.

$\because$ $\cos\beta=0.3931=0.3939-0.0008$，

$\therefore$ $\beta=66°48'+3'=66°51'$.

例 6　解决本节开头实例中提出的问题.

解：　$\because$ $\sin A=\frac{BC}{AB}$，

$\therefore \quad BC = AB\sin A = 50\times\sin 35^\circ = 50\times 0.5736 = 28.68$(米).

同理，由$\cos A = \dfrac{AC}{AB}$，得

$$AC = AB\cos A = 50\times\cos 35^\circ = 50\times 0.8192 = 40.96(\text{米}).$$

答：出水口的高度BC是28.68米，水平距离AC是40.96米.

二、正切和余切

1.正切和余切的定义

因为相似三角形对应边成比例，所以，当锐角A确定后，以这个锐角为一个角的所有直角三角形中，除$\angle A$的对边和斜边之比、$\angle A$的邻边和斜边之比分别是定数之外，$\angle A$的对边与邻边之比、邻边与对边之比、斜边与邻边之比、斜边与对边之比也都分别是定数.

根据这个性质，我们定义：

在直角三角形ABC中（图8—4），

$\angle A$的对边和$\angle A$的邻边的比，叫做$\angle A$的正切，用符号"$\mathrm{tg}A$"来表示，即

$$\mathrm{tg}A = \frac{\angle A\text{的对边}}{\angle A\text{的邻边}} = \frac{a}{b}$$

"$\mathrm{tg}A$"读作"坦金特A".

$\angle A$的邻边和$\angle A$的对边的比，叫做$\angle A$的余切，用符号"$\mathrm{ctg}A$"来表示. 即

$$\mathrm{ctg}A = \frac{\angle A\text{的邻边}}{\angle A\text{的对边}} = \frac{b}{a}$$

"$\mathrm{ctg}A$"读作"扣坦金特A".

斜边和$\angle A$的邻边的比，叫做$\angle A$的正割，用符号"$\sec A$"来表示. 即

$$\sec A = \frac{\text{斜边}}{\angle A\text{的邻边}} = \frac{c}{b}$$

"$\sec A$"读作"西肯特A".

斜边和$\angle A$的对边的比，叫做$\angle A$的余割，用符号"$\csc A$"来表示.即

$$\csc A = \frac{\text{斜边}}{\angle A\text{的对边}} = \frac{c}{a}$$

"$\csc A$"读作"扣西肯特A".

由于当锐角A每取一个确定的值时，$\sin A$、$\cos A$、$\mathrm{tg}A$、$\mathrm{ctg}A$、$\sec A$和$\csc A$都有确定的值和它对应，因此它们都是锐角A的函数，分别叫做正弦函数、余弦函数、正切函数、余切函数、正割函数和余割函数. 这六个函数统称为锐角三角函数. 其中前四个三角函

数今后常用，故为我们学习的重点.

2.特殊角的正切和余切的值

同求特殊角的正弦和余弦的值一样，由图8－6及图8－7，容易推导出特殊角的正切和余切的值：

$\mathrm{tg}\,45° = 1$；　　　　$\mathrm{ctg}\,45° = 1$；

$\mathrm{tg}\,30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$；　　　　$\mathrm{ctg}\,30° = \sqrt{3}$；

$\mathrm{tg}\,60° = \sqrt{3}$；　　　　$\mathrm{ctg}\,60° = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

为了便于记忆，现将特殊角的三角函数值列表如下：

三角函数值 角A / 三角函数	30°	45°	60°
$\sin A$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos A$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\mathrm{tg}\,A$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\mathrm{ctg}\,A$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

3.查表求正切、余切的值

同查表求正弦、余弦的值一样，任一锐角的正切和余切的值也可以利用《三角函数表》查得.在这里应该指出，正切和余切之间也存在余角关系：

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \mathrm{ctg}(90° - \alpha); \qquad \mathrm{ctg}\,\alpha = \mathrm{tg}(90° - \alpha).$$

即一个锐角的正切等于它的余角的余切；一个锐角的余切等于它的余角的正切. 因此，正切和余切用同一个函数表.

此外，从表中看出：当α在0°到90°之间逐渐增大时，正切$\mathrm{tg}\,\alpha$由小变大；余切$\mathrm{ctg}\,\alpha$由大变小.因此，查表补修正值时，正切和正弦类似，余切和余弦类似.

例1　查表求：(1) $\mathrm{tg}\,40°13'$；　　(2) $\mathrm{tg}\,60°16'$；

(3) $\mathrm{ctg}\,46°32'$；　　(4) $\mathrm{ctg}\,35°47'$.

解：　(1) $\mathrm{tg}\,40°13' = 0.8451 + 0.0005 = 0.8456$；

(2) $\mathrm{tg}\,60°16' = 1.753 - 0.002 = 1.751$；

(3) $\mathrm{ctg}\,46°32' = 0.9490 - 0.0011 = 0.9479$；

(4) $\mathrm{ctg}\,35°47' = 1.3865 + 0.0009 = 1.3874$.

例2　已知 $\mathrm{tg}\,\alpha = 0.3659$，求 α.

解： 查表得　$\alpha = 20°6'$.

例3　在地面上用测角仪AD测得电视塔的仰角为71°，量得电视塔的中心E到D的距离为54米. 已知测角仪的高AD等于1.2米，求塔高BE（图8－8）.

解：在直角△ABC中，

∵ $\operatorname{tg}A=\dfrac{BC}{AC}$，且$AC=DE=54$，

∴ $BC=AC\operatorname{tg}A=54\times\operatorname{tg}71°$

$=54\times2.904\approx156.8$（米）。

于是 $BE=BC+CE\approx156.8+1.2=158$（米）。

答：电视塔的高为158米。

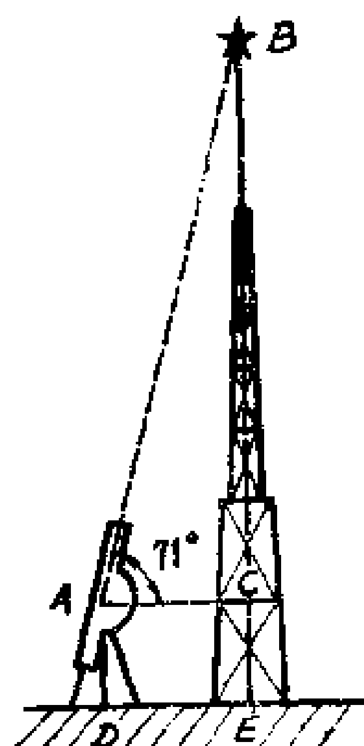


图 8—6

三、同角的三角函数间的关系

上面介绍了锐角三角函数的概念，下面我们根据三角函数的定义，找出三角函数之间的关系。

1.倒数关系

由三角函数的定义，容易得到：

$$\operatorname{ctg}A=\frac{1}{\operatorname{tg}A}\quad 或\quad \operatorname{tg}A\operatorname{ctg}A=1$$

$$\sec A=\frac{1}{\cos A}\quad 或\quad \cos A\sec A=1$$

$$\csc A=\frac{1}{\sin A}\quad 或\quad \sin A\csc A=1$$

2.商数关系

由三角函数的定义，容易得到：

$$\operatorname{tg}A=\frac{\sin A}{\cos A}$$

$$\operatorname{ctg}A=\frac{\cos A}{\sin A}$$

3.平方关系

在直角△ABC中（图 8—4），

∵ $\sin A=\dfrac{a}{c}$； $\cos A=\dfrac{b}{c}$；

∴ $\sin^2A+\cos^2A=\left(\dfrac{a}{c}\right)^2+\left(\dfrac{b}{c}\right)^2=\dfrac{a^2+b^2}{c^2}$。

由勾股定理，得

$a^2+b^2=c^2$，于是得

$$\sin^2A+\cos^2A=1$$

同样可得：

$$1+\operatorname{tg}^2A=\frac{1}{\cos^2A}=\sec^2A$$

$$1+\operatorname{ctg}^2A=\frac{1}{\sin^2A}=\csc^2A$$

利用上述公式，就可以从一个三角函数值求出其它的三角函数值。

例1 已知：$\cos A=\frac{4}{5}$，求角A的其余各三角函数的值。

解： $\because \sin^2 A+\cos^2 A=1$，

$$\therefore \sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{9}{25}}=\frac{3}{5},$$

$$\because \operatorname{tg}A=\frac{\sin A}{\cos A}; \qquad \operatorname{ctg}A=\frac{1}{\operatorname{tg}A},$$

$$\therefore \operatorname{tg}A=\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}}=\frac{3}{4};$$

$$\operatorname{ctg}A=\frac{1}{\operatorname{tg}A}=\frac{4}{3}.$$

上面是利用三角函数间的关系计算的.另外，我们还有更为直观的方法：

作一直角三角形ABC（图8—9），根据$\cos A=\frac{4}{5}$，可取$AB=5$，$AC=4$，由勾股定理得：

$$BC=\sqrt{5^2-4^2}=3.$$

所以

$$\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{3}{5};$$

$$\operatorname{tg}A=\frac{BC}{AC}=\frac{3}{4};$$

$$\operatorname{ctg}A=\frac{AC}{BC}=\frac{4}{3}.$$

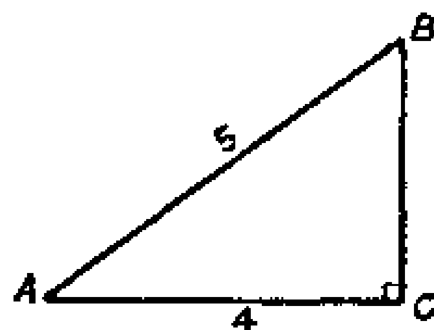


图8—9

后一种方法，在电工计算中常用到它。

利用同角的三角函数间的关系式和余角的关系式，还可以化简三角函数式。

例2 化简：$\frac{\sin A}{\sqrt{1-\sin^2 A}}\cdot\operatorname{ctg}A$.

解： $\because 1-\sin^2 A=\cos^2 A$,

$$\therefore \frac{\sin A}{\sqrt{1-\sin^2 A}}\cdot\operatorname{ctg}A=\frac{\sin A}{\cos A}\cdot\operatorname{ctg}A=\operatorname{tg}A\operatorname{ctg}A=1.$$

例3 化简：$\sin^2\alpha+\sin^2(90°-\alpha)-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(90°-\alpha)$.

解： $\sin^2\alpha+\sin^2(90°-\alpha)-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(90°-\alpha)$

$=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha=1-1=0.$

习　题

1.设$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$：

(1) 已知$a=5$，$b=12$，$c=13$，求$\sin A$、$\cos A$、$\sin B$、$\cos B$的值；

(2) 已知$a=5$，$b=4$，$c=\sqrt{41}$，求$\sin A$、$\cos A$、$\sin B$、$\cos B$的值。

2.计算：

(1) $2\sin30°+3\cos60°-\frac{3\sin45°}{4\cos45°}$；

(2) $(\sin60°+\cos60°)(\cos30°-\sin30°)$；

(3) $1-\sin^2 60°-\cos^2 60°$；

(4) $(1+\cos45°+\sin30°)(1-\cos45°+\cos60°)$；

(5) $\frac{\sin60°-\sin30°}{\cos30°+\cos60°}$.

3.查表求下列正弦或余弦的值：

(1) $\sin5°$，$\sin20°$，$\cos70°$，$\cos15°$；

(2) $\sin41°11'$，$\sin37°29'$，$\cos21°33'$，$\cos44°59'$；

(3) $\sin54°36'$，$\sin79°5'$，$\cos57°17'$，$\cos50°27'$；

(4) $\cos10°55'$，$\sin61°47'$，$\cos26°49'$，$\sin89°3'$.

4.已知下列正弦、余弦的值，查表求角α的度数：

$\sin\alpha=0.3115$；$\cos\alpha=0.9247$；$\sin\alpha=0.0244$；

$\cos\alpha=0.0488$；$\sin\alpha=0.8251$；$\cos\alpha=0.2996$.

5.查表回答下列问题：

(1) $\sin20°+\sin50°$是不是等于$\sin70°$？

(2) $\cos20°+\cos50°$是不是等于$\cos70°$？

(3) $\sin40°$是不是等于$2\sin20°$？

(4) $\cos40°$是不是等于$2\cos20°$？

6.设在$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$：

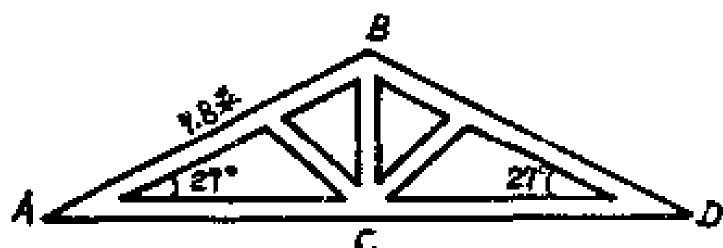
(1) 已知$\angle A=32°$，$c=7$，求a、b；

(2) 已知$\angle A=57°45'$，$a=5$，求c、b；

(3) 已知$\angle B=40°12'$，$c=5$，求a、b.

7.某车间屋架的斜角为27°，斜梁$AB=7.8$米，求支撑杆BC的高度和梁的跨度（即AD的长）.

8.飞机上升时的速度为每秒100米，上升角为30°，求30秒钟后飞机的上升高度和飞机离起飞处的水平距离.



（第7题）



（第8题）

9.哪一个角的正切、余切的值都等于1？当角在什么范围内变化时，正切的值小于1，而余切的值大于1？当角在什么范围内变化时，正切的值大于1，而余切的值小于1？

10. 计算：

(1) $\sin30° + 3\cos60° + 2\text{tg}45°$;

(2) $5\text{ctg}30° + 2\sin60° - 2\cos30°$;

(3) $\dfrac{\text{ctg}60° - \text{tg}45°}{\text{tg}60° - \text{ctg}45°}$;

(4) $3\text{tg}^2 30° + \text{ctg}45° - 2\text{tg}45° + 2\text{tg}^2 60°$;

(5) $\dfrac{\text{ctg}30°}{1 + \text{tg}60°\text{tg}30°}$.

11. 查表求下列正切、余切的值：

$\text{tg}18°6'$; $\text{ctg}30°26'$; $\text{tg}21°56'$; $\text{ctg}24°31'$;

$\text{tg}0°36'$; $\text{ctg}42°16'$; $\text{tg}53°13'$; $\text{ctg}81°2'$.

12. 查表求下列角 α 的度数：

$\text{tg}\,\alpha = 0.4067$; $\text{ctg}\,\alpha = 2.017$; $\text{tg}\,\alpha = 0.3979$;

$\text{ctg}\,\alpha = 1.4605$; $\text{ctg}\,\alpha = 0.7265$; $\text{tg}\,\alpha = 1.1792$;

$\text{tg}\,\alpha = 36.96$; $\text{ctg}\,\alpha = 76.39$; $\text{tg}\,\alpha = 12.12$.

13. 查表回答下面的问题：

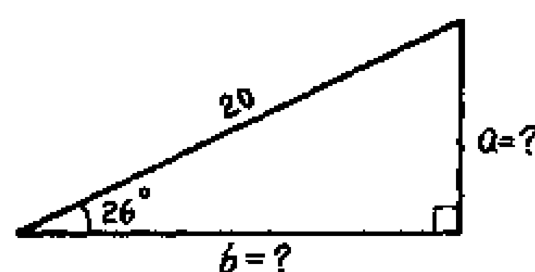
(1) $\text{tg}20° + \text{tg}40°$是不是等于$\text{tg}60°$？

(2) $\text{ctg}10° + \text{ctg}20°$是不是等于$\text{ctg}30°$？

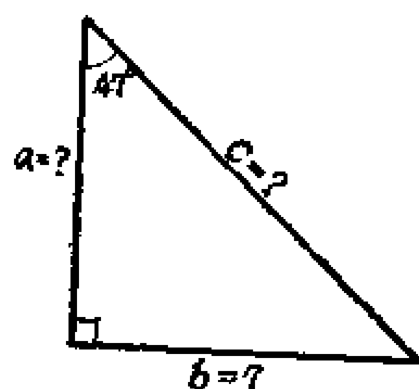
(3) $\text{tg}40°$是不是等于$2\text{tg}20°$？

(4) $\text{ctg}40°$是不是等于$2\text{ctg}20°$？

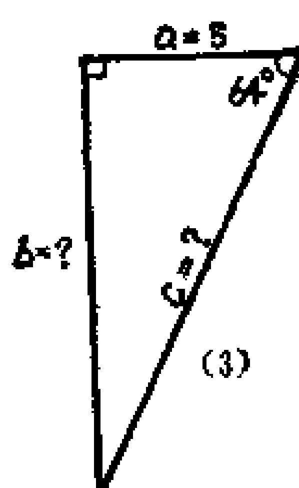
14. 求下列直角三角形的未知边和未知角：



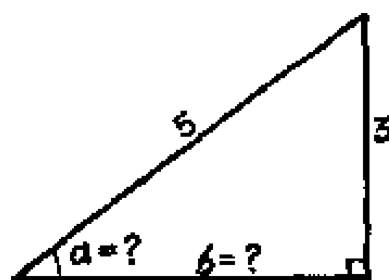
(1)



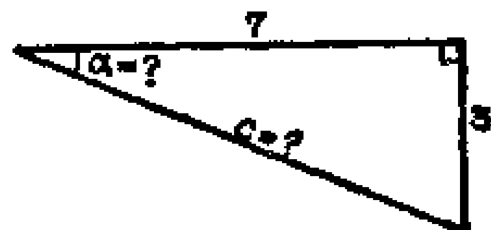
(2)



(3)



(4)

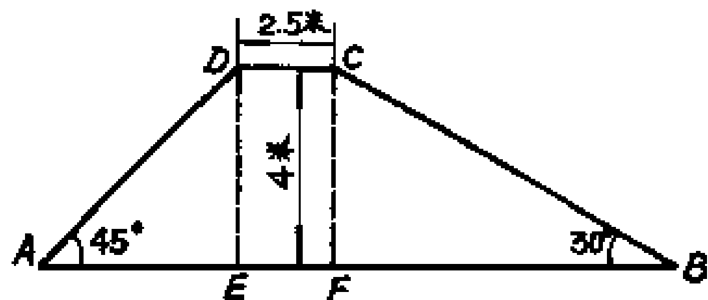


(5)

(第14题)

15. 水库上一个拦水坝的横断面为梯形（见图），求坝底的宽度 AB，迎水坡长度 BC 和背水坡长度AD.

16. 我英雄的中国人民解放军在高120米的山顶的某哨所，观察入侵我国边境的苏修坦克（见图），测得俯角 $\alpha=7°$. 求哨所到敌人坦克的水平距离.



（第15题）



（第16题）

17. 已知下列各式，求 α 的其他三角函数的值:

(1) $\sin\alpha=0.6$;　　(2) $\cos\alpha=\frac{5}{7}$;

(3) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{8}{6}$;　　(4) $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{5}{7}$;

(5) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\omega L}{R}$, 求 $\sin\alpha$, $\cos\alpha$.

18. 化简:

(1) $\frac{1-\sin^2 A}{\cos^2 A}$;　　(2) $\frac{1-\cos^2 A}{1-\sin^2 A}$;

(3) $\operatorname{tg}\alpha\sin\alpha+\cos\alpha$;　　(4) $\operatorname{tg}^2\alpha(1+\sin\alpha)(1-\sin\alpha)$;

(5) $\csc^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha$　　(6) $\operatorname{ctg}^2\alpha(\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha)$;

(7) $(1-\cos^2\alpha)(1+\operatorname{tg}^2\alpha)$;　　(8) $\sin(45°+\alpha)-\cos(45°-\alpha)$.

第二节　直角三角形的解法及其应用

一、直角三角形的解法

在三角形的三个角与三条边这六个元素中，已知某些元素，求出其余的未知元素，叫做解三角形.

在直角三角形的六个元素中，除了直角以外，只要知道任意两个元素（其中至少有一个是边长），就能求出其余的元素.

1. 已知一边和一锐角解直角三角形

例1　在直角△ABC中(图8—10)，已知$AB=20$，$\angle A=66°$，求$\angle B$，BC，AC.

解: $\angle B=90°-\angle A=90°-66°=24°$,

$\because\ \sin A=\frac{BC}{AB}$,

$\therefore\ BC=AB\sin A=20\times\sin 66°$

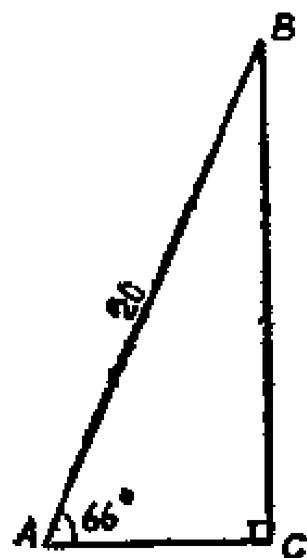


图8—10

$= 20 \times 0.9135 = 18.27.$

又 ∵ $\cos A = \frac{AC}{AB}$,

∴ $AC = AB\cos A = 20 \times \cos 66° = 20 \times 0.4067 \doteq 8.13.$

例 2 在直角△ABC中（图 8—11），已知 $a=15$，$\angle A = 35°27'$，求$\angle B$、b、c.

解： $\angle B = 90° - \angle A = 90° - 35°27' = 54°33'$,

∵ $\operatorname{ctg} A = \frac{b}{a}$,

∴ $b = a\operatorname{ctg} A = 15 \times \operatorname{ctg} 35°27' = 15 \times 1.4045 \doteq 21.07.$

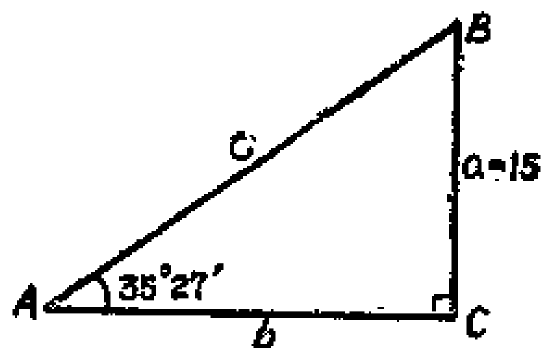


图 8—11

又 ∵ $\sin A = \frac{a}{c}$,

∴ $c = \frac{a}{\sin A} = \frac{15}{\sin 35°27'} = \frac{15}{0.5800} \doteq 25.86.$

或由勾股定理，得

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{15^2 + 21.07^2} \doteq 25.86.$$

2.已知两边解直角三角形

例 3 在直角△ABC中（图 8—12），已知$AB=10$，$BC=7$，求AC，$\angle A$，$\angle B$.

解： $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{10^2 - 7^2} = \sqrt{51} = 7.141$,

∵ $\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{7}{10} = 0.7$,

∴ $\angle A = 44°25'$,

$\angle B = 90° - \angle A = 90° - 44°25' = 45°35'.$

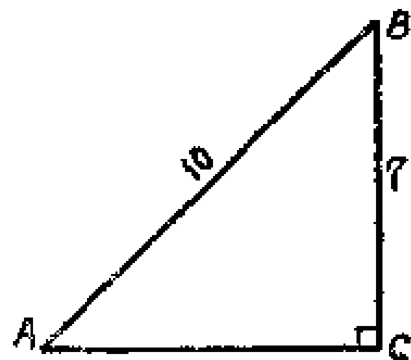


图 8—12

二、应用举例

毛主席教导我们：“**抓着了世界的规律性的认识，必须把它再回到改造世界的实践中去，再用到生产的实践、革命的阶级斗争和民族斗争的实践以及科学实验的实践中去。**”

现在我们应用前面学过的三角知识，来解决一些实际问题.

1.等分圆周问题

第七章我们已经介绍了等分圆周的两种方法：等分圆心角法和等弦法．在这里我们详细介绍等弦法中弦长的计算公式，先看下面的例题：

例 1 在圆形工件上面的一个直径为 440 毫米的圆周上，加工10个等距离的圆孔，求相邻两孔的中心距 AB（图 8—13）.

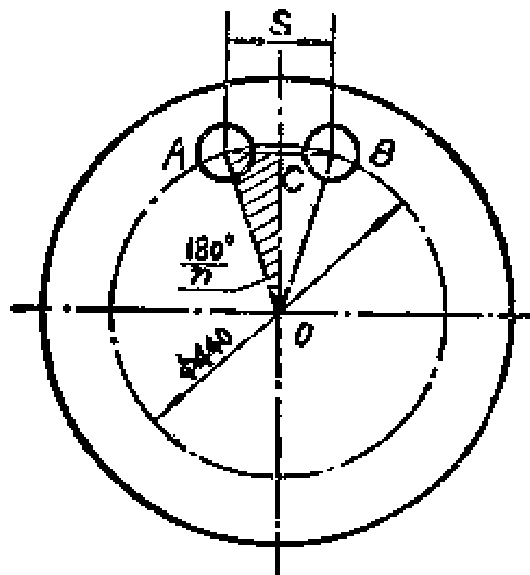


图 8—13

解： 作$OC \perp AB$，则

$$\angle AOC=\frac{1}{2}\cdot\frac{360^\circ}{10}=\frac{360^\circ}{20}=18^\circ,$$

$$AB=2AC=2AO\sin\angle AOC=440\times\sin 18^\circ$$
$$=440\times 0.309\doteq 136\text{毫米}.$$

答：相邻两孔的中心距为136毫米．

在生产实践中，常常要求把圆周任意等分．例如在制造电机转子、定子的冲模时，常需把圆周分为18、24等分等．用类似上面的方法，可以推导出任意等分圆周的弦长公式来．

设圆的直径为D，若将圆周分成n等分，则相邻两孔的中心距应为：

$$S=D\times\sin\frac{180^\circ}{n}=D\times K.$$

其中$K=\sin\frac{180^\circ}{n}$叫做等分圆周系数，在实际应用时可以查表．

2．锥形工件的锥度和斜度的计算

在机械加工厂里，经常切削截头圆锥形的工件，如拔梢、车床顶尖等．

在锥形工件中（见图8—14），2α叫做锥角，α叫做斜角．

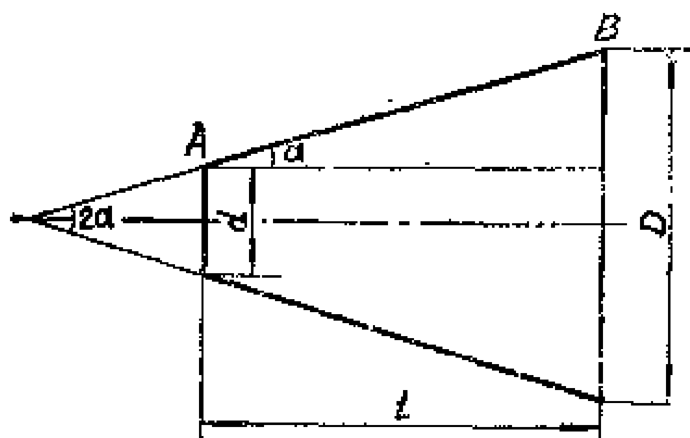


图8—14

从图8—14中可以看出：

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\frac{D-d}{2}}{l}=\frac{D-d}{2l}.$$

$\operatorname{tg}\alpha$叫做斜度，$2\operatorname{tg}\alpha$叫做锥度．如果锥度用K来表示，那末

$$K=2\operatorname{tg}\alpha=\frac{D-d}{l}.$$

例2　红卫电机厂的革命群众，发扬"**自力更生**"、"**艰苦奋斗**"的革命精神，自己动手制造锥体刻度盘（图8—15）．已知大头直径$D=82$毫米，小头直径$d=50$毫米，锥体长$l=17$毫米，问加工时车床的小拖板需调转多大角度？

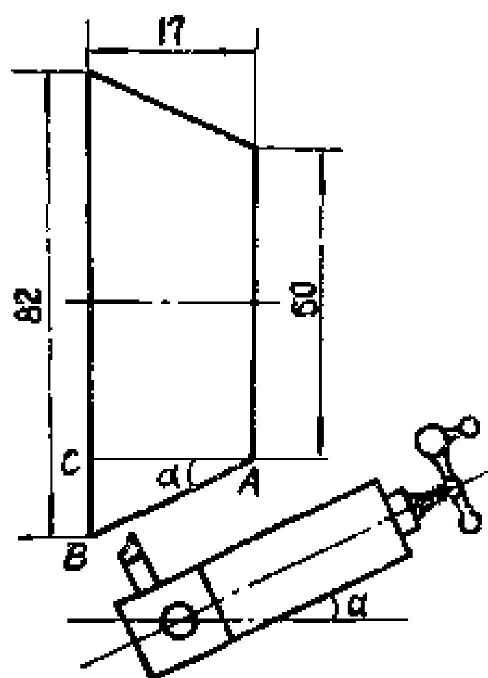


图8—15

解：由图可见，小拖板转动的角度应等于锥体的斜角α，所以

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{BC}{AC}=\frac{\frac{D-d}{2}}{l}=\frac{D-d}{2l}$$

$$=\frac{82-50}{34}=\frac{32}{34}=0.9412,$$

查表得 $\alpha=43°16'$.

答：小拖板需转动43°16'.

3.皮带长度的计算

设 皮带轮直传动（图8—16），已知大轮的直径为D，小轮的直径为d，它们的圆心距为a，求皮带的长度L。

由图8—18知皮带的长度：

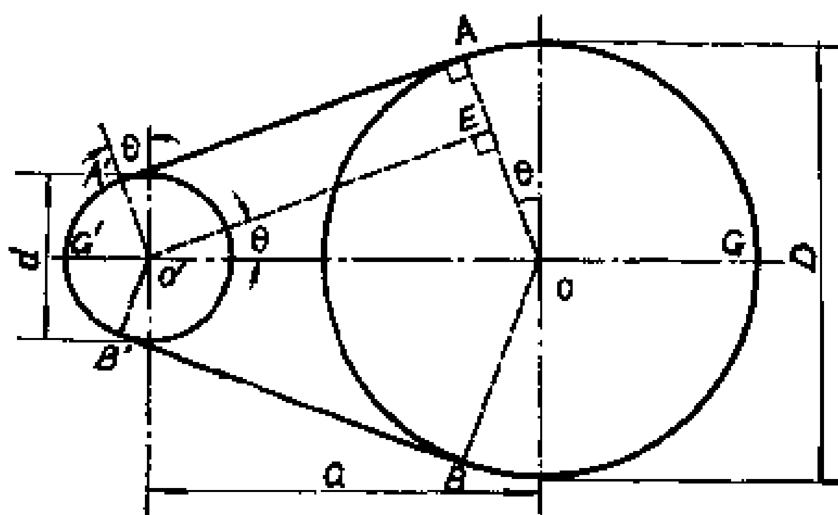


图8—16

$$L=\overset{\frown}{BGA}+\overset{\frown}{A'G'B'}+AA'+BB',$$

而
$$\overset{\frown}{BGA}=\pi\cdot\frac{D}{2}+2\theta\cdot\frac{D}{2}=\frac{D}{2}(\pi+2\theta),$$

$$\overset{\frown}{A'G'B'}=\pi\cdot\frac{d}{2}-2\theta\cdot\frac{d}{2}=\frac{d}{2}(\pi-2\theta),$$

$$AA'=BB'=O'E=\sqrt{OO'^2-OE^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{D-d}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{4a^2-(D-d)^2}.$$

所以
$$\boxed{L=\frac{\pi}{2}(D+d)+\theta(D-d)+\sqrt{4a^2-(D-d)^2}}$$

其中θ用弧度表示.

怎样求θ？

由图8—16可以看出，在直角$\triangle O'OE$中，

$$\sin\theta=\frac{OE}{O'O}=\frac{\frac{D-d}{2}}{a}=\frac{D-d}{2a}.$$

由$\sin\theta$的值可查表求出角θ（化为弧度）.

例3 已知$D=300$毫米，$d=200$毫米，$a=2000$毫米，求皮带的长度L.

解： $\because$ $\sin\theta=\frac{D-d}{2a}=\frac{300-200}{4000}=0.025,$

$\therefore$ $\theta=1°26'=0.025$（弧度）.

$\therefore$ $L=\frac{\pi}{2}(300+200)+0.025(300-200)+\sqrt{4\times(2000)^2-(300-200)^2}$

$\doteq 250\pi+2.5+3998=4786$（毫米）.

答：皮带的长度为4786毫米.

习　题

1. 设在$\triangle ABC$中，$\angle C=90°$，解下列直角三角形：

(1) 已知$\angle A=25°$、$c=10$，求$\angle B$、a、b；

(2) 已知$\angle A=47°$、$b=15$，求$\angle B$、a、c；

(3) 已知$\angle A=40°$、$a=14.2$，求$\angle B$、b、c；

(4) 已知$a=5$、$b=12$，求c、$\angle A$、$\angle B$；

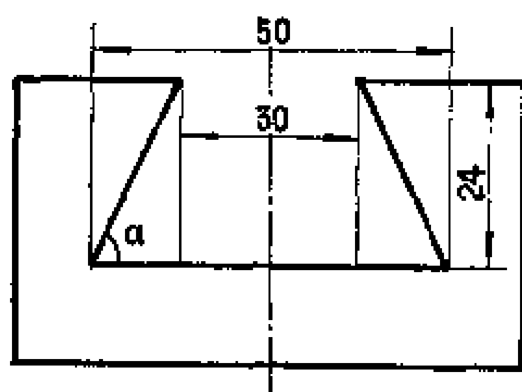
(5) 已知$a=22$、$c=110$，求b、$\angle A$、$\angle B$；

(6) 已知$b=150$、$c=180$，求a、$\angle A$、$\angle B$.

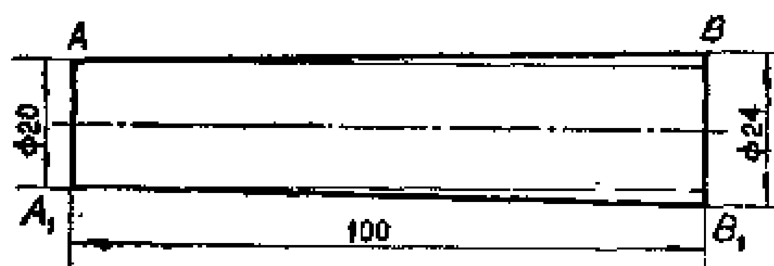
2. 在圆形工件上面的一个直径为150毫米的圆周上，钻上八个等距离的圆孔，问相邻两孔的中心距为多少？

3. 燕尾槽的尺寸如图所示，求燕尾角α.

4. 车工师傅要加工一个拔梢，尺寸如图所示，问加工时应将小刀架搬动多大的角度？



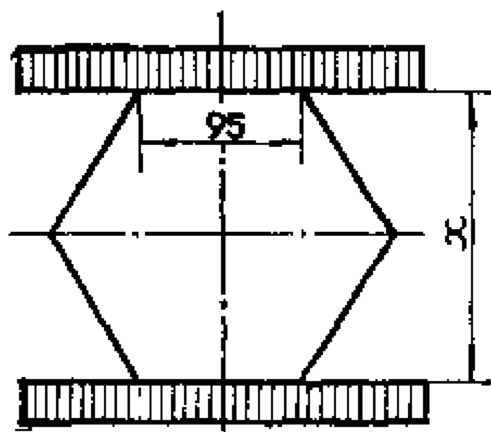
（第3题）



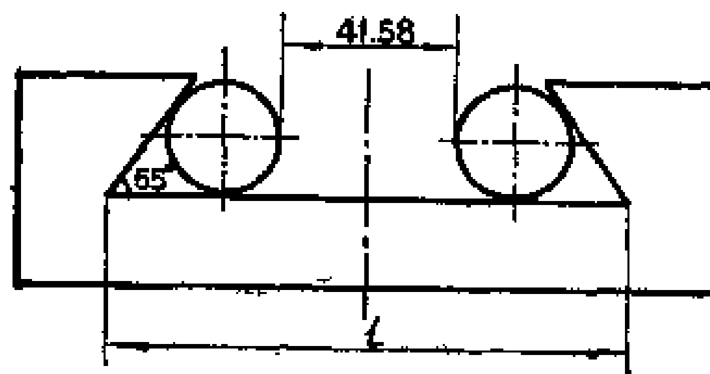
（第4题）

5. 工人师傅加工边长为95毫米的六角螺帽，原用一把铣刀加工，现用两把铣刀同时加工，试计算出两把铣刀间的距离x，见图.

6. 一个燕尾槽的燕尾角为55°，用直径为20毫米的两根钢柱测量，测得两钢柱之间的距离为41.58毫米.求燕尾槽两顶尖之间的距离l（见图）.



（第5题）

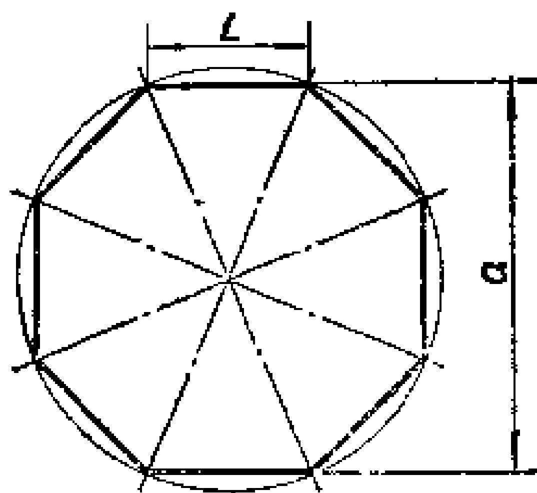


（第6题）

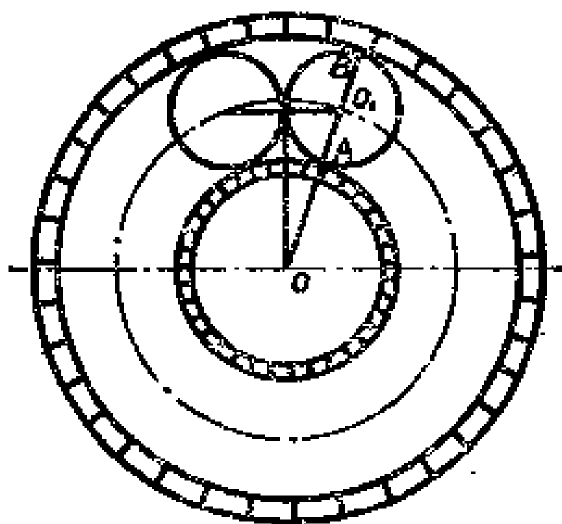
7. 工人师傅常用公式：$A=0.8284a^2$或$A=4.828l^2$（其中a为对边距离，l为边长）计算八角钢的面积.试证明这二个公式（见图）.

8. 在一轴承内有20个直径为16毫米的钢珠紧密地排列着，试求出轴承的内圆半径

OA和外圆半径OB（精确到0.01毫米）．（见图）．



（第7题）



（第8题）

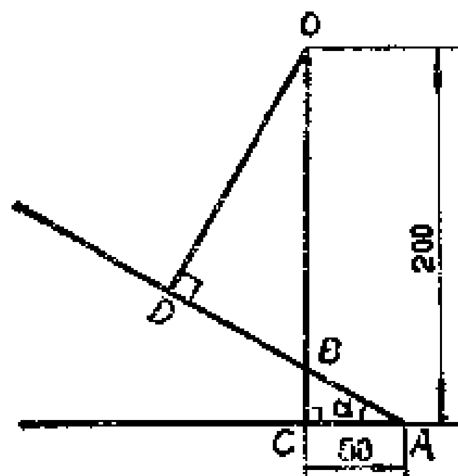
9．皮带轮直传动，已知大小轮的半径及其中心距分别为：

（1）$R=275$毫米，$r=175$毫米，$a=5000$毫米；

（2）$R=30$厘米，$r=13$厘米，$a=244$厘米．

试分别求出皮带的长度．

10．某车间在进行一项磨床设计时，需要计算磨床中心架O到导轨底面的距离OD（如图）．已知$AC=50$毫米，$OC=200$毫米，道轨角度$\alpha=30°$，求OD．



（第10题）

复　习　题

1．在直角三角形ABC中，已知$c=25$，$a=24$，求$\sin A$、$\cos A$、$\mathrm{tg} A$、$\sin B$、$\cos B$、$\mathrm{tg} B$的值．

2．下列各式的值等于多少？

（1）$\sin 74°-\cos 16°$；　　（2）$\mathrm{tg}57°\cdot\mathrm{ctg}57°$；

（3）$\mathrm{tg}74°\cdot\mathrm{tg}16°$；　　（4）$\mathrm{ctg}38°\cdot\mathrm{ctg}52°$．

3．由下列α的三角函数值，求α的其他三角函数值：

（1）$\sin\alpha=0.8$；　　（2）$\cos\alpha=\frac{2}{7}$；

（3）$\mathrm{tg}\alpha=\frac{7}{24}$；　　（4）$\mathrm{ctg}\alpha=7$．

4．计算下列各式的值：

（1）$2\sin 60°\cos 60°$；

（2）$2\cos 30°-4\cos 45°+\mathrm{tg}60°$；

（3）$3\mathrm{tg}30°+\mathrm{ctg}45°-2\mathrm{tg}45°+2\cos 60°$；

（4）$\frac{\cos 60°}{1+\sin 60°}+\frac{1}{\mathrm{tg}30°}$；

（5）$3\mathrm{ctg}^2 60°+\mathrm{tg}45°-2\mathrm{ctg}45°+\mathrm{ctg}^2 30°$．

5.计算下列各式的值:

(1) $\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{6}+2\sin\frac{\pi}{3}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{3}+\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$;

(2) $\cos^2\frac{\pi}{3}-\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{4}+\frac{3}{4}\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{6}+\cos^2\frac{\pi}{6}$.

6.化简:

(1) $1-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$;

(2) $\sin^2 62°+\sin^2 28°$;

(3) $\sin^2\alpha(1+\operatorname{tg}^2\alpha)$;

(4) $\frac{1}{\operatorname{ctg}72°}\times\frac{1}{\operatorname{ctg}18°}-\cos^2 30°$;

(5) $1-\sin^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha\cdot\sin^2\alpha$;

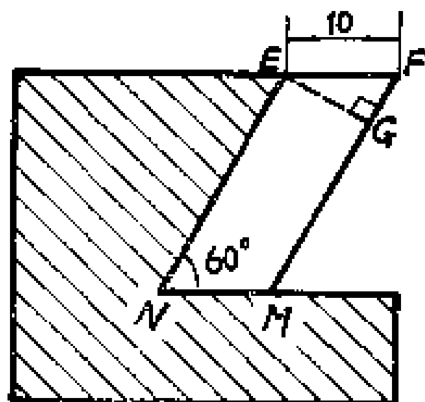
(6) $\frac{\sin^2\alpha+\sin^2(90°-\alpha)}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(90°-\alpha)}$;

(7) $\sqrt{1-\cos^2\alpha}-\operatorname{tg}\alpha\sqrt{1-\sin^2\alpha}$;

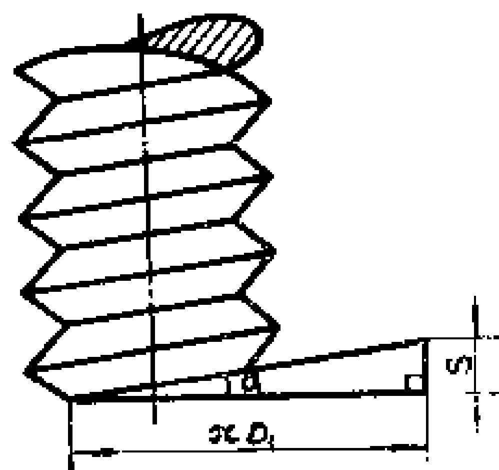
(8) $\operatorname{ctg}58°\cdot\operatorname{ctg}45°\cdot\operatorname{ctg}32°$.

7.如图，$\square EFMN$表示燕尾槽镶条．图纸上一般都注明边宽EF，而实际加工时需要知道厚度EG．设边宽$EF=10$毫米，燕尾角为60°，求厚度EG．

8.如图，已知一个单头螺杆内径$D_1=20.1$毫米，螺旋角$\alpha=8°30'$，求螺距S．



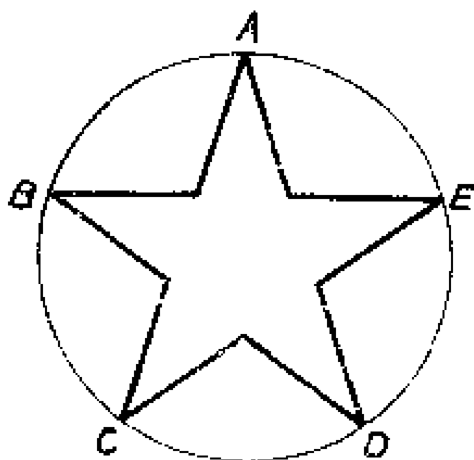
（第7题）



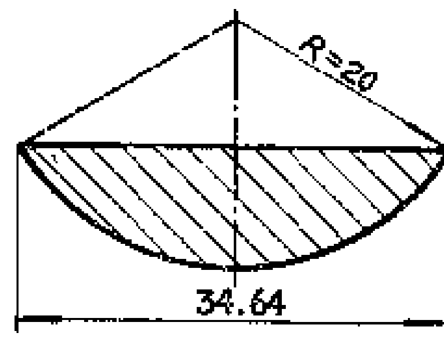
（第8题）

9.在半径为10厘米的圆内，作内接正五角星$ABCDE$（如图），求五角星的顶点A和B的距离以及A和C的距离．

10.钢材的断面为弓形，尺寸如图所示，求截面积．



（第9题）



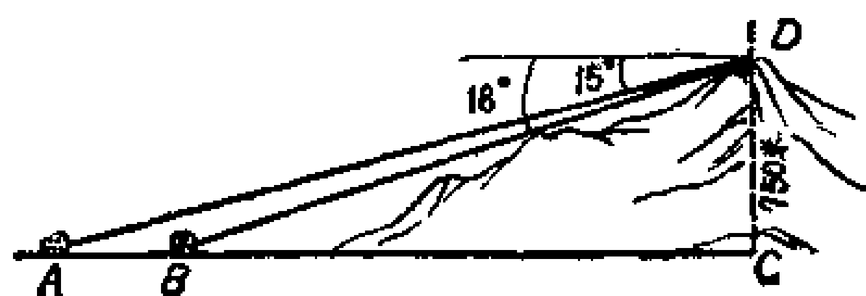
（第10题）

11.我侦察兵，在750米的高山D处，测得正前方敌人的两个火力点A、B的俯角分别为15°、18°（见图）.求两火力点间的距离（精确到1米）.

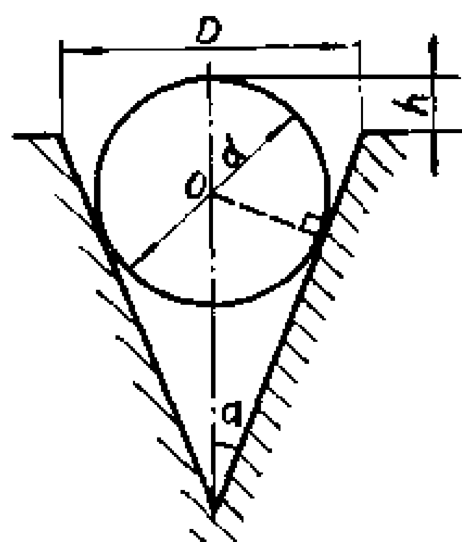
12.测量一个已知斜角是α的圆锥孔的大头直径D,可以把直径是d的钢球放进锥孔，用深度尺量出钢球露出工件部分的高度h，然后用下面的公式计算D:

$$D=\left(\frac{d}{\sin\alpha}+d-2h\right)\cdot\operatorname{tg}\alpha$$

试证明这个公式.



（第11题）



（第12题）

第九章　任意角的三角函数

随着生产和科学技术的不断发展，人们对于三角函数的认识也不断发展，任意角的三角函数就是由于锐角三角函数满足不了生产实践的需要而发展起来的.

第一节　任意角三角函数的概念

一、任意角

在第六章里我们知道，角可以看成由一条射线在平面内绕着它的端点旋转而成的. 当射线绕着它的端点旋转一周以上时，就形成大于 $360°$ 的角（图 9—1）.

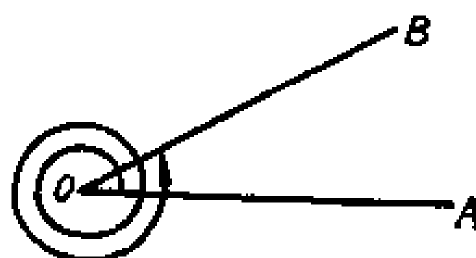


图 9—1

相互啮合的两个齿轮（图 9—2），当一个齿轮按逆时针方向旋转一个角时，另一个齿轮就按顺时针方向旋转一个角. 为了区别这两个相反的方向所形成的角，习惯上规定：按逆时针方向旋转所成的角叫做正角；按顺时针方向旋转所成的角叫做负角.

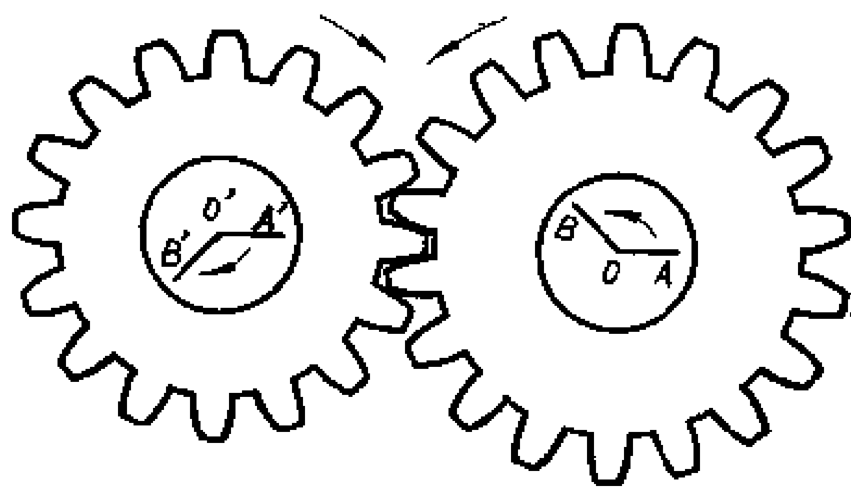


图 9—2

为了研究上的方便，我们把一个角的顶点放在平面直角坐标系的原点上，把角的始边放在 x 轴的正方向上. 这样，角的终边在第几象限，就把这个角叫做第几象限的角. 但是终边在 x 轴上或 y 轴上的角，不属于任何象限. 例如 $390°$，$150°$，$-120°$，$-60°$ 的角分别是第一、第二、第三、第四象限的角（图 9—3）；而 $0°$，$90°$，$180°$，$-90°$ 等角就不属于任何象限.

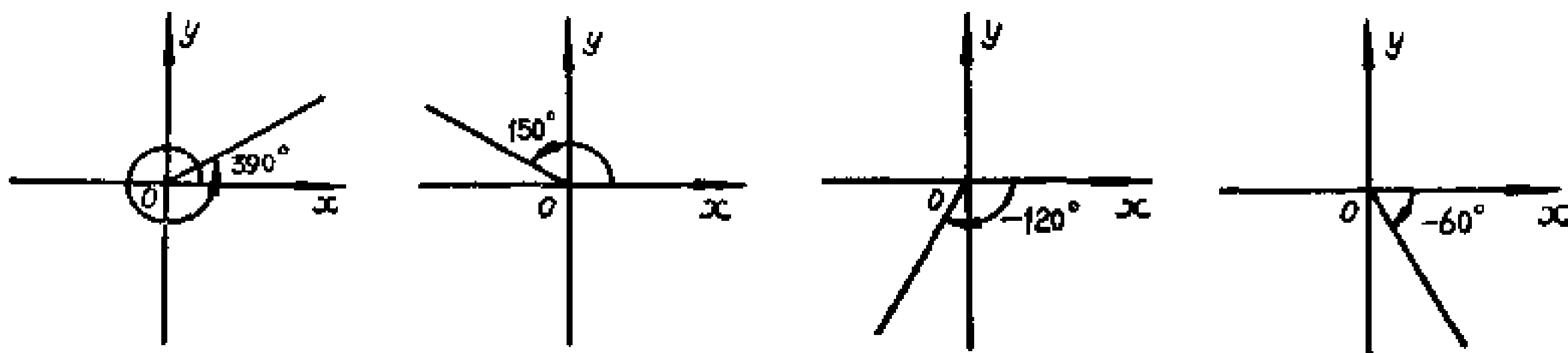


图 9—3

由图 9—4 可以看出，$390°$、$-330°$ 的角都和 $30°$ 角的终边相同. 它们可分别写成：

$$390° = 360° + 30°; \qquad -330° = -360° + 30°.$$

和 $30°$ 角终边相同的角还有：

$2\times 360°+30°$;　　　$-2\times 360°+30°$;

$3\times 360°+30°$;　　　$-3\times 360°+30°$;

……　　　　……

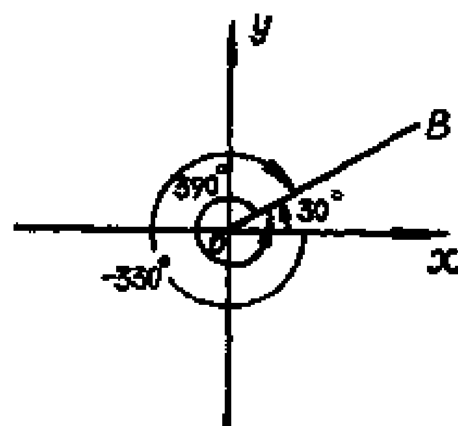


图 9 — 4

于是，所有和30°角终边相同的角，连同30°角在内，都可用下面的式子表示：

$$K\cdot 360°+30° \qquad (K=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots).$$

一般地，所有和角 α 的终边相同的角，连同角 α 在内，都可用下面的式子表示：

$$K\cdot 360°+\alpha \quad (K\text{是整数}).$$

如果角 α 是用弧度制表示的，则有

$$2K\pi+\alpha \quad (K\text{是整数}).$$

例　试在 0°到360°（或 0 到 2π）范围内，找出与下面各角终边相同的角．

（1）$-120°$;　　　（2）$640°$;　　　（3）$\frac{20\pi}{3}$．

解：（1）$\because\ -120°=-360°+240°$,

$\therefore$ 在0°－360°范围内与－120°角终边相同的角为240°;

（2）$\because\ 640°=360°+280°$,

$\therefore$ 在0°－360°范围内与640°角终边相同的角为280°;

（3）$\because\ \frac{20\pi}{3}=\frac{18\pi+2\pi}{3}=6\pi+\frac{2}{3}\pi$,

$\therefore$ 在 0 到 2π 范围内与 $\frac{20\pi}{3}$ 角终边相同的角为 $\frac{2\pi}{3}$.

二、任意角三角函数

1．任意角三角函数的定义

现在我们借助于直角坐标系来定义任意角的三角函数．

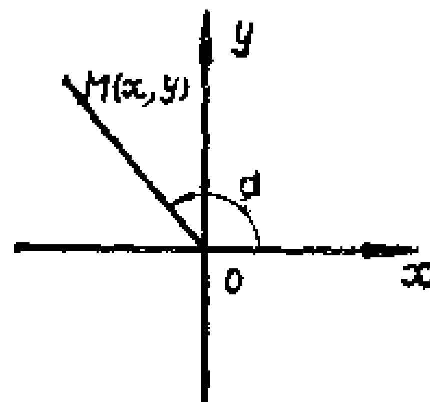


图 9 — 5

在角 α 的终边上任取一点 $M(x,y)$，设 M 到原点的距离为 R，显然，$R=\sqrt{x^2+y^2}$（图 9 — 5）．

角 α 的终边上任一点的纵坐标 y 和这点到原点的距离 R 的比，叫做角 α 的正弦，记作 $\sin\alpha$．即

$$\sin\alpha=\frac{y}{R}$$

角 α 的终边上任一点的横坐标 x 和这点到原点的距离 R 的比，叫做角 α 的余弦，记作 $\cos\alpha$．即

$$\cos\alpha=\frac{x}{R}$$

角 α 的终边上任一点的纵坐标 y 和横坐标 x 的比，叫做角 α 的正切，记作 $\operatorname{tg}\alpha$. 即

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}$$

角 α 的终边上任一点的横坐标 x 和纵坐标 y 的比，叫做角 α 的余切，记作 $\operatorname{ctg}\alpha$. 即

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}$$

正割和余割我们规定为:

$$\sec\alpha=\frac{R}{x}$$

$$\csc\alpha=\frac{R}{y}$$

显然，$\sin\alpha$、$\cos\alpha$、$\operatorname{tg}\alpha$、$\operatorname{ctg}\alpha$、$\sec\alpha$、$\csc\alpha$都是α的函数.它们统称为三角函数. 同锐角三角函数一样，今后我们着重研究前四个三角函数.

例 1 已知角 α 终边上一点的坐标为$M(-8, 6)$，求 α 的三角函数值.

解: $\because$ $x=-8$, $y=6$,

$\therefore$ $R=\sqrt{(-8)^2+6^2}=10$.

根据三角函数的定义有

$$\sin\alpha=\frac{y}{R}=\frac{6}{10}=\frac{3}{5};$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{R}=\frac{-8}{10}=-\frac{4}{5};$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}=\frac{6}{-8}=-\frac{3}{4};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}=\frac{-8}{6}=-\frac{4}{3}.$$

例 2 根据三角函数的定义试求: $0°$、$90°$、$180°$、$270°$ 角的三角函数值.

解: (1) $\because$ 当 $\alpha=0°$时， $x=R$, $y=0$,

$\therefore$ $\sin0°=0$; $\cos0°=1$;

$\operatorname{tg}0°=0$; $\operatorname{ctg}0°$ 不存在 (因分母为零).

(2) $\because$ 当 $\alpha=90°$时， $x=0$, $y=R$,

$\therefore$ $\sin90°=1$; $\cos90°=0$;

$\operatorname{tg}90°$不存在; $\operatorname{ctg}90°=0$.

同理可得：

(3) $\sin 180° = 0$； $\cos 180° = -1$；

$\operatorname{tg} 180° = 0$； $\operatorname{ctg} 180°$不存在。

(4) $\sin 270° = -1$； $\cos 270° = 0$；

$\operatorname{tg} 270°$不存在； $\operatorname{ctg} 270° = 0$。

由三角函数的定义可以知道：

(1) 当 α 为锐角时，上述的定义和第八章锐角三角函数的定义完全一致.

(2) 正弦函数和余弦函数的值介于 -1 与 1 之间.即

$$-1 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1, \qquad -1 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1.$$

2.三角函数在各象限的正负号

例1、例2的结果表明，任意角三角函数的值有正有负．事实上，由于各象限内点的坐标符号不同，因此，根据三角函数的定义，三角函数值也应该有正有负，它的符号可根据角的终边所在的象限来确定．三角函数在各象限的正负号，如图9－6所示：因为y在第一、二象限为正，第三、四象限为负，所以正弦函数在第一、二象限是正的，第三、四象限是负的.根据同样的分析，可得其余三角函数在各象限的正负号。

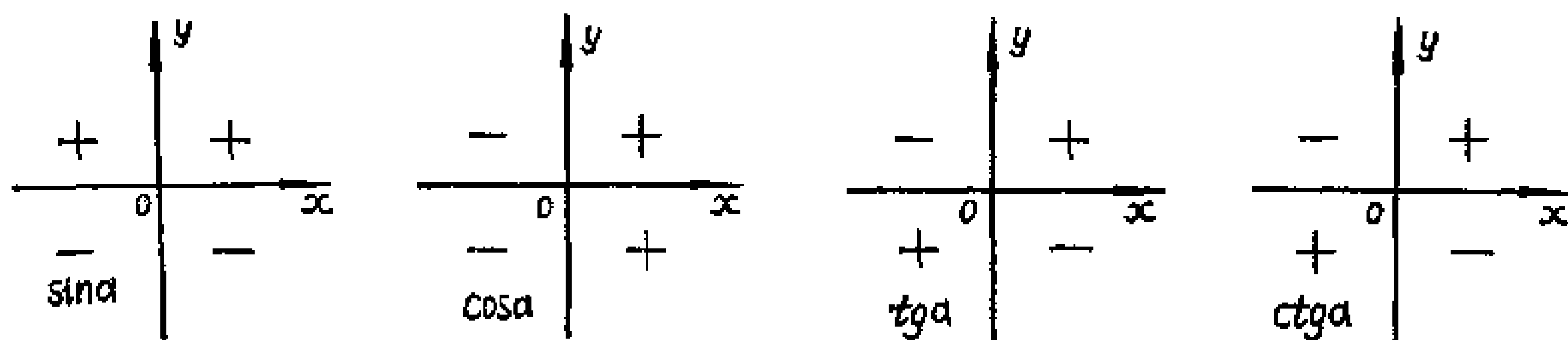


图9－6

例3 确定下列各角的三角函数值的正负号：

(1) $120°$； (2) $345°$； (3) $-135°$； (4) $395°$.

解：(1) $\because$ $90° < 120° < 180°$，即$120°$角的终边在第二象限，

$\therefore$ $\sin 120° > 0$，$\cos 120° < 0$，$\operatorname{tg} 120° < 0$，$\operatorname{ctg} 120° < 0$；

(2) $\because$ $270° < 345° < 360°$，即$345°$角的终边在第四象限，

$\therefore$ $\sin 345° < 0$，$\cos 345° > 0$，$\operatorname{tg} 345° < 0$，$\operatorname{ctg} 345° < 0$；

同理可得：

(3) $\sin(-135°) < 0$，$\cos(-135°) < 0$，$\operatorname{tg}(-135°) > 0$，

$\operatorname{ctg}(-135°) > 0$；

(4) $\sin 395° > 0$，$\cos 395° > 0$，$\operatorname{tg} 395° > 0$，$\operatorname{ctg} 395° > 0$。

习 题

1.在直角坐标系中作出下列各角：

(1) $405°$； (2) $-165°$； (3) $280°$； (4) $-\frac{5\pi}{3}$.

2.试确定下列各角所在的象限:

(1) $200°$;　(2) $89°50'$;　(3) $-295°$;　(4) $550°$;

(5) $\frac{\pi}{4}$;　(6) $\frac{7\pi}{4}$;　(7) $-\frac{7}{6}\pi$;　(8) $\frac{11\pi}{3}$.

3.试在 $0°$到$360°$(或 0 到 2π)范围内,找出与下列各角终边相同的角:

(1) $480°$;　(2) $750°$;　(3) $1500°$;　(4) $-585°$;

(5) $\frac{13\pi}{3}$;　(6) $\frac{23\pi}{4}$;　(7) $\frac{50\pi}{3}$;　(8) $-\frac{19}{2}\pi$.

4.设角的终边上一点的坐标是:

(1) $(3,4)$; (2) $(2,-1)$; (3) $(-5,12)$; (4) $(-8,-6)$.

求这些角的正弦、余弦、正切和余切的值.

5.决定下列积或商的正负号:

(1) $\sin 105°\cos 95°$;　(2) $\dfrac{\cos\frac{11}{6}\pi}{\operatorname{tg}\frac{5}{4}\pi}$;　(3) $\sin^2 210°\cdot\cos^2(-210°)$;

(4) $\operatorname{tg}284°\cdot\operatorname{ctg}157°$.

6.依照下列条件,分别求 $0°$ 到$360°$的角 α 所在的象限:

(1) $\sin\alpha$ 和$\cos\alpha$ 的正负号相同;

(2) $\sin\alpha$ 和 $\operatorname{tg}\alpha$ 的正负号相同;

(3) $\cos\alpha$ 和 $\operatorname{tg}\alpha$ 的正负号相同.

7.设 x 是三角形的一个内角,下列函数中的哪几个可以是负值?

(1) $\sin x$;　(2) $\cos x$;　(3) $\operatorname{tg} x$;　(4) $\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$.

8.求下列各式的值:

(1) $a\operatorname{tg}0°+b\operatorname{tg}180°+c\operatorname{ctg}90°$;

(2) $p^2\sin 90°-2pq\cos 0°-q^2\cos 180°$;

(3) $\sin\frac{\pi}{2}+2\cos\frac{\pi}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}$;　(4) $\sin 2\pi+\cos 2\pi-\cos\pi+\operatorname{tg}\pi$.

第二节　任意角三角函数值的计算

在这一节里,我们研究任意角三角函数和锐角三角函数之间的关系,从而解决任意角三角函数值的计算问题.

一、负角的三角函数

如果用 α 表示正角,那么 $-\alpha$ 就表示负角.为了找出负角的三角函数化为正角的三角函数的关系式,我们作如图 9—7 所示的单位圆.设角α、$-\alpha$ 的终边和单位圆的交点分别为$M(x, y)$、$M_1(x_1, y_1)$.

显然 $\triangle OM_1P \cong \triangle OMP$，

$\therefore\ x_1 = x,\ -y_1 = y$ 或 $y_1 = -y$.

(1) $\because\ \sin(-\alpha) = \dfrac{y_1}{OM_1} = -y$,

$\sin\alpha = \dfrac{y}{OM} = y$,

$\therefore\ \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$;

(2) $\because\ \cos(-\alpha) = \dfrac{x_1}{OM_1} = x$,

$\cos\alpha = \dfrac{x}{OM} = x$,

$\therefore\ \cos(-\alpha) = \cos\alpha$;

(3) $\because\ \text{tg}(-\alpha) = \dfrac{y_1}{x_1} = -\dfrac{y}{x}$,

$\text{tg}\alpha = \dfrac{y}{x}$,

$\therefore\ \text{tg}(-\alpha) = -\text{tg}\,\alpha$;

(4) $\because\ \text{ctg}(-\alpha) = \dfrac{x_1}{y_1} = -\dfrac{x}{y}$,

$\text{ctg}\,\alpha = \dfrac{x}{y}$,

$\therefore\ \text{ctg}(-\alpha) = -\text{ctg}\alpha$.

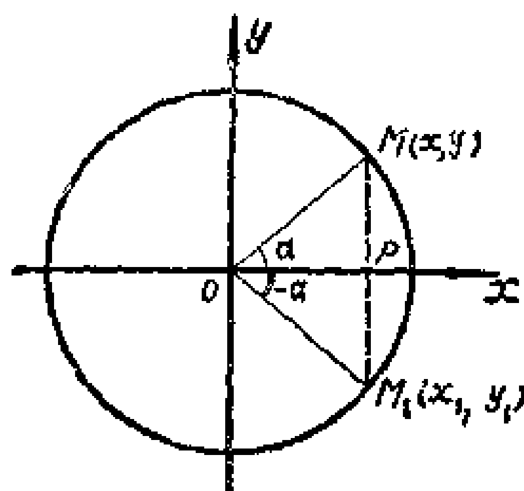


图 9—7

综合起来有：

$$
\boxed{\begin{aligned}
\sin(-\alpha) &= -\sin\alpha \\
\cos(-\alpha) &= \cos\alpha \\
\text{tg}(-\alpha) &= -\text{tg}\,\alpha \\
\text{ctg}(-\alpha) &= -\text{ctg}\,\alpha
\end{aligned}} \qquad (1)
$$

公式 (1) 对于任意角 α 都成立.

例1 求： $\sin(-45°)$、$\cos(-30°)$、$\text{tg}(-15°30')$的值.

解： $\sin(-45°) = -\sin45° = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

$\cos(-30°) = \cos30° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

$\text{tg}(-15°30') = -\text{tg}15°30' = -0.2773$.

二、大于360°角的三角函数

根据任意角三角函数的定义可以知道，所有终边相同的角的三角函数值都是相等的.

例如：　　$\sin 390° = \sin 30°$；

$\cos 390° = \cos 30°$.

一般地，角 $K\cdot 360°+\alpha$（其中K为整数）的三角函数值和角α的三角函数值都是相等的．即

$$\boxed{\begin{aligned}&\sin(K\cdot 360°+\alpha)=\sin\alpha\\&\cos(K\cdot 360°+\alpha)=\cos\alpha\\&\mathrm{tg}(K\cdot 360°+\alpha)=\mathrm{tg}\,\alpha\\&\mathrm{ctg}(K\cdot 360°+\alpha)=\mathrm{ctg}\,\alpha\end{aligned}} \qquad (2)$$

例2　求下列三角函数值：

（1）$\sin 405°$；　（2）$\cos 750°$；　（3）$\mathrm{tg}1140°$.

解：（1）$\sin 405° = \sin(360°+45°) = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$；

（2）$\cos 750° = \cos(2\times 360°+30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$；

（3）$\mathrm{tg}1140° = \mathrm{tg}(3\times 360°-60°) = \mathrm{tg}60° = \sqrt{3}$.

由此可见，利用公式（2）可以把大于360°角的三角函数化为小于360°角的三角函数．

三、90°到360°角的三角函数

利用公式（1）我们可以把负角的三角函数化为正角的三角函数，因此要计算任意角的三角函数值，只需研究正角的就够了．而由公式（2），大于360°角的三角函数可化为小于360°角的三角函数，所以，只要能求出90°到360°角的三角函数值，任意角三角函数值的计算问题就解决了．

90°到360°之间的角可用下面的方法表示：

终边在第二象限的角，可表示成$180°-\alpha$，其中α为锐角．同样，终边在第三象限的角，可表示成$180°+\alpha$；终边在第四象限的角，可表示成$360°-\alpha$，其中α都是锐角．

下面分别研究$180°-\alpha$、$180°+\alpha$、$360°-\alpha$与锐角α的三角函数间的关系．

1．$180°-\alpha$与锐角α的三角函数间的关系

作单位圆（图9—8）．设α、$180°-\alpha$的终边和单位圆的交点分别为$M(x, y)$、$M_1(x_1, y_1)$.

从图中可以看出：$\because\ \triangle OM_1P_1 \cong \triangle OMP$,

$\therefore\ y_1 = y,\ -x_1 = x$或$x_1 = -x$.

（1）$\because\ \sin(180°-\alpha) = \frac{y_1}{OM_1} = y$,

$\sin\alpha = y$,

$\therefore\ \sin(180°-\alpha) = \sin\alpha$；

（2）$\because\ \cos(180°-\alpha) = \frac{x_1}{OM_1} = -x$,

$\cos\alpha = x$,

$\therefore\ \cos(180°-\alpha) = -\cos\alpha$；

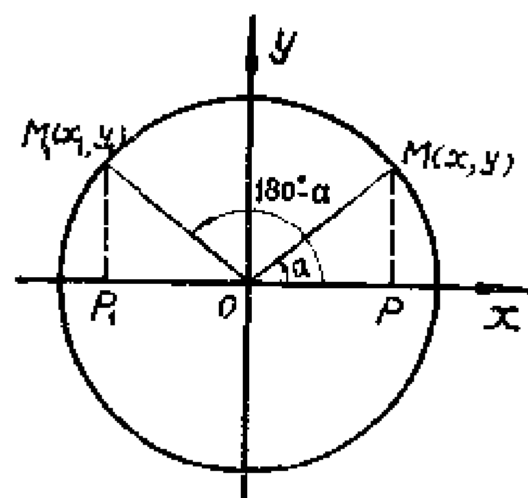


图9—8

(3) $\because \quad \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = \dfrac{y_1}{x_1} = -\dfrac{y}{x}$,

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y}{x}$,

$\therefore \quad \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$;

(4) $\because \quad \operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = \dfrac{x_1}{y_1} = -\dfrac{x}{y}$,

$\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{x}{y}$,

$\therefore \quad \operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$.

综合起来有：

$$\boxed{\begin{aligned} &\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha \\ &\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha \\ &\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha \\ &\operatorname{ctg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha \end{aligned}} \tag{3}$$

2.$180^\circ + \alpha$、$360^\circ - \alpha$ 与锐角 α 的三角函数间的关系

由图 9 — 9 和图 9 —10分别得：

$$\boxed{\begin{aligned} &\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin\alpha \\ &\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha \\ &\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha \\ &\operatorname{ctg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha \end{aligned}} \tag{4}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\sin(360^\circ - \alpha) = -\sin\alpha \\ &\cos(360^\circ - \alpha) = \cos\alpha \\ &\operatorname{tg}(360^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha \\ &\operatorname{ctg}(360^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha \end{aligned}} \tag{5}$$

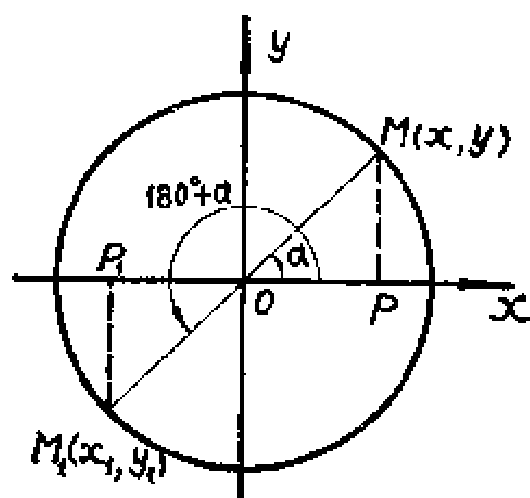


图 9 — 9

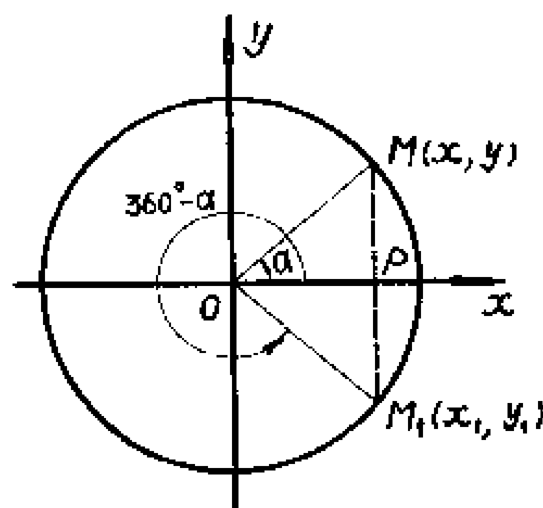


图 9 —10

例 3　求下列各角的三角函数值(1) 135°；(2) 255°；(3) 330°.

解：　(1) $\because$　$135° = 180° - 45°$,

$\therefore$　$\sin 135° = \sin(180° - 45°) = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

同理　$\cos 135° = -\cos 45° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

$\mathrm{tg}\, 135° = -\mathrm{tg}\, 45° = -1$;

$\mathrm{ctg}\, 135° = -\mathrm{ctg}\, 45° = -1$.

(2) $\because$　$255° = 180° + 75°$,

$\therefore$　$\sin 255° = \sin(180° - 75°) = -\sin 75° = -0.9659$;

同理　$\cos 255° = -\cos 75° = -0.2588$;

$\mathrm{tg}\, 255° = \mathrm{tg}\, 75° = 3.732$;

$\mathrm{ctg}\, 255° = \mathrm{ctg}\, 75° = 0.2679$.

(3) $\because$　$330° = 360° - 30°$,

$\therefore$　$\sin 330° = \sin(360° - 30°) = -\sin 30° = -\frac{1}{2}$;

同理　$\cos 330° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\mathrm{tg}\, 330° = -\mathrm{tg}\, 30° = -\frac{\sqrt{3}}{3}$;

$\mathrm{ctg}\, 330° = -\mathrm{ctg}\, 30° = -\sqrt{3}$.

前面讲过的五组公式统称为诱导公式．这些公式，虽然是在α为锐角的情况下证明的，但当α为任意角时它们仍然成立．

例如：　$\sin(180° + 132°) = -\sin 132°$;

$\cos(360° - 250°) = \cos 250°$.

仔细地观察上述五组诱导公式，我们就会发现：

(1) 等号右端和左端三角函数的名称是相同的；

(2) 右端三角函数前的符号和左端的角所在象限的三角函数符号相同．可简单概括为"符号看象限"．

利用诱导公式，任意角三角函数就可以化为锐角三角函数．具体步骤如下：

第一步：把负角的三角函数化为正角的三角函数；

第二步：把正角的三角函数化为小于360°的角的三角函数；

第三步：把90°到360°角的三角函数化为锐角的三角函数．

例 4　求下列三角函数值：

(1) $\sin(-840°)$;　(2) $\cos(-916°)$;　(3) $\mathrm{tg}(-814°29')$;

(4) $\mathrm{ctg}(-315°)$.

解：　(1) $\sin(-840°) = -\sin 840° = -\sin(2 \times 360° + 120°) = -\sin 120°$

$= -\sin(180° - 60°) = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

(2) $\cos(-916°) = \cos 916° = \cos(2 \times 360° + 196°) = \cos 196°$

$$=\cos(180°+16°)=-\cos16°=-0.9613;$$

(3) $\operatorname{tg}(-814°29')=-\operatorname{tg}814°29'=-\operatorname{tg}(2\times360°+94°29')$

$$=-\operatorname{tg}94°29'=-\operatorname{tg}(180°-85°31')$$

$$=\operatorname{tg}85°31'=12.75;$$

(4) $\operatorname{ctg}(-315°)=-\operatorname{ctg}315°=-\operatorname{ctg}(360°-45°)=\operatorname{ctg}45°=1$.

例 5 求下列三角函数值:

(1) $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$; (2) $\cos\frac{11\pi}{6}$; (3) $\operatorname{tg}\frac{4\pi}{3}$; (4) $\operatorname{ctg}\frac{41\pi}{6}$.

解: (1) $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)=-\sin\frac{3\pi}{4}=-\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$;

(2) $\cos\frac{11\pi}{6}=\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$;

(3) $\operatorname{tg}\frac{4\pi}{3}=\operatorname{tg}\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$;

(4) $\operatorname{ctg}\frac{41\pi}{6}=\operatorname{ctg}\left(6\pi+\frac{5\pi}{6}\right)=\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{6}=\operatorname{ctg}\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}=-\sqrt{3}$.

例 6 试用任意角三角函数的定义证明下列公式:

$$\begin{cases}\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha\\ \cos(90°-\alpha)=\sin\alpha\\ \operatorname{tg}(90°-\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha\\ \operatorname{ctg}(90°-\alpha)=\operatorname{tg}\alpha\end{cases}\qquad(6)$$

证明: 如图 9—11所示，作单位圆. 设 α 是锐角，角 α、$90°-\alpha$ 的终边和单位圆的交点分别为 $M(x, y)$、$M_1(x_1, y_1)$.

∵ $\triangle OM_1P_1\cong\triangle OMP$,

∴ $x_1=y$, $y_1=x$.

因此 $\sin(90°-\alpha)=\frac{y_1}{OM_1}=\frac{x}{OM}=\cos\alpha$;

$\cos(90°-\alpha)=\frac{x_1}{OM_1}=\frac{y}{OM}=\sin\alpha$;

$\operatorname{tg}(90°-\alpha)=\frac{y_1}{x_1}=\frac{x}{y}=\operatorname{ctg}\alpha$;

$\operatorname{ctg}(90°-\alpha)=\frac{x_1}{y_1}=\frac{x}{y}=\operatorname{tg}\alpha$.

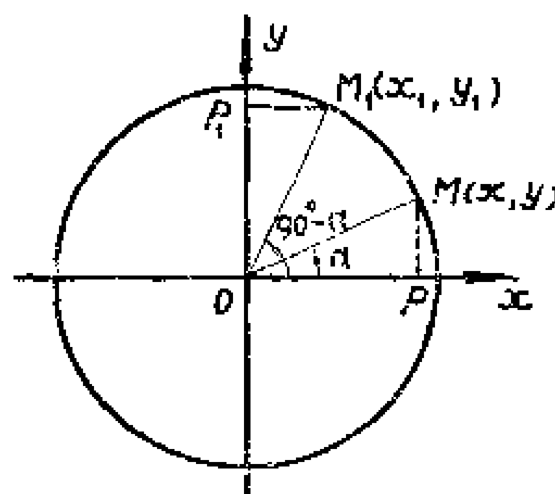


图 9—11

当 α 为任意角时，上面的公式仍然成立.

例 7　证明下列公式：

$$
\begin{array}{|l|}
\hline
\sin(90°+\alpha)=\cos\alpha \\
\cos(90°+\alpha)=-\sin\alpha \\
\mathrm{tg}(90°+\alpha)=-\mathrm{ctg}\,\alpha \\
\mathrm{ctg}(90°+\alpha)=-\mathrm{tg}\,\alpha \\
\hline
\end{array}
\qquad (7)
$$

证明： $\sin(90°+\alpha)=\sin(180°-90°+\alpha)=\sin[180°-(90°-\alpha)]$

$=\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha;$

$\cos(90°+\alpha)=\cos(180°-90°+\alpha)=\cos[180°-(90°-\alpha)]$

$=-\cos(90°-\alpha)=-\sin\alpha;$

$\mathrm{tg}(90°+\alpha)=\mathrm{tg}[180°-(90°-\alpha)]=-\mathrm{tg}(90°-\alpha)=-\mathrm{ctg}\,\alpha;$

$\mathrm{ctg}(90°+\alpha)=\mathrm{ctg}[180°-(90°-\alpha)]=-\mathrm{ctg}(90°-\alpha)=-\mathrm{tg}\alpha.$

已知一个角的三角函数值求角时，可以先按它的绝对值求出一个锐角；再根据三角函数值的符号，确定角所在的象限，从而求出适合条件的角。

例 8　已知：$\sin x=\frac{1}{2}$，求0°到360°间的角 x.

解：　因为正弦的值是正的，所以要求的角在第一象限或第二象限。

由　$\sin 30°=\frac{1}{2}$，可知第一个解是

$x_1=30°$.

又由　$\sin(180°-30°)=\sin 30°=\frac{1}{2}$，所以第二个解是

$x_2=180°-30°$,

即　$x_2=150°$.

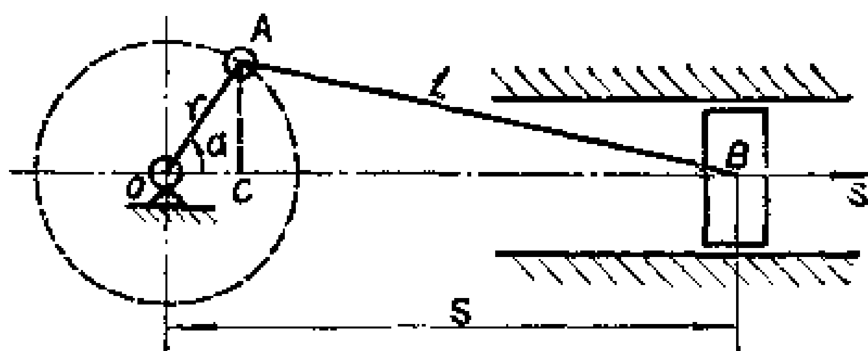
例 9　曲柄连杆机构是一种将圆周运动化为直线运动的机构（图 9—12）. 当轮子转动时，通过连杆AB带运滑块B作往返的直线运动. 设滑块到轮心的距离为S，则S是轮子转角α的函数. 若已知连杆$AB=l$，点A的旋转半径$OA=r$，试将S表成α的函数，并求：当$l=50$厘米，$r=10$厘米，$\alpha=152°$时S的值.

解：由于α可在任一象限内，因此要把S表成α的函数，必须分四个象限考虑. 我们仅就α在第一、二象限情况下进行研究，至于α在第三、四象限情况下函数关系的建立由学员自己完成。

(1) 设α为第一象限中的角，如图 9—12（1），显然

$$S=OB=OC+CB.$$

在$\triangle OCA$中，我们有



(1)

图 9—12

$$OC = r\cos\alpha, CA = r\sin\alpha.$$

而在△ABC中，由勾股定理得

$$CB = \sqrt{l^2 - CA^2} = \sqrt{l^2 - (r\sin\alpha)^2} = \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\alpha}.$$

所以 $S = r\cos\alpha + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\alpha}.$

（2）设α为第二象限中的角，如图9—12（2），此时有

$$S = OB = CB - OC.$$

从图中容易看出：

$$OC = -r\cos\alpha,$$

$$CA = r\sin\alpha.$$

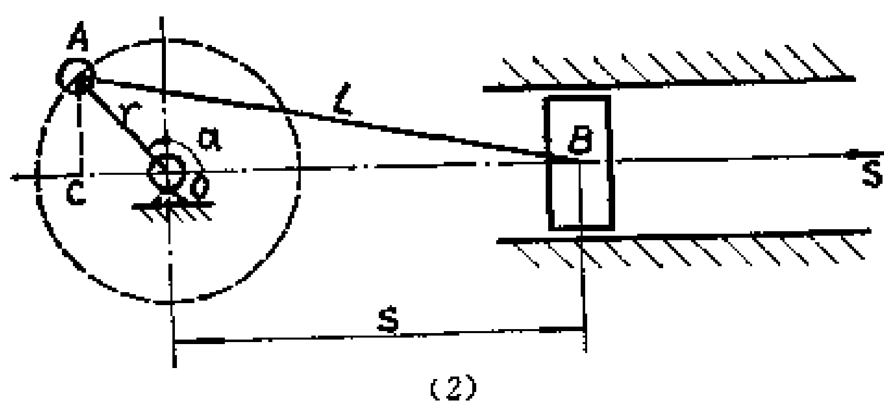


图 9—12

在△ABC中，

$$CB = \sqrt{l^2 - CA^2} = \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\alpha}.$$

所以 $S = \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\alpha} - (-r\cos\alpha) = r\cos\alpha + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\alpha}.$

由此可见，当α在第一、二象限时，S表成α的公式是同一个．用类似的方法可以推得，当α在第三、四象限时，S表成α的公式仍然和上面的公式一样．因此，不论α是哪一个象限中的角，S和α的函数关系可以用统一的公式表示为

$$S = r\cos\alpha + \sqrt{l^2 - r^2\sin^2\alpha}.$$

当 $l = 50$厘米，$r = 10$厘米，$\alpha = 152°$时，则

$$\begin{aligned}S &= 10\cos 152° + \sqrt{50^2 - 10^2\sin^2 152°}\\ &= 10(-\cos 28°) + \sqrt{50^2 - 10^2\sin^2 28°}\\ &= -10\times 0.8829 + \sqrt{2500 - 100\times(0.4695)^2}\\ &= -8.829 + \sqrt{2500 - 100\times 0.2204}\\ &= -8.829 + \sqrt{2478} = -8.829 + 49.78\\ &= 40.95(\text{厘米}).\end{aligned}$$

习　题

1．求下列各角的三角函数的值：

（1）150°；　（2）240°；　（3）315°；

（4）690°；　（5）$\frac{2\pi}{3}$；　（6）$\frac{10\pi}{6}$．

2．求下列各三角函数值：

（1）$\sin(-420°)$，$\cos(-510°)$，$\operatorname{tg}(-300°)$，$\operatorname{ctg}(-570°)$；

（2）$\sin 2370°$，　$\cos 855°$，　$\operatorname{tg} 585°$，　$\operatorname{ctg} 1590°$；

（3）$\sin\frac{7\pi}{6}$，　$\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$，　$\operatorname{tg}\frac{23\pi}{4}$，　$\operatorname{ctg}\left(-\frac{19\pi}{3}\right)$．

3．查表求下列各三角函数值：

$\sin 267°$，　$\sin 5000°$，　$\cos(-1751°36')$，　$\cos 552°32'$，

$\text{tg}(-183°41')$, $\text{ctg}272°4'$, $\text{ctg}(-1956°24')$, $\text{tg}519°$.

4.求适合于下列各式的 0° 到360°的角 x：

(1) $\cos x=\frac{1}{2}$; (2) $\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$;

(3) $\text{tg}\, x=-1$; (4) $\text{ctg}\, x=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

5.计算下列各式：

(1) $\cos60°+\sin^2 45°\cos540°+\frac{3}{4}\text{tg}^2 30°-\cos^2 330°\sin270°-\sin30°$;

(2) $\frac{\text{tg}(-150°)\cdot\cos(-210°)\cdot\cos(-60°)}{\text{ctg}(-240°)\sin(-330°)}$;

(3) $8\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3}\text{tg}\frac{4\pi}{3}\text{ctg}\frac{7\pi}{6}$;

(4) $2\sin^2\frac{17\pi}{4}+\text{tg}^2\frac{33\pi}{4}\text{ctg}\frac{3\pi}{4}$.

6.化简下列各式：

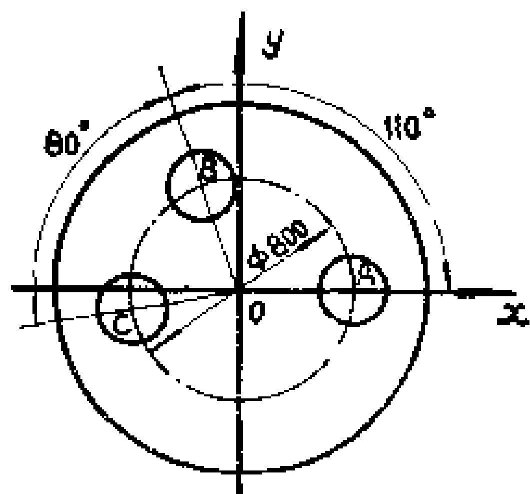
(1) $\frac{\sin(180°-\alpha)\cos(180°+\alpha)\text{tg}(90°-\alpha)}{\cos(360°-\alpha)\text{ctg}(360°-\alpha)\text{tg}(-\alpha)}$;

(2) $\frac{\sin(\pi-\alpha)\text{tg}(2\pi+\alpha)\cos(-\alpha)}{\text{ctg}(\pi-\alpha)\text{ctg}(\frac{\pi}{2}-\alpha)\sin(-\alpha)}$.

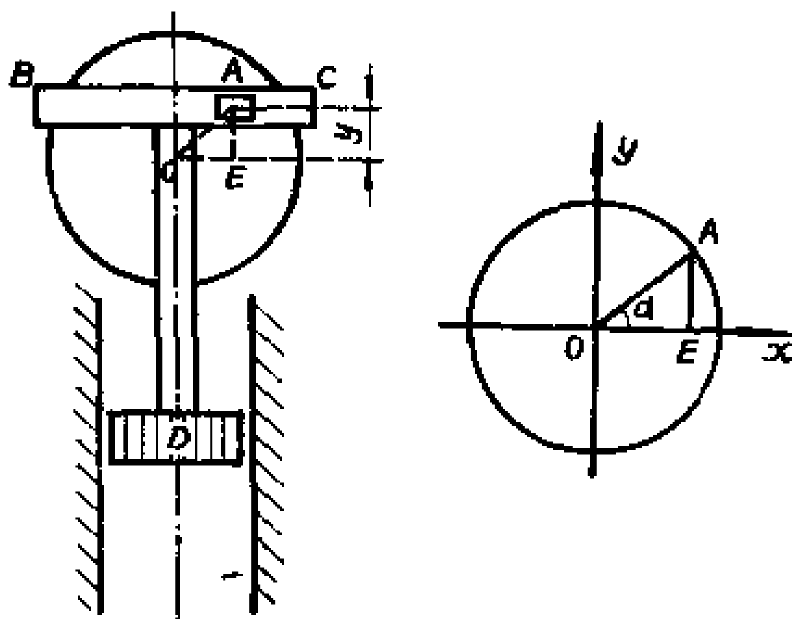
7.证明 $\text{tg}(n\pi+\alpha)=\text{tg}\alpha$，其中 n 为整数，$\alpha$ 为任意角.

8. 在大型零件上划线钻孔时，需定出各孔的中心坐标尺寸，试根据如图所示尺寸，计算出 A, B, C三孔的中心坐标.

9.偏心驱动机构也是一种把圆周运动转化为直线运动的装置．下图是偏心驱动机构的示意图.主动轮上有一偏心销 A．穿在滑槽BC的滑块中，当轮子绕 O 转动时，偏心销 A 就通过滑块带着 BC 槽上下滑动，冲头D就跟着上下运动.因为冲头 D 是固定在BC槽上的，所以 D 的运动与 BC 槽即A点的上下运动完全一样．设已知偏心销与圆心的距离



（第 8 题）



（第 9 题）

$OA=15$厘米，起始位置在图中的 E 点．试作下列各小题：

(1) 把位移 y 表成转角 α 的函数；

(2) 求当转角 α 为38°、150°、235°、340°时位移 y 的值．

第三节　斜三角形的解法

在第八章里，我们已经讨论过直角三角形的边角计算问题，那么斜三角形的边角计算问题怎样解决呢？下面介绍的正弦定理和余弦定理就是用来解决这个问题的工具．

一、正弦定理

实例　一个工件的底座上需要钻三个孔（图 9—13），已知 A、B 两孔中心的距离为 200 毫米、根据装配的要求，第 3 个孔 C 的中心与 A 孔、B 孔中心的连线 AC、BC，必须分别与AB连线构成70°的角和60°的角，即$\angle A=70°$，$\angle B=60°$．试确定 C 的位置．

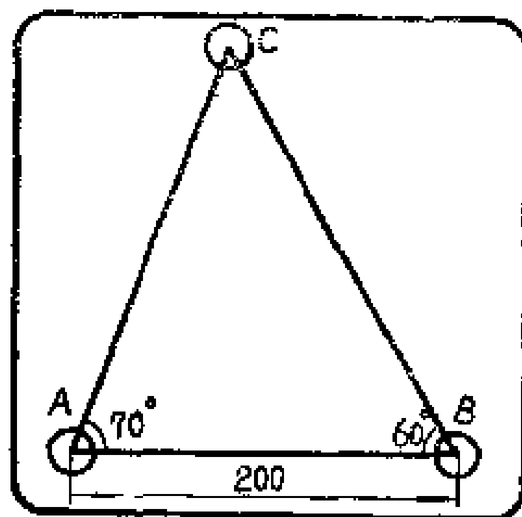


图 9—13

如果我们能够求出 AC、BC的长，那么就可找出 C 点的位置．这样，上面的实例就可简化为下面的问题：在斜三角形ABC中，已知 $AB=200$ 毫米，$\angle A=70°$，$\angle B=60°$，求AC、BC的长．这可由下面介绍的正弦定理来解决．

正弦定理　任意三角形的各边和它所对角的正弦之比相等．如在图 9—14中，有

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

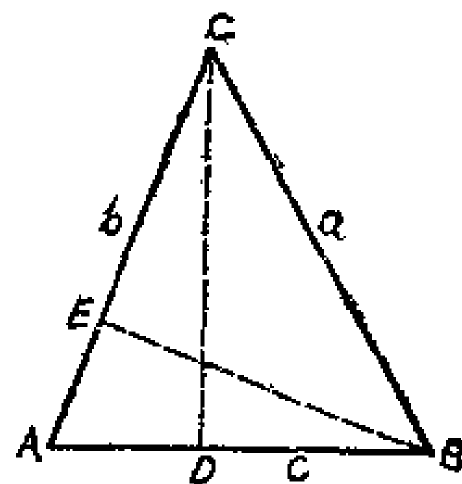


图 9—14

证明： 在$\triangle ABC$中作$CD\perp AB$．从直角$\triangle ADC$和直角$\triangle BDC$中可以看出：

$$\sin A=\frac{CD}{b},\qquad \sin B=\frac{CD}{a},$$

所以
$$CD=b\sin A=a\sin B,$$

从而有
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}.$$

再作$BE\perp AC$，同理可证

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}.$$

于是有
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

例 1　求实例中AC和BC的长．

解： 显然，$\angle C=180°-\angle A-\angle B=50°$，

$$\because\quad \frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C},$$

$$\therefore \quad a=\frac{c}{\sin C}\cdot\sin A=\frac{200}{\sin 50^\circ}\cdot\sin 70^\circ\doteq\frac{200}{0.766}\times 0.9397\doteq 245.4;$$

同样 $\because \quad \dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C},$

$$\therefore \quad b=\frac{c}{\sin C}\cdot\sin B=\frac{200}{\sin 50^\circ}\cdot\sin 60^\circ\doteq\frac{200}{0.766}\times 0.866\doteq 226.$$

即A、C两孔中心的距离为226毫米，B、C两孔中心的距离为245.4毫米.

例2 如图9—15，已知发动机的曲柄OC长为85毫米，连杆CB长为340毫米. 发动机发动后，当活塞在A点位置时，OC、CB恰成一条直线，而有$OA=OC+CB$. 问当OC与OA成80°角时，活塞滑动的距离BA是多少?

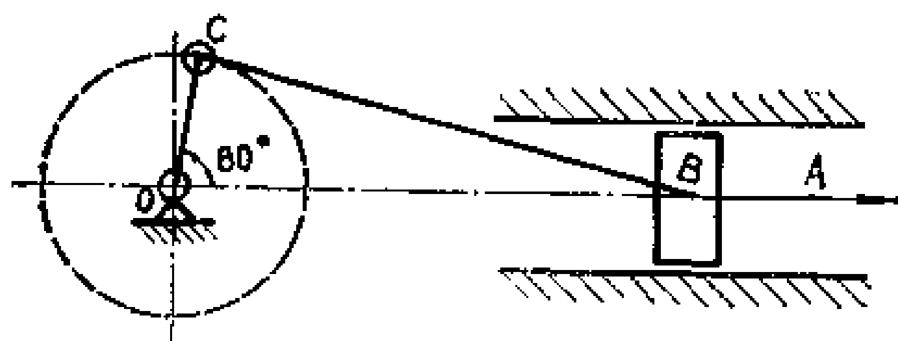


图9—15

解: 因为$BA=OA-OB$，所以只要求出OB就够了.

在$\triangle BOC$中，根据正弦定理得

$$\frac{OC}{\sin B}=\frac{CB}{\sin\angle BOC},$$

即
$$\sin B=\frac{OC\cdot\sin\angle BOC}{CB}=\frac{85\cdot\sin 80^\circ}{340}=\frac{1}{4}\sin 80^\circ$$

$$=\frac{1}{4}\times 0.98481=0.2462.$$

根据图9—15可知$\angle B$是锐角，所以查表得

$$\angle B=14^\circ 15'.$$

则
$$\angle C=180^\circ-80^\circ-14^\circ 15'=85^\circ 45'.$$

再由正弦定理得 $\dfrac{OB}{\sin C}=\dfrac{CB}{\sin\angle BOC},$

即
$$OB=\frac{340\times\sin 85^\circ 45'}{\sin 80^\circ}.$$

为计算的简便起见，对上式两端取对数（三角函数的对数可在《数学用表》中查到）：

$$\lg OB=\lg 340+\lg\sin 85^\circ 45'-\lg\sin 80^\circ$$
$$=2.5315+\overline{1}.9988-\overline{1}.9934=2.5369,$$

所以 $OB=344.3.$

于是 $BA=OA-OB=340+85-344.3=80.7.$

答：当OC与OA成80°角时，活塞滑动的距离是80.7毫米.

从上面的例题中可以看到，在任一给定的三角形中，已知一边和两个角或已知两边及其一边所对的角，都可用正弦定理求其他的边或角.因此，正弦定理是解斜三角形的一个有力工具.

二、余弦定理

下面，我们给出解斜三角形的另一工具——余弦定理.

余弦定理 三角形任一边的平方等于其他两边平方的和，再减去这两边与它们夹角的余弦乘积的两倍. 如在图9—16中，有

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$
$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

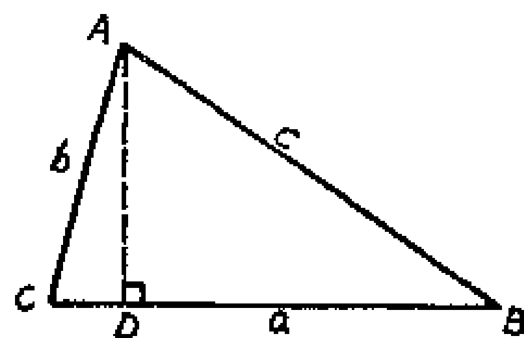


图9—16

证明：在$\triangle ABC$中，作$AD\perp BC$.

在直角$\triangle ABD$和直角$\triangle ACD$中，由勾股定理得

$$c^2=BD^2+AD^2=(a-CD)^2+(b^2-CD^2)$$
$$=a^2-2a\cdot CD+CD^2+b^2-CD^2=a^2+b^2-2a\cdot CD,$$

$$\because\quad \cos C=\frac{CD}{b}\text{或}CD=b\cos C,$$

$$\therefore\quad c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

同理可得

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A;$$
$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B.$$

例3 在设计穿山铁路时，必须知道隧道的长度.如果已测得要修隧道附近的两点A、B到某一点C（图9—17）的距离分别为$AC=480$米、$BC=630$米，且$\angle ACB=60°$，并测得A、B两点到隧道口的距离分别为$AD=80$米，$BE=40$米. 求隧道DE的长.

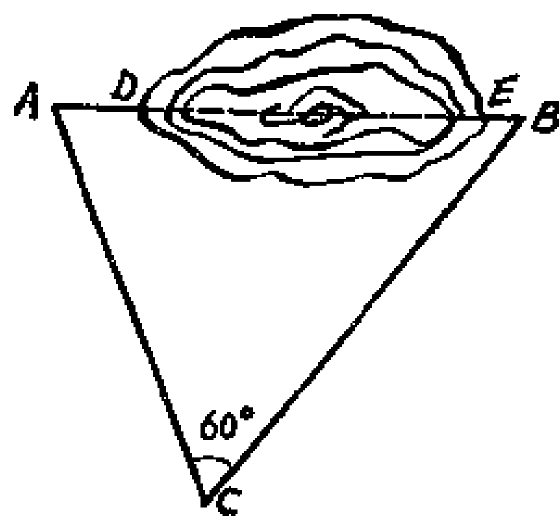


图9—17

解：只要求出AB的长，问题就解决了.

在$\triangle ABC$中，由余弦定理得

$$AB=\sqrt{AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cos60°}$$
$$=\sqrt{480^2+630^2-2\times480\times630\times\frac{1}{2}}$$
$$=\sqrt{230400+396900-302400}=\sqrt{324900}=570.$$

所以 $DE=570-80-40=450$.

答：隧道的长约为450米.

由余弦定理，可推得下面的公式：

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

已知三角形的三边可用这三个公式来求三个内角。

例4 如图9—18所示，已知 $a=7$，$b=3$，$c=8$，求$\triangle ABC$的三个角。

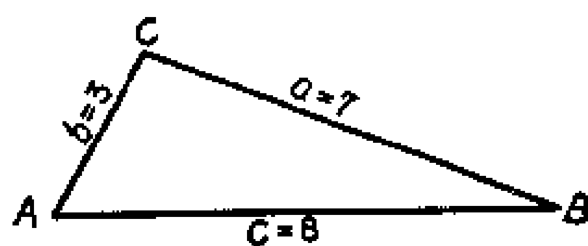


图9—18

解：(1) ∵ $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{3^2+8^2-7^2}{2\times3\times8}$

$=\frac{24}{48}=0.5$，

∴ $\angle A=60°$；

(2) ∵ $\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\frac{8^2+7^2-3^2}{2\times8\times7}=\frac{104}{112}=0.9286$，

∴ $\angle B=21°47'$；

(3) ∵ $\angle A+\angle B+\angle C=180°$，

∴ $\angle C=180°-\angle A-\angle B=180°-60°-21°47'=98°13'$。

从上面的两个例题可以看到，在任一给定的三角形中，已知两条边及其夹角求另一条边或已知三条边求内角，可以用余弦定理来解决。

习　　题

1．在$\triangle ABC$中：

(1) 已知 $a=35$，$\angle B=50°$，$\angle C=65°$，求$\angle A$、b、c；

(2) 已知 $a=10$，$b=15$，$\angle C=66°45'$，求$\angle A$、$\angle B$、c；

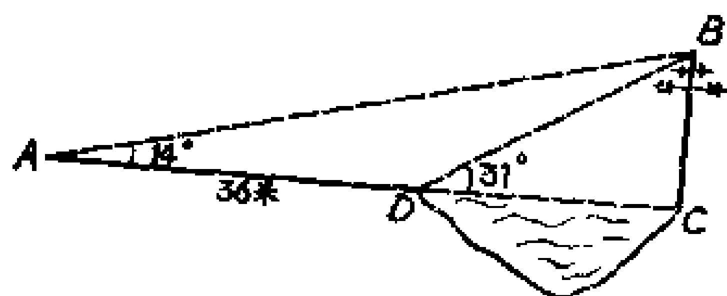
(3) 已知 $a=3$，$b=4$，$c=5$，求三个内角；

(4) 已知 $a=61$，$b=56$，$c=9$，求最大的那个角；

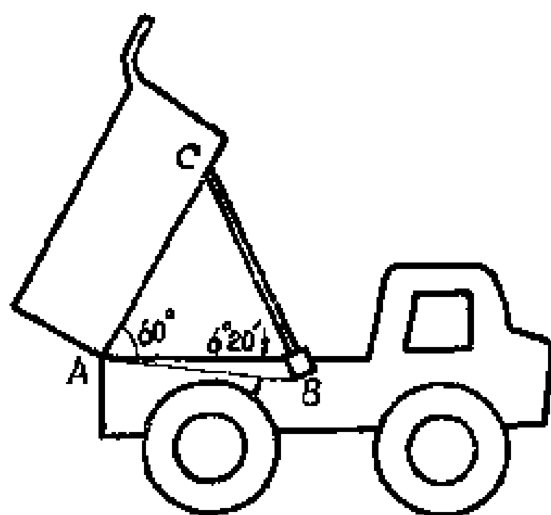
(5) 已知 $a=87.21$，$b=65.34$，$\angle A=75°45'$，求$\angle B$、$\angle C$、c。

2．如图，为了测量河宽CD，在河的一岸沿 CD 方向取$DA=36$米，由 A 点测得对岸电线杆顶 B 点的仰角是14°，由 D 测得 B 点的仰角为31°，求河宽CD（精确到0.1米）。

3．如图，自动卸货的载重汽车卸货时，车箱的最大仰角为60°，油泵顶点B和支点A间的距离为1.95米，AB和水平线之间的夹角为6°20′，AC长为1.4米，试计算油泵顶杆BC的长。



（第 2 题）

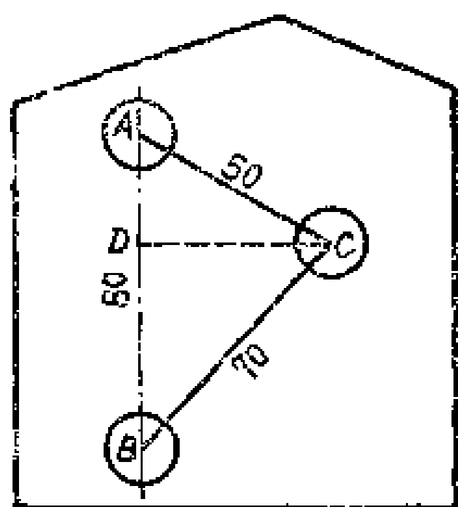


（第 3 题）

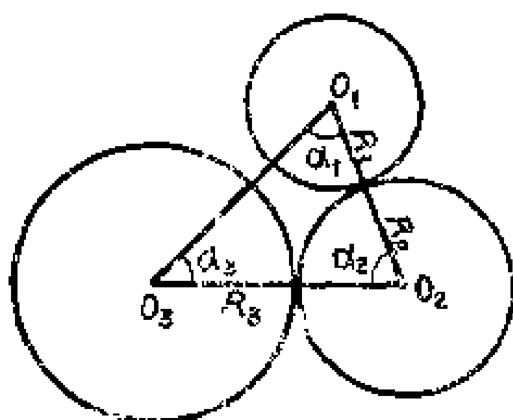
4.如图，镗工师傅在加工齿轮箱侧面A、B、C三孔时，顺次镗好A、B两孔后，把镗杆从B退到D，再从D向右移动工作台，使镗杆对准C，然后加工C孔．试根据图示尺寸（单位是毫米），求BD和DC.

5.齿轮箱里有一个三星齿轮（如图），已知$R_1=27$毫米，$R_2=34$毫米，$R_3=44$毫米，$O_1O_3=75$毫米．试计算中心连线的夹角α_1、α_2.

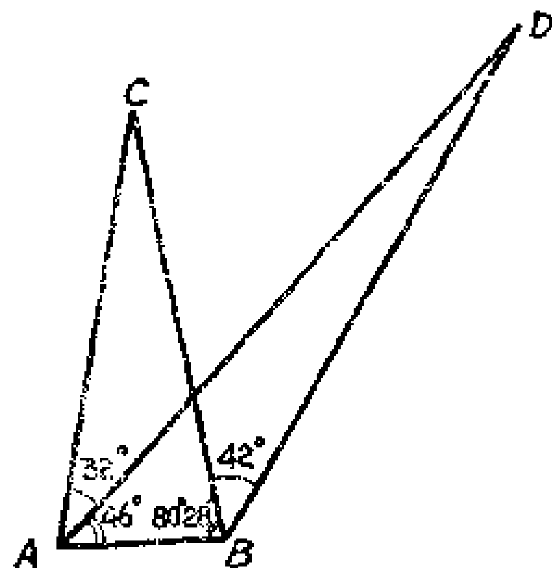
6.1969年，苏修在靠近我边境的某地建立两处炮兵阵地C、D．我方在相距1.2公里的两哨所分别测得$\angle CAD=32°$，$\angle DAB=46°$，$\angle ABC=80°28'$，$\angle CBD=42°$（见图）.试分别求出我方哨所A、B与苏修两炮兵阵地C、D的距离（即求AC、BC、AD、BD的长）.



（第 4 题）



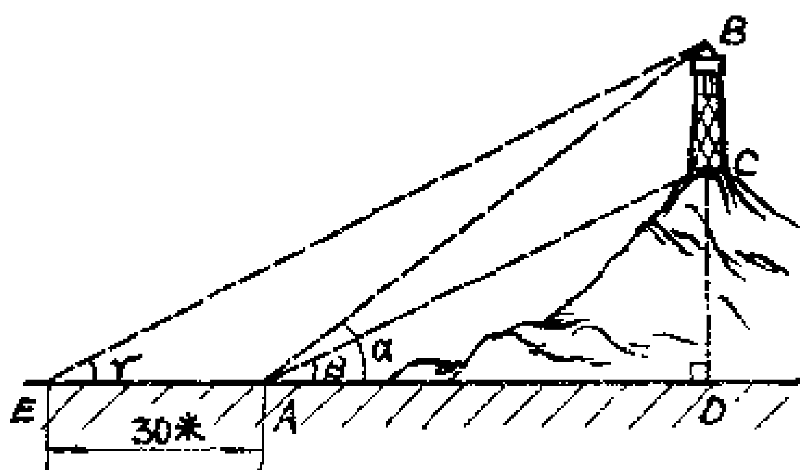
（第 5 题）



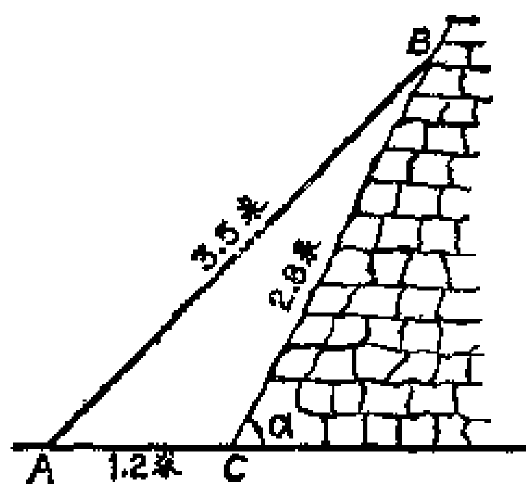
（第 6 题）

7.如图，要在山下测山顶井架BC的高，可在A点测得井架顶的仰角$\alpha=25°$，井架底的仰角为$\beta=22°$，再后退30米到E点，在E点测得井架顶的仰角为$\gamma=21°$．求钻井架的高.

8.如图，要求出石坝对地面的斜角α，可把一竹竿斜靠在石坝旁，量得竹竿长$AB=3.5$米，$AC=1.2$米，$CB=2.8$米，求α角.



（第 7 题）



（第 8 题）

第四节　三角函数的图象

为了进一步认识三角函数的变化规律，在这一节里，我们作出三角函数的图象，并由图象讨论它们的性质．

一、正弦函数的图象

正弦函数 $y=\sin x$ 的定义域是$(-\infty,+\infty)$，取自变量 x 在区间$[0,2\pi]$上的一些值，算出函数 y 的对应值，列成下表：

x（弧度）	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$y=\sin x$	0	0.5	0.87	1	0.87	0.5	0	−0.5	−0.87	−1	−0.87	−0.5	0

在直角坐标系中描点作图，便得 $y=\sin x$ 在区间$[0,2\pi]$上的一段图象（图 9－19）．

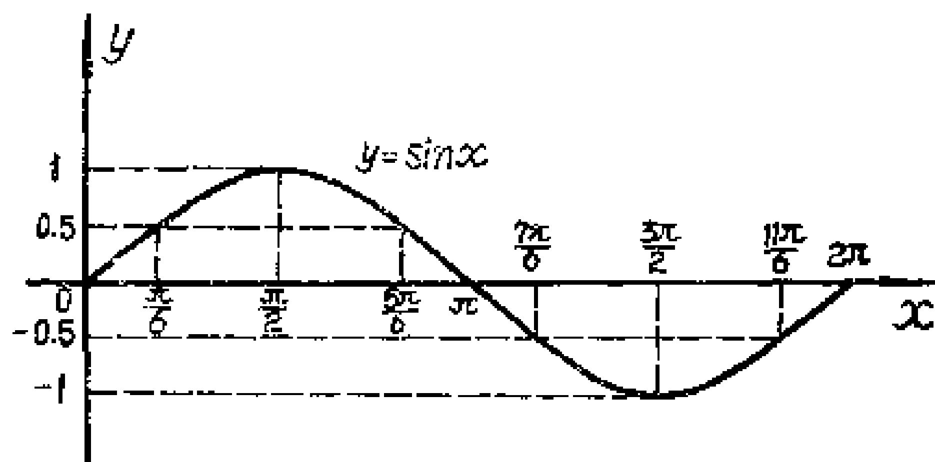


图 9－19

因为$\sin(2K\pi+x)=\sin x$（K为任何整数），所以当 x 每增加（或减少）2π 的整数倍时，函数值就重复原来的值，因此在区间$[-2\pi,0]$，$[2\pi,4\pi]\cdots$上的图象和在区间$[0,2\pi]$上的图象完全相同，重复描出在区间$[0,2\pi]$上的一段图象，就得到

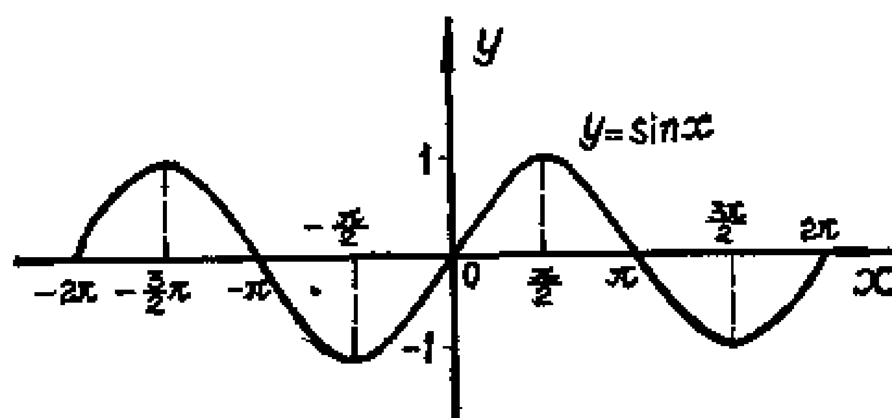


图 9—20

$y=\sin x$ 的图象（图 9—20）.

正弦函数$y=\sin x$ 的图象叫做正弦曲线.

从图 9—20可以看出，正弦函数 $y=\sin x$ 具有以下的性质：

1.自变量 x 取任意数值，函数值始终在－1到1之间，即

$$-1\leqslant \sin x\leqslant 1,$$

也就是说，函数 $y=\sin x$图象上的点到 x 轴的最大距离为 1.

2.因为对任意 x 值，总有$\sin(-x)=-\sin x$，所以正弦函数是奇函数，其图象对称于坐标原点.

3.正弦函数的增减性．由于正弦函数 $y=\sin x$ 在〔-2π, 0〕、〔2π、4π〕……上的图象和在区间〔0，2π〕上的图象完全一样，所以只要讨论它在区间〔0，2π〕上的增减性就可以了．由图 9—20看出，在区间$(0,\frac{\pi}{2})$，$(\frac{3\pi}{2},2\pi)$内$y=\sin x$ 是增函数，在区间$\left(\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right)$内 $y=\sin x$ 是减函数.

4.因为对任意 x 值，总有$\sin(x+2\pi)=\sin x$，所以 x 每增加2π时，函数值就重复原来的值，我们称正弦函数 $y=\sin x$是周期函数，2π 叫做周期.

一般地，设$y=f(x)$，如果当 x 增加到 $x+T$ 时（T 是一个定值，且$T\neq 0$），有

$$f(x+T)=f(x).$$

那末函数 $y=f(x)$叫做周期函数，满足上式成立的最小正数T 叫做函数$y=f(x)$的周期.

二、余弦函数的图数

用描点法可作出 $y=\cos x$ 的图象（图 9—21），它叫做余弦曲线．余弦函数的性质，学员可仿照正弦函数的性质自行研究.

观察、比较图 9—20和图 9—21．可以发现余弦曲线和正弦曲线的形状完全一样，

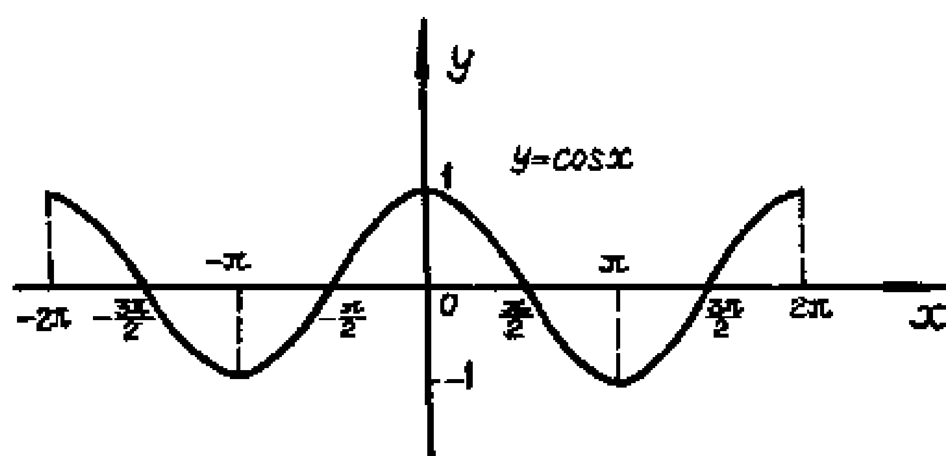


图 9—21

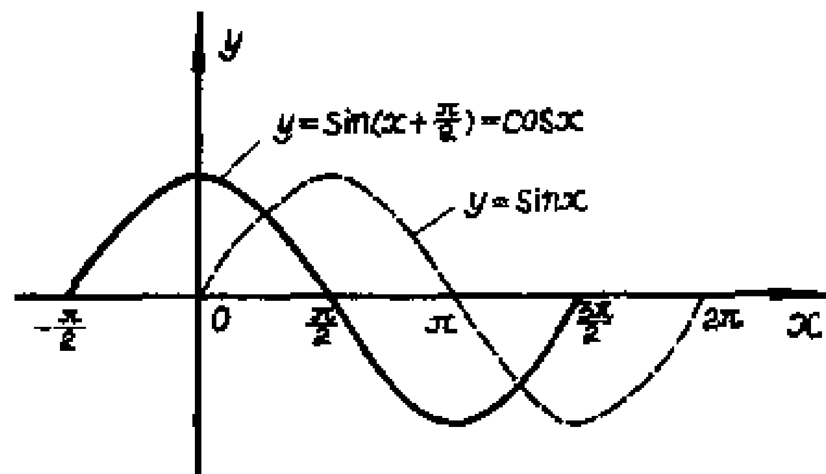


图 9—22

只是在坐标系中的位置不同，实际上只要把正弦曲线沿x轴向左平移$\frac{\pi}{2}$个单位，就可得出余弦曲线．因为$\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$，所以$y=\cos x$的图象也就是$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$的图象（图9—22）．

三、正切函数的图象

因为当$x=\pm\frac{\pi}{2}$，$\pm\frac{3\pi}{2}\cdots$时，正切函数$y=tgx$的值不存在，所以函数$y=tgx$的定义域是$x\neq K\pi+\frac{\pi}{2}$（K为任何整数）的一切实数．

取自变量x在区间$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$内的一些值，算出函数$y=tgx$的对应值，列成下表：

x	…	$-\frac{5\pi}{12}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{12}$	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	…
$y=tg\,x$	…	-3.73	-1.73	-1	-0.58	-0.27	0	0.27	0.58	1	1.73	3.73	…

在直角坐标系中描点作图，便得$y=tgx$在区间$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$内的一段图象（图9—23）．

因为$tg(K\pi+x)=tgx$（K为任何整数），所以在区间$\left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$，$\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$…内，重复描出在区间$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$内的一段图象，就可得到$y=tg\,x$的图象（图9—24）．

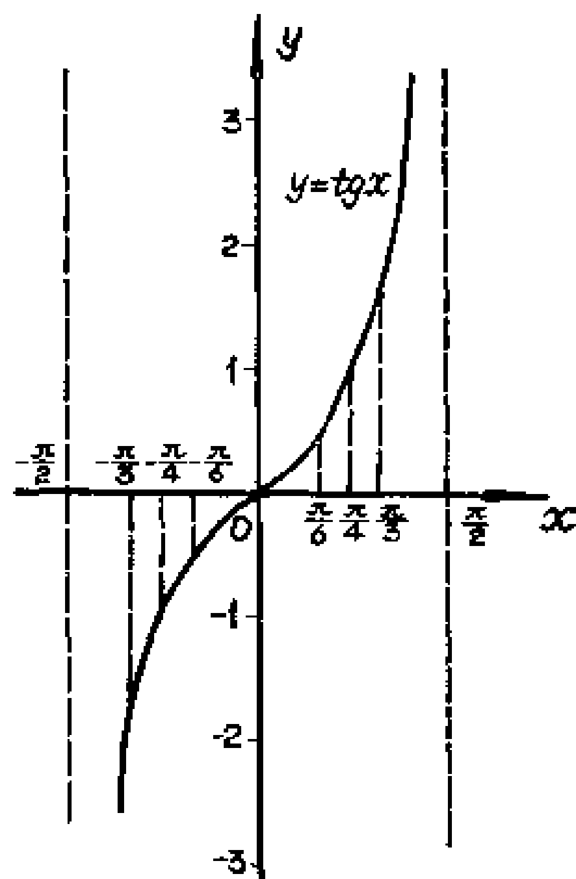


图9—23

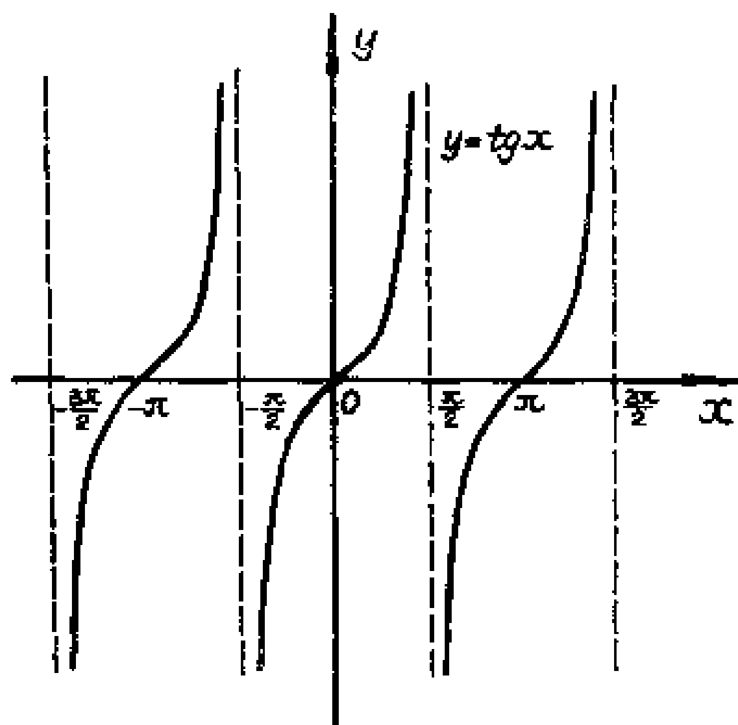


图9—24

正切函数的图象叫做正切曲线．

从图9—24可以看出，函数$y=tg\,x$具有以下性质：

1. 因为对任意 x 值，$tg(x+\pi)=tgx$，所以正切函数是以 π 为周期的周期函数.

2. 因为对任意 x 值，总有 $tg(-x)=-tgx$，所以正切函数是奇函数，其图象对称于坐标原点.

3. 在区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$，$(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$…内，正切函数都是增函数. 在区间 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内，当 x 无限接近 $\frac{\pi}{2}$ 时，tgx 取正值，且无限增大；当 x 无限接近 $-\frac{\pi}{2}$ 时，tgx 取负值，且绝对值无限增大.

关于余切函数的图象和性质，学员可仿照正切函数的情况自行研究.

***四、函数　$y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象**

在生产实践和科学实验中，常会遇到形如 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的函数.

例如. 由发电机发出的正弦交流电，电压 u 与时间 t 之间的函数关系是 $u=U_m\sin(\omega t+\varphi)$. 其中 U_m 是电压的最大值，又叫做振幅；ω 是发电机转子转动的角速度，又叫做角频率；φ 是与转子的起始位置有关的一个角，叫做初相角.

为了掌握这种函数的变化特征，我们来研究它们的图象和 A，ω，φ 对图象的影响.

1. $y=A\sin x$（$A>0$）的图象

例 1　在同一坐标系中作出下列函数的图象：

(1) $y=\sin x$；　(2) $y=2\sin x$；　(3) $y=\frac{1}{2}\sin x$.

解： (1) 列表：

x	…	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π	…
$y=\sin x$	…	0	0.5	0.87	1	0.87	0.5	0	-0.5	-0.87	-1	-0.87	-0.5	0	…
$y=2\sin x$	…	0	1	1.74	2	1.74	1	0	-1	-1.74	-2	-1.74	-1	0	…
$y=\frac{1}{2}\sin x$	…	0	0.25	0.44	0.5	0.44	0.25	0	-0.25	-0.44	-0.5	-0.44	-0.25	0	…

(2) 描点作图，就得到它们的图象（图 9—25）.

由上表及图象可以看出：$y=2\sin x$ 的周期是 2π，振幅是 2；$y=\frac{1}{2}\sin x$ 的周期也是 2π，振幅是 $\frac{1}{2}$.

一般地，函数 $y=A\sin x$（$A>0$）的周期是 2π，振幅是 A. $y=A\sin x$ 的图象：当 $A>1$ 时，可由 $y=\sin x$ 的图象沿 y 轴方向伸长而得到；当 $A<1$ 时，可由 $y=\sin x$ 的图象沿 y 轴方向压缩而得到.

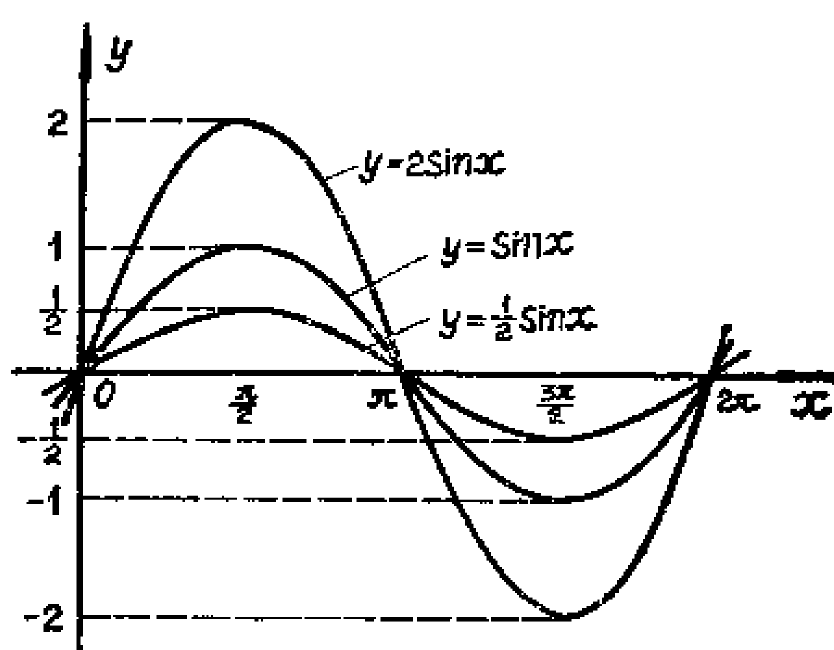


图 9 —25

2．$y=\sin\omega x\ (\omega>0)$ 的图象

例 2 在同一坐标系中作出下列函数的图象：

(1) $y=\sin x$；　　(2) $y=\sin 2x$。

解：(1) 列表：

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$y=\sin x$	0	0.5	0.71	0.87	1	0.87	0.71	0.5	0	-0.5	-0.71	-0.87	-1	-0.87	-0.71	-0.5	0
$y=\sin 2x$	0	0.87	1	0.87	0	-0.67	-1	-0.87	0	0.87	1	0.87	0	-0.87	-1	-0.87	0

(2) 描点作图，就得到它们的图象（图 9 —26）。

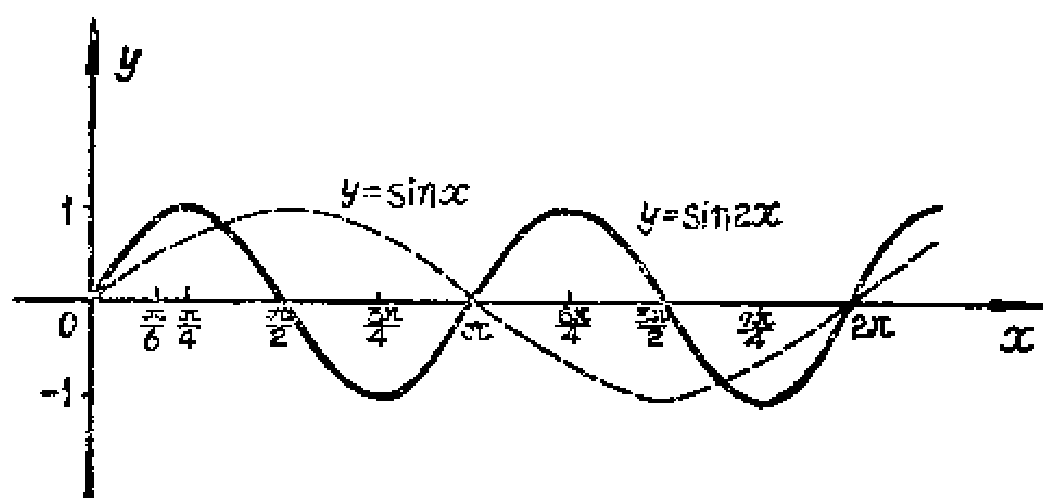


图 9 —26

从图 9 —26可以看出，$y=\sin 2x$ 和 $y=\sin x$ 的振幅都是 1，但 $y=\sin 2x$ 的周期是 $\frac{2\pi}{2}=\pi$，是 $y=\sin x$ 周期的一半。

一般地说，$y=\sin\omega x\ (\omega>0)$ 的周期是$\frac{2\pi}{\omega}$，振幅是 1．$y=\sin\omega x$ 的图象：当 $\omega>1$ 时，可由 $y=\sin x$ 的图象沿 x 轴压缩而得到；当 $\omega<1$ 时，可由 $y=\sin x$ 的图象沿 x 轴伸长而得到。

3. $y=\sin(\omega x+\varphi)$的图象

例 3 在同一坐标系中作出下列函数的图象：

(1) $y=\sin 2x$； (2) $y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$； (3) $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$；

解：(1) 列表：

x	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$
$y=\sin 2x$	-1	0	1	0	-1	0	1
$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$	0	1	0	-1	0	1	0
$y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$	0	-1	0	1	0	-1	0

(2) 描点作图，就得到它们的图象（图 9—27）。

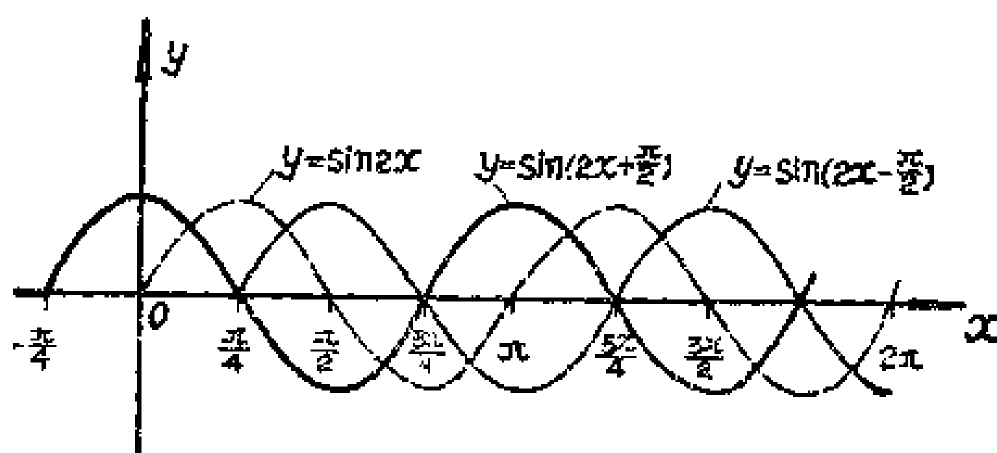


图 9—27

从图 9—27可以看出，函数$y=\sin 2x$，$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)$ 和 $y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$ 的周期相同，振幅也相同，它们的图象只是在坐标系中的位置不同。$y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin 2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$的图象是由$y=\sin 2x$的图象向左平移$\frac{\pi}{4}$个单位而得到的（称前者比后者超前$\frac{\pi}{4}$角）。同样，$y=\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$的图象是由$y=\sin 2x$的图象向右平移$\frac{\pi}{4}$个单位而得到的（称前者比后者滞后$\frac{\pi}{4}$角）。

一般地说，$y=\sin(\omega x+\varphi)$和$y=\sin\omega x$，它们的周期和振幅分别相同，$y=\sin(\omega x+\varphi)$的图象：当$\varphi>0$时，可由$y=\sin\omega x$的图象向左平移$\frac{\varphi}{\omega}$个单位而得到；当$\varphi<0$时，可由$y=\sin\omega x$的图象向右平移$\left|\frac{\varphi}{\omega}\right|$个单位而得到。

综上所述，可得作$y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象的步骤如下：

(1) 根据$y=\sin x$的图象，作$y=\sin\omega x$的图象；

(2) 根据 $y=\sin\omega x$ 的图象，作 $y=\sin(\omega x+\varphi)$的图象;

(3) 根据 $y=\sin(\omega x+\varphi)$的图象，作$y=A\sin(\omega x+\varphi)$的图象。

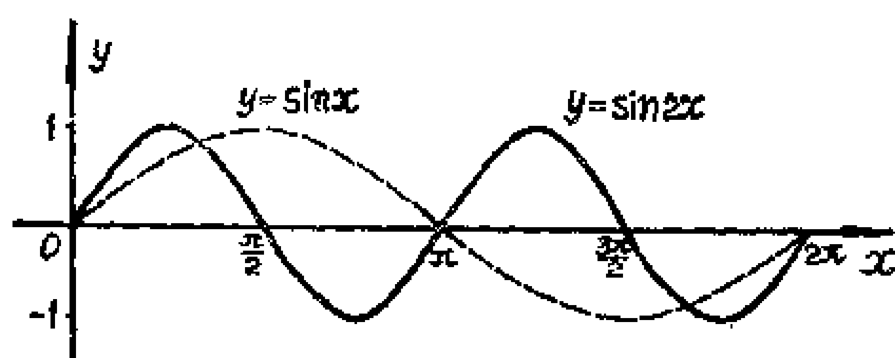
例 4 作$y=3\sin(2x+\frac{\pi}{2})$ 的图象.

解: (1) 作$y=\sin x$的图象;

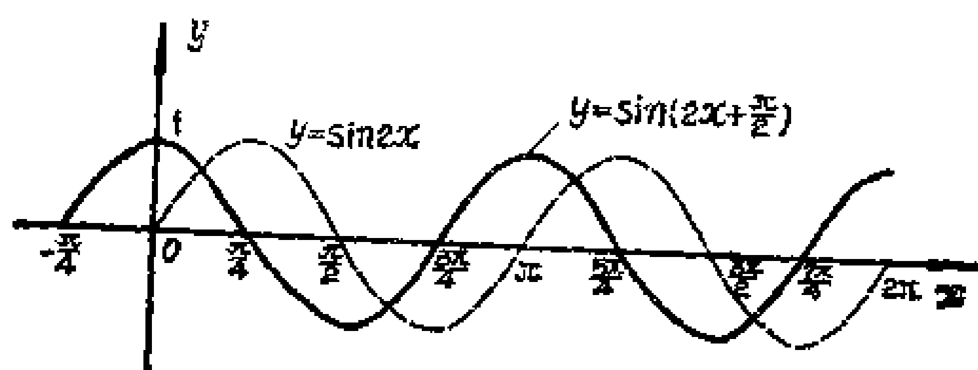
(2) 作 $y=\sin 2x$ 的图象〔图 9—28 (1)〕;

(3) 作$y=\sin(2x+\frac{\pi}{2})$ 的图象〔图 9—28 (2)〕;

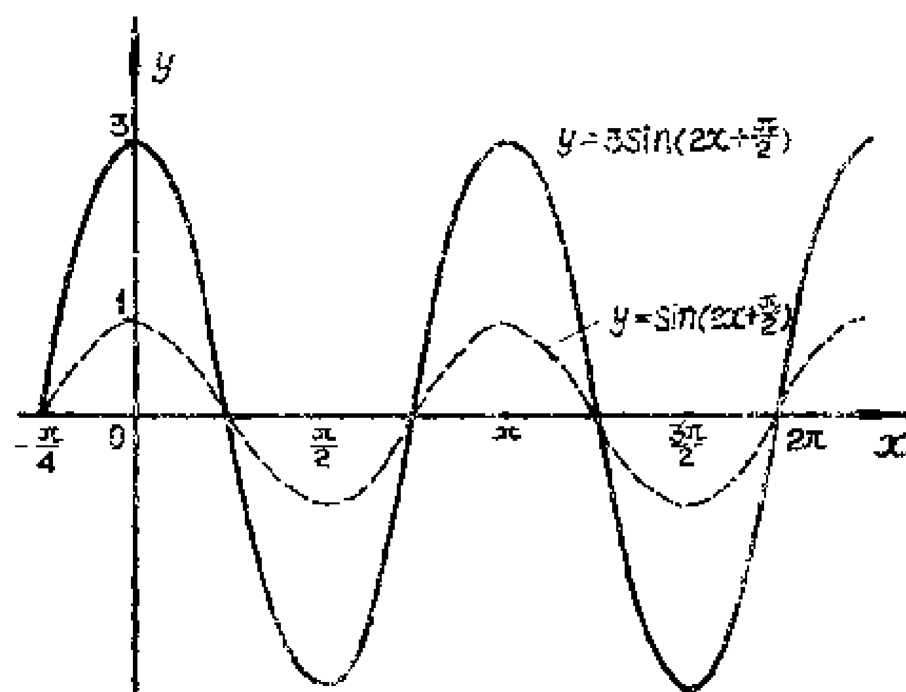
(4) 作$y=3\sin(2x+\frac{\pi}{2})$的图象〔图 9—28 (3) 的实线部分〕.



(1)



(2)



(3)

图 9—28

习　题

1.作出余弦函数 $y=\cos x$ 的图象，并讨论余弦函数的周期性、奇偶性、增减性.

2.作出余切函数 $y=\operatorname{ctg} x$ 的图象，并讨论余切函数的周期性、奇偶性、增减性.

3.利用 $y=\sin x$ 的图象作下列函数的图象：

(1) $y=\frac{1}{2}\sin x$；　(2) $y=\sin\frac{x}{2}$；　(3) $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$；

(4) $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$；　(5) $y=\cos 2x$.

4.按下列步骤作 $y=4\sin\left(3t+\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象：

(1) 作 $y=\sin t$ 的图象；

(2) 根据 $y=\sin t$ 的图象作 $y=\sin 3t$ 的图象；

(3) 根据 $y=\sin 3t$ 的图象作 $y=\sin\left(3t+\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象；

(4) 根据 $y=\sin\left(3t+\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象作 $y=4\sin\left(3t+\frac{\pi}{2}\right)$ 的图象.

复　习　题

1.求下列适合下列条件的角 x $(0°\leqslant x<360°)$：

(1) $\sin x=-\frac{1}{2}$；　(2) $\cos x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$；

(3) $\operatorname{tg} x=\sqrt{3}$；　(4) $\operatorname{ctg} x=-\frac{3}{4}$.

2.一种榴弹炮，弹丸的初速度是248米/秒，在不考虑空气阻力的条件下，它的射程 x（米）和射角 θ 的函数关系是

$$x=\frac{248^2\sin 2\theta}{9.8}=6276\sin 2\theta.$$

设 $\theta=\frac{\pi}{4}$，　$\theta=\frac{\pi}{3}$，　$\theta=\frac{5}{12}\pi$，求射程各为多少？

3.化简下列各式：

(1) $\dfrac{\sin(-\alpha)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(-\alpha)\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}$；　(2) $\dfrac{\sin(180°-\alpha)\operatorname{tg}(180°-\alpha)\cos(-\alpha)}{\operatorname{ctg}(90°+\alpha)\cos(360°-\alpha)\sin(180°+\alpha)}$；

(3) $\dfrac{\sin^2(n\pi-\alpha)\cos^2(n\pi+\alpha)}{\cos^2[(2n+1)\pi-\alpha]}$（$n$ 为整数）.

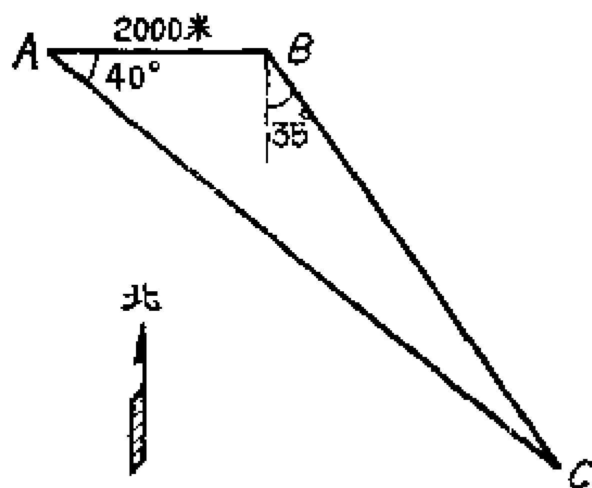
4. 任意三角形的三个内角分别为α、β、γ，试证：

(1) $\cos(\alpha+\beta+\gamma)=-1$；　(2) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\gamma$；

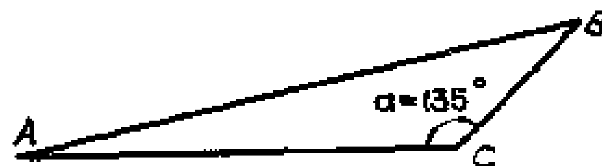
(3) $\cos(\alpha+\beta)=-\cos\gamma$；　(4) $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=-\mathrm{tg}\gamma$。

5. 相距2000米的东西炮台B和A（如图所示），同时发现入侵的敌舰C，在西炮台A处测得敌舰在东偏南40°，在东炮台B处测得敌舰在南偏东35°，试计算敌舰与两炮台的距离。

6. 海岛民兵一次参加某部炮兵演习，在观察所里，民兵和解放军战士一起观察"敌情"。测得结果如图所示，我观察所C到"敌"阵地B的距离$CB=500$米，观察所C到我炮阵地A的距离$CA=2800$米，测出炮观目角$\alpha=135°$；求我炮阵地到"敌"阵地的距离AB。



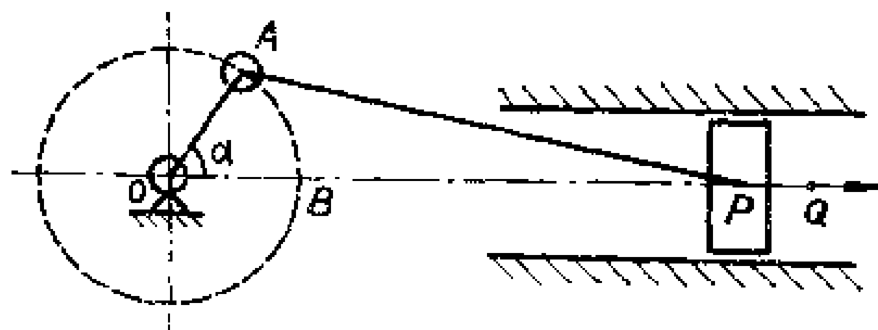
（第5题）



（第6题）

7. 在曲柄连杆的示意图中，当OA在OB位置时，P在Q的位置，当OA旋转成α角时P和Q之间的距离为x，已知$OA=0.45$米，$AP=2.25$米。在下列条件下求x的值：

(1) $\alpha=30°$；　(2) $\alpha=90°$；　(3) $\alpha=135°$；　(4) $OA\perp AP$。



（第7题）

8. 作下列各函数的图象：

(1) $y=3\sin x$；　(2) $y=\sin 3x$；

(3) $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$；　(4) $y=3\sin\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)$。

第十章　反三角函数

本章介绍反正弦函数、反余弦函数和反正切函数，它们统称反三角函数。

第一节　反正弦函数

在正弦函数 $y=\sin x$ 中，对于角 x 的每一个确定的值，y 有唯一确定的值和它对应．例如，对于 $x=\frac{\pi}{6}$，就有 $y=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$（图10—1）．

在实际问题中，有时需要研究相反的问题：根据y的确定值，来求出对应的角x．

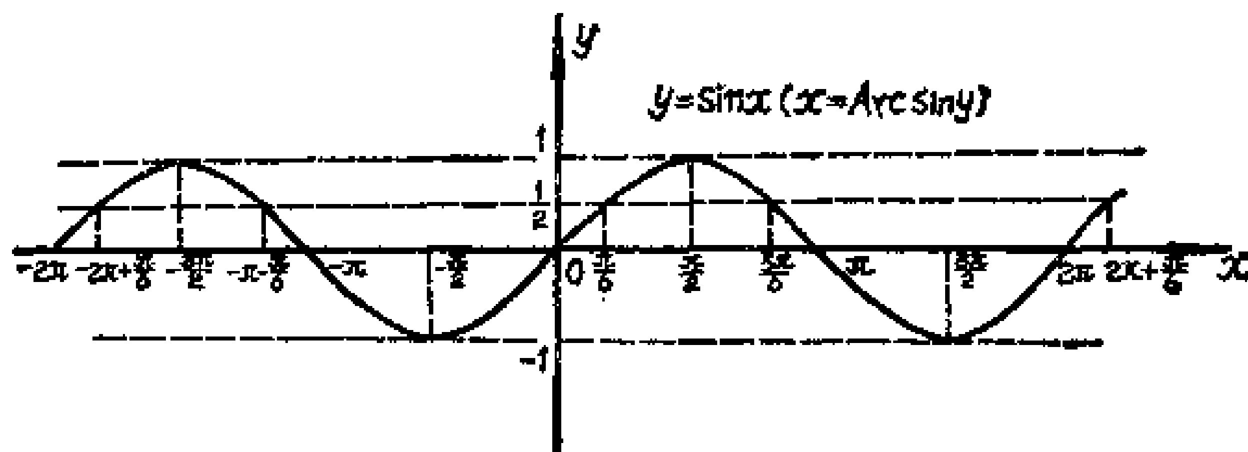


图10—1

从图10—1可以看出，对于每一个确定的 y 的值，x 有无数个值和它对应．例如，

$y=\sin x=\frac{1}{2}$ 时，$x=\frac{\pi}{6}$，$\frac{5\pi}{6}$，$2\pi+\frac{\pi}{6}$，…．

由此知道，在正弦函数

$$y=\sin x$$

中，如果把y作为自变量，那么，角 x 就是 y 的函数．这个函数和正弦函数 $y=\sin x$ 的对应关系正好相反，它叫做正弦函数 $y=\sin x$ 的反函数，也叫做反正弦函数，记作

$$x=\text{Arc}\sin y．$$

这里，x 就是 $y=\sin x$ 中的 x，只是现在成为因变量了．符号“Arc sin”读作“阿克赛因”．注意字母“A”是大写的．

正弦函数 $y=\sin x$ 和反正弦函数 $x=\text{Arc}\sin y$，它们是从两个不同角度研究变量 x 和 y 之间的对应关系，是既有联系又有区别的．

从图形上看，$y=\sin x$ 和 $x=\text{Arc}\sin y$ 是同一个图形（图10—1），这是共同的．但是对 $y=\sin x$ 来讲，横轴是自变量轴，纵轴是因变量轴．而对反正弦函数 $x=\text{Arc}\sin y$ 来讲，刚好相反．

从函数的定义域和值域（即因变量的取值范围）来看，它们的区别是：

在 $y=\sin x$ 中，它的定义域是 $-\infty<x<+\infty$，值域是 $-1\leqslant y\leqslant 1$；

在 $x=\text{Arc}\sin y$ 中，它的定义域是 $-1\leqslant y\leqslant 1$，值域是 $-\infty<x<+\infty$.

此外，在 $y=\sin x$ 中，给定自变量 x 一个值，只有一个 y 值和它对应，因此它是单值函数；而在 $x=\text{Arc}\sin y$ 中，给定自变量 y 一个值，有无数个 x 值和它对应，我们说反正弦函数 $x=\text{Arc}\sin y$ 是多值函数，如图10—1.

从 $y=\sin x$ 的图象（图10—2）可以看出，当 x 从 $-\frac{\pi}{2}$ 增加到 $\frac{\pi}{2}$ 时，y 从 -1 增加到 1，并取得了 -1 到 1 之间的一切值，而且在 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 范围内，对于 y 的每一个确定值，x 都有唯一确定值和它对应．例如：$y=\frac{1}{2}$，x 有唯一值 $\frac{\pi}{6}$ 和它对应．由此可知，如果限制在 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 范围内，$y=\sin x$ 的反函数就是单值的.

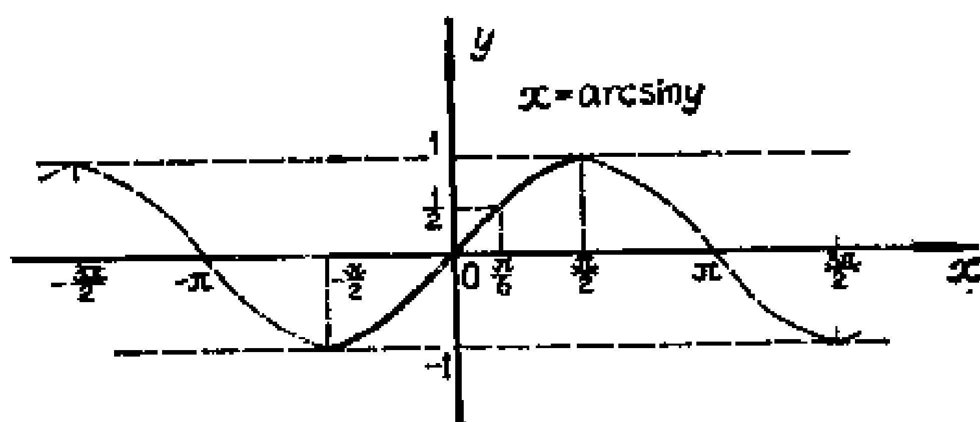


图10—2

函数 $y=\sin x$ 在 $-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 范围内的反函数叫做反正弦函数的主值，记作

$$x=\arcsin y.$$

注意，这里字母"a"是小写的.

在 $x=\arcsin y$ 中，y 表示自变量，x 表示因变量，而在习惯上又常用 x 表示自变量，y 表示因变量，按照习惯的写法用 x 表示自变量，y 表示因变量，反正弦函数的主值可以写成

$$y=\arcsin x$$

的形式.它的定义域是 $-1\leqslant x\leqslant 1$，值域是 $-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$，图象如图10—3所示.

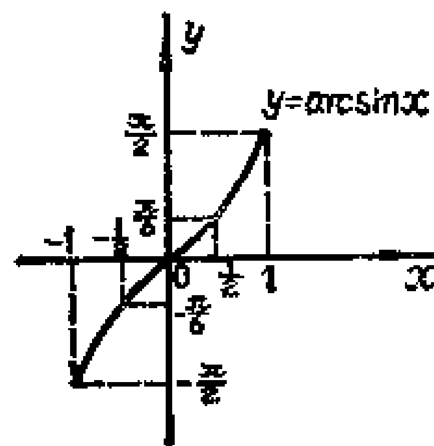


图10—3

例1 在 $y=\arcsin x$ 中，求 $x=\pm\frac{1}{2}$，$x=0$，$x=\pm 1$ 时的函数值.

解： $\because\ \sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$，且 $-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}$，

$\therefore\ \arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$；

$\because\ \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}$，且 $-\frac{\pi}{2}<-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{2}$，

$\therefore\ \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{\pi}{6}$；

$\because\ \sin 0=0$，且 $-\frac{\pi}{2}<0<\frac{\pi}{2}$，

$\therefore\ \arcsin 0=0$；

$\because\ \sin\frac{\pi}{2}=1$，　　$\therefore\ \arcsin 1=\frac{\pi}{2}$；

$\because\ \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$；　　$\therefore\ \arcsin(-1)=-\frac{\pi}{2}$。

例 2　求下列各式的值：

(1) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$；　　(2) $\arcsin\frac{2}{5}$，

(3) $\arcsin(-0.2672)$。

解： (1) $\because\ \sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，且 $-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$，

$\therefore\ \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$；

(2) 查表得 $\sin 23^\circ 35'=0.4=\frac{2}{5}$，且 $23^\circ 35'$ 是锐角，

$\therefore\ \arcsin\frac{2}{5}=23^\circ 35'$；

(3) 查表得 $\sin 15^\circ 30'=0.2672$，

$\therefore\ \sin(-15^\circ 30')=-\sin 15^\circ 30'=-0.2672$，且 $-15^\circ 30'$ 是负锐角，

$\therefore\ \arcsin(-0.2672)=-15^\circ 30'$。

习　　题

1. 什么是反正弦函数？什么是反正弦函数的主值？

2. 求下列各式的值：

(1) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$；　　(2) $\arcsin\frac{3}{4}$；

(3) $\arcsin 0.7841$；　　(4) $\arcsin(-0.7841)$。

3. 求下列各式的值：

(1) $\sin\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)$；　　(2) $\arcsin\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)$；

(3) $\arcsin\left(\sin\frac{7\pi}{6}\right)$。

第二节　反余弦函数和反正切函数

在实际问题中，也常常遇到余弦函数和正切函数的反函数．余弦函数 $y=\cos x$ 的反函数叫做反余弦函数，记作 $x=\mathrm{Arc}\cos y$．正切函数 $y=\mathrm{tg}\,x$ 的反函数叫做反正切函数，记作 $x=\mathrm{Arc}\,\mathrm{tg}\,y$．

这里，我们着重讨论反余弦函数和反正切函数的主值．

一、反余弦函数的主值

我们把余弦函数 $y=\cos x$ 在 $0\leqslant x\leqslant\pi$ 范围内的反函数（图10—4）叫做反余弦函数的主值，记作

$$x=\arccos y.$$

如果用 x 表示自变量，用 y 表示因变量，那么反余弦函数的主值可以写成

$$y=\arccos x$$

的形式．它的定义域是 $-1\leqslant x\leqslant 1$，值域是 $0\leqslant y\leqslant\pi$，图象如图10—5所示．

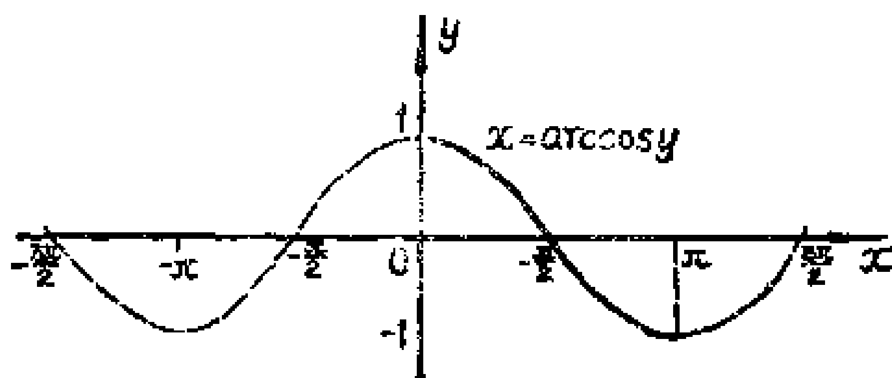


图10—4

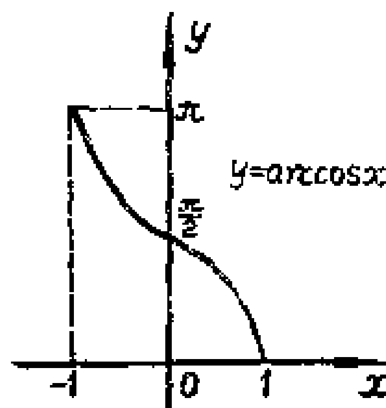


图10—5

例1　求下列各式的值：

（1）$\arccos\frac{1}{2}$；　　　　（2）$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$；

（3）$\arccos(-0.9695)$．

解：（1）∵　$\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$，且 $0<\frac{\pi}{3}<\pi$，

∴　$\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$；

（2）∵　$\cos\frac{2\pi}{3}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$，

且　$0<\frac{2\pi}{3}<\pi$，

∴　$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}$；

（3）查表得　$\cos 14^\circ 11'=0.9695$．

$\because \quad \cos(180° - 14°11') = -\cos14°11' = -0.9695,$

且 $180° - 14°11' = 165°49'$ 是钝角.

$\therefore \quad \arccos(-0.9695) = 165°49'.$

例 2 求$\sin\left[\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right]$的值.

解: 查表得 $\cos 53°8' = 0.6 = \frac{3}{5}$.

$\because \quad \cos(180° - 53°8') = -\cos 53°8' = -\frac{3}{5},$

且 $180° - 53°8' = 126°52'$ 是钝角,

$\therefore \quad \arccos\left(-\frac{3}{5}\right) = 126°52'.$

$\therefore \quad \sin\left[\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right] = \sin126°52' = \sin(90° + 36°52')$

$= \cos 36°52' = 0.8 = \frac{4}{5}.$

二、反正切函数的主值

我们把正切函数 $y = \operatorname{tg} x$ 在$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$范围内的反函数(图10—6),叫做反正切函数的主值,记作

$x = \operatorname{arc\,tg} y.$

如果用 x 表示自变量,用 y 表示因变量,那么反正切函数的主值可以写成

$y = \operatorname{arc\,tg} x$

的形式.它的定义域是$-\infty < x < +\infty$,值域是$-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$,图象如图10—7所示.

由图10—7看出:

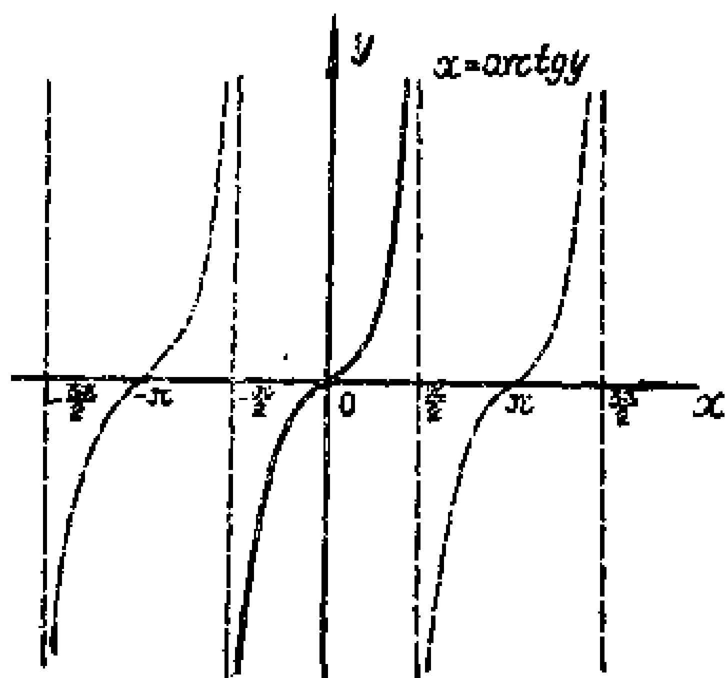


图10—6

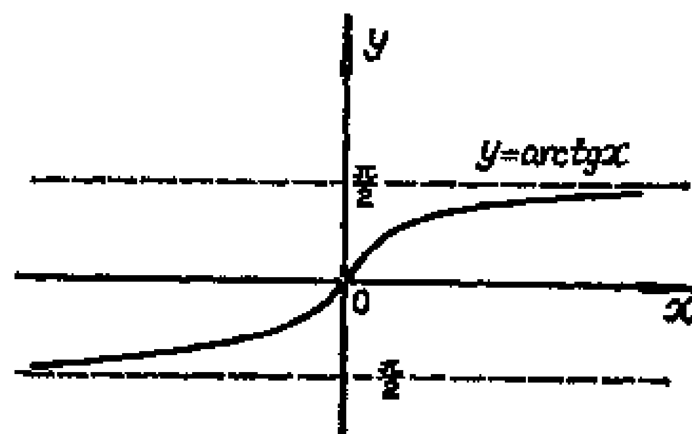


图10—7

当　$x \longrightarrow +\infty$时，　　　　$\operatorname{arctg} x \longrightarrow \frac{\pi}{2}$；

当　$x \longrightarrow -\infty$时，　　　　$\operatorname{arctg} x \longrightarrow -\frac{\pi}{2}$。

例1　求下列各式的值：

(1) $\operatorname{arc\,tg} 1$；　　　　(2) $\operatorname{arc\,tg}(-1)$；

(3) $\operatorname{arc\,tg}(-10.51)$。

解：(1) ∵　$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$，且$-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$，

∴　$\operatorname{arc\,tg} 1=\frac{\pi}{4}$；

(2) ∵　$\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-1$，且$-\frac{\pi}{2}<-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$，

∴　$\operatorname{arc\,tg}(-1)=-\frac{\pi}{4}$；

(3) 查表得　$\operatorname{tg} 84°34'=10.51$。

∵　$\operatorname{tg}(-84°34')=-\operatorname{tg} 84°34'=-10.51$，

且$-84°34'$是负锐角，

∴　$\operatorname{arc\,tg}(-10.51)=-84°34'$。

例2　如图10—8，试用反三角函数表示燕尾角φ。

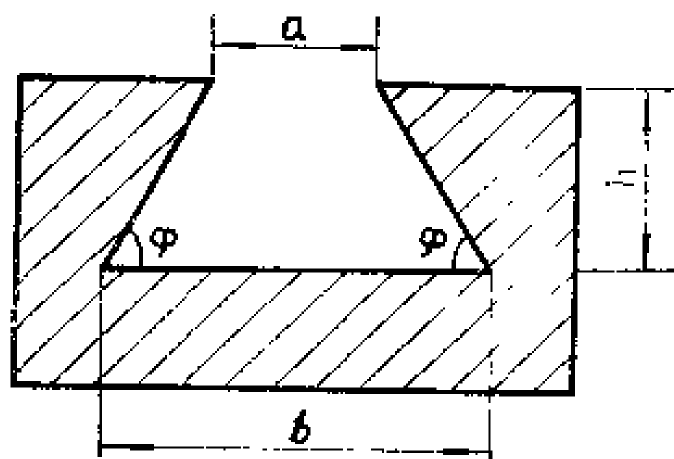


图10—8

解：　∵　$\operatorname{tg}\varphi=\frac{h}{\frac{b-a}{2}}=\frac{2h}{b-a}$，且$\varphi$是锐角，

∴　$\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{2h}{b-a}$。

习　　题

1.求下列各式的值：

(1) $\operatorname{arc\,cos}\frac{\sqrt{3}}{2}$；　　　　(2) $\operatorname{arc\,cos}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$；

(3) $\operatorname{arc\,tg}\sqrt{3}$；　　　　(4) $\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$；

(5) $\operatorname{arc\,tg}(-2.747)$；　　　　(6) $\operatorname{arc\,tg}2+\operatorname{arc\,tg}(t-3)$。

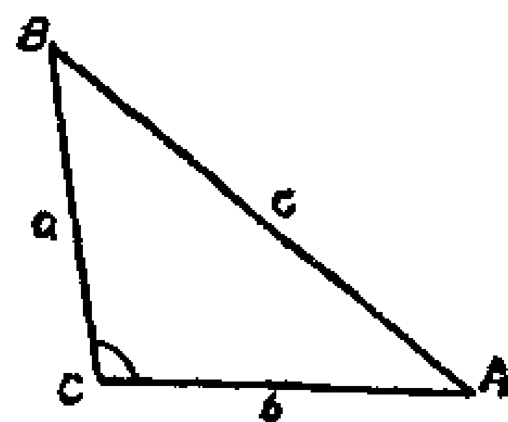
2.求下列各式的值：

(1) $\sin[\operatorname{arc\,tg}(-\sqrt{3})]$；　　(2) $\cos[\operatorname{arc\,sin}1+\operatorname{arc\,tg}(-1)]$。

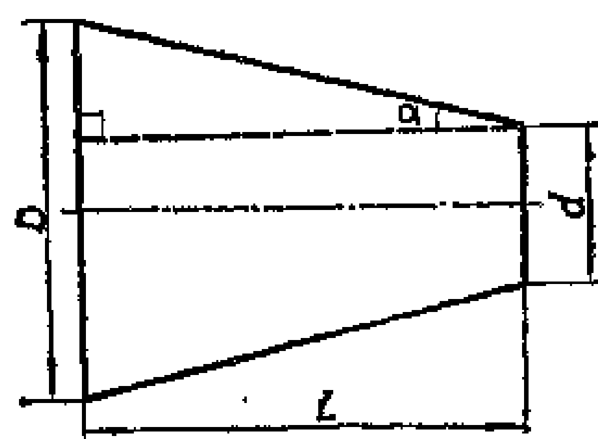
3．如图，在$\triangle ABC$中，已知三边的长分别为a、b和c，试用反三角函数表示内角C．

4．如图，试用反三角函数表示圆锥体的斜角α．

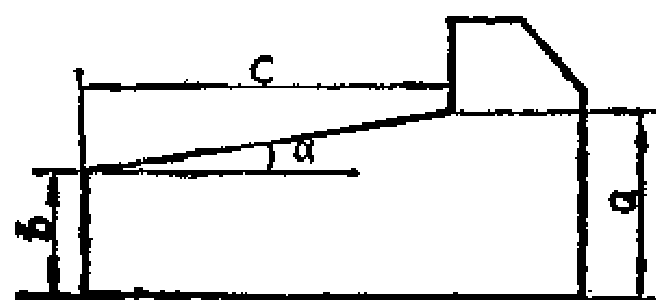
5．一斜键的形状与尺寸如图所示，试用反三角函数表示角α．



（第3题）



（第4题）



（第5题）

第十一章　三角恒等式

本章介绍三角恒等式，在高等数学、电工、力学、机械设计和制造中都要用到它。

第一节　基本恒等式

在第八章里，我们讲过的同一锐角的三角函数的基本关系式，对于任意角来说仍然成立，这里我们就不证明了．这些公式叫做三角函数间的基本恒等式．

基本恒等式

一、倒数关系

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}$$

$$\csc\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}$$

二、商数关系

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

三、平方关系

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha$$

$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\csc^2\alpha$$

利用基本恒等式，可以根据一个三角函数值，求其它三角函数值．

例1　已知 $\cos\alpha=-\frac{12}{13}$，求 $\sin\alpha$、$\operatorname{tg}\alpha$、$\operatorname{ctg}\alpha$ 的值．

解： 由 $\cos\alpha=-\frac{12}{13}<0$ 可知，α 是在第二或第三象限的角．

(1) 当 α 是第二象限的角时，有

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(-\frac{12}{13}\right)^2}=\frac{5}{13};$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}}=-\frac{5}{12};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=-\frac{12}{5}.$$

(2) 当α是第三象限的角时，有

$$\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\frac{5}{13};$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{-\frac{5}{13}}{-\frac{12}{13}}=\frac{5}{12};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{12}{5}.$$

利用基本恒等式，还可以化简一些三角函数式。

例 2 化简 $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha}{\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}$.

解：

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha}{\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}=\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)}=\frac{\frac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$$

$$=\frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{1}{\cos\alpha}\cdot\frac{1}{\sin\alpha}=\sec\alpha\cdot\csc\alpha.$$

习　　题

1. 已知 $\sin\alpha=0.8$，且 $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，求 $\cos\alpha$、$\operatorname{tg}\alpha$、$\operatorname{ctg}\alpha$ 的值。

2. 化简下列三角函数式：

(1) $\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$；　　(2) $\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$；

(3) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$；　　(4) $\dfrac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha}\operatorname{ctg}^2\alpha$；

(5) $\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$　　(6) $\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha-\cos\alpha}{1+\sin^2\alpha-\sin\alpha-\cos^2\alpha}$.

第二节　两角和与差的公式

现在我们来研究两个单角的三角函数与这两个角和与差的三角函数之间的关系．它

们的关系是:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$
$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

证明:

(1) 先证两角和的正弦和余弦公式.

如图11—1所示的单位圆中，作$\angle AOB=\alpha$，$\angle BOC=\beta$，则 $\angle AOC=\alpha+\beta$.

由C作$CD\perp OA$，$CE\perp OB$，并且再由E作$EF\perp OA$，$EG\perp DC$. 那么

$\sin(\alpha+\beta)=DC=DG+GC=FE+GC$.

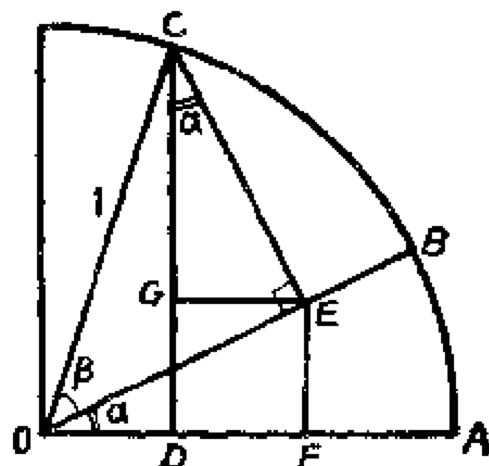


图11—1

从图11—1中可以看出: $\angle AOB=\angle DCE=\alpha$.

因此，在直角三角形EOF和ECG中，有

$$FE=OE\cdot\sin\alpha,\quad GC=EC\cdot\cos\alpha.$$

而在直角三角形COE中，$OC=1$，所以有

$$EC=\sin\beta,\quad OE=\cos\beta.$$

于是
$$\sin(\alpha+\beta)=FE+GC=OE\cdot\sin\alpha+EC\cdot\cos\alpha$$
$$=\cos\beta\cdot\sin\alpha+\sin\beta\cdot\cos\alpha.$$

即
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

用同样的方法可以得到:

$$\cos(\alpha+\beta)=OD=OF-DF=OF-GE$$
$$=OE\cdot\cos\alpha-EC\cdot\sin\alpha=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

上面是在α、β以及$\alpha+\beta$为锐角的情况下，对公式作了证明，实际上当α、β为任意角时公式都成立.

(2) 两角差的正弦和余弦公式.

$\because\ \alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$,

$\therefore\ \sin(\alpha-\beta)=\sin[\alpha+(-\beta)]=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta)$.

$=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$;

同理可得 $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.

(3) 两角和与差的正切公式.

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}$$

$$=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta};$$

同理可得 $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$.

例 1 不查表，求 $\sin 15°$ 的值.

解: $\sin 15°=\sin(45°-30°)=\sin 45°\cos 30°-\cos 45°\cdot\sin 30°$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

例 2 化简 $\sin(30°+\alpha)-\sin(30°-\alpha)$.

解: $\sin(30°+\alpha)-\sin(30°-\alpha)$

$=\sin 30°\cos\alpha+\cos 30°\sin\alpha-[\sin 30°\cos\alpha-\cos 30°\sin\alpha]$

$=2\cos 30°\sin\alpha=2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha=\sqrt{3}\sin\alpha$.

例 3 图11—2是两个伞齿轮作啮合转动的示意图. 两齿轮的轴线 OO_1 和 OO_2 与啮合处的交线 OA 在同一平面上，设两轴线相交成 φ 角，两齿轮的节圆半径分别为 R_1，R_2，$\dfrac{R_2}{R_1}=i$ 称为传动比，求两齿轮的节锥角 α 和 β.

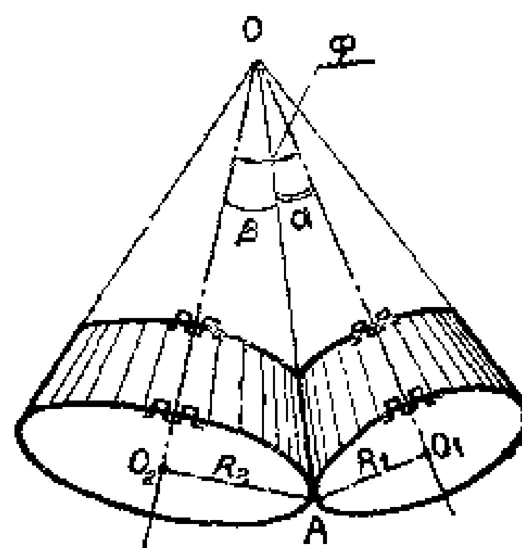


图11—2

解: 由图可以看到：

$$R_1=OA\sin\alpha,\qquad R_2=OA\sin\beta,$$

$$\therefore\quad i=\frac{R_2}{R_1}=\frac{OA\sin\beta}{OA\sin\alpha}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}.$$

$$\because\quad \alpha+\beta=\varphi,\qquad \therefore\quad \beta=\varphi-\alpha.$$

因此，传动比为

$$i=\frac{R_2}{R_1}=\frac{\sin(\varphi-\alpha)}{\sin\alpha}.$$

由这个公式直接求 α 很不方便. 利用两角差的正弦公式，得

$$i=\frac{R_2}{R_1}=\frac{\sin\varphi\cos\alpha-\cos\varphi\sin\alpha}{\sin\alpha}=\sin\varphi\operatorname{ctg}\alpha-\cos\varphi.$$

$$\therefore\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{i+\cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

由这个公式求出角 α，再由 $\beta=\varphi-\alpha$ 求出角 β.

例如 已知 $\varphi=75°$， $R_1=100mm$，$R_2=300mm$，于是，

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\dfrac{300}{100}+\cos 75°}{\sin 75°}=\frac{3+0.2588}{0.9659}=\frac{3.2588}{0.9659}=3.374.$$

$\therefore \quad \alpha = 16°31'$,

$\beta = 75° - 16°31' = 58°29'$.

例 4 在电工中常用下面的公式:

$$a\sin\omega t + b\cos\omega t = A\sin(\omega t+\varphi).$$

若 a、b 为已知数，试求 A 及 φ 的值.

解: 将 $A\sin(\omega t+\varphi)$展开，再与等式左端比较，即可求出 A 及 φ.

将公式右端展开得

$$A\sin(\omega t+\varphi) = A\cos\varphi\sin\omega t + A\sin\varphi\cos\omega t,$$

于是有 $$a\sin\omega t + b\cos\omega t = A\cos\varphi\sin\omega t + A\sin\varphi\cos\omega t.$$

比较上式两端得

$$\begin{cases} A\cos\varphi = a & (1) \\ A\sin\varphi = b & (2) \end{cases}$$

将 (1)、(2) 式两端分别平方后相加，再求算术根得

$$A = \sqrt{a^2+b^2};$$

(2) 式除以 (1) 式得

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}.$$

其中 φ 可根据 a、b 的给定值，查表求得.

根据这个公式，可将正弦、余弦之和用正弦来表示，例如:

$$\sin\omega t + \cos\omega t = \sqrt{2}\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right).$$

例 5 在图11—3 所示的电路中，已知电流

$i_1 = 20\sin(\omega t+60°)$,

$i_2 = 10\sin(\omega t-30°)$，求总电流.

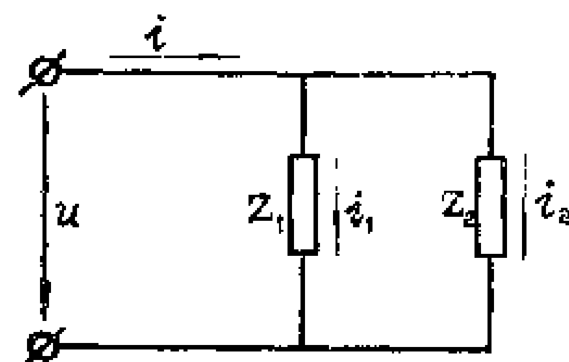


图11—3

解:

$$\begin{aligned} i &= i_1 + i_2 = 20\sin(\omega t+60°) + 10\sin(\omega t-30°) \\ &= 20(\sin\omega t\cos60° + \cos\omega t\sin60°) \\ &\quad + 10(\sin\omega t\cos30° - \cos\omega t\sin30°) \\ &= \left(\frac{1}{2}\cdot20 + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot10\right)\sin\omega t + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot20 - \frac{1}{2}\cdot10\right)\cos\omega t \\ &= 18.6\sin\omega t + 12.3\cos\omega t. \end{aligned}$$

利用例 4 的公式，把这个结果用正弦来表示. 这里 $a = 18.6$, $b = 12.3$,

所以 $$A = \sqrt{(18.6)^2+(12.3)^2} = 22.3.$$

由 $$\operatorname{tg}\varphi = \frac{12.3}{18.6} = 0.661,$$

得 $$\varphi = 33.5°.$$

于是 $$i = i_1 + i_2 = 18.6\sin\omega t + 12.3\cos\omega t = 22.3\sin(\omega t+33.5°).$$

习　题

1. 利用特殊角的函数值计算:

(1) $\sin 105°$;　(2) $\cos 75°$;　(3) $\mathrm{tg}\,105°$;　(4) $\mathrm{ctg}\,75°$.

2. 化简下列各式:

(1) $\sin 12°\cos 18° + \cos 12°\sin 18°$; (2) $\sin 21°\cos 89° + \cos 21°\sin 89°$;

(3) $\cos(36° + x)\cos(54° - x) - \sin(36° + x)\sin(54° - x)$.

3. 把下列各式化为$A\sin(\omega t + \varphi)$的形式:

(1) $\frac{\sqrt{3}}{2}\cos t - \frac{1}{2}\sin t$;　(2) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 2t + \sin 2t)$;

(3) $3\cos\omega t + 4\sin\omega t$;　(4) $\cos\omega t + 2\sin\omega t$.

4. 如图11—3所示的电路中. 若电流 $i_1 = \sin(\omega t + 30°)$, $i_2 = \sin(\omega t + 60°)$. 求总电流 i.

5. 已知 $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\sin\beta = \frac{8}{17}$, 且 α, β 都是锐角, 计算 $\sin(\alpha - \beta)$、$\cos(\alpha + \beta)$ 和 $\cos(\alpha - \beta)$.

6. 已知 $\sin A = \frac{4}{5}$, $\mathrm{tg}\,B = \frac{9}{40}$, 且 A、B 是锐角, 求 $\cos(A + B)$的值.

7. 求证:

(1) $\cos(\alpha + \beta)\cos\beta + \sin(\alpha + \beta)\sin\beta = \cos\alpha$;

(2) $\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha - \beta) = \sin^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha\sin^2\beta = \sin^2\alpha - \sin^2\beta$;

(3) $\frac{\mathrm{tg}(\theta - \varphi) + \mathrm{tg}\,\varphi}{1 - \mathrm{tg}(\theta - \varphi)\mathrm{tg}\,\varphi} = \mathrm{tg}\,\theta$.

8. 当 $\mathrm{tg}\varphi = \frac{\omega L}{R}$ 时, 求证:

$$RI\sin\omega t + \omega LI\sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = I\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}\sin(\omega t - \varphi).$$

第三节　倍角公式和半角公式

倍角公式是用自变量 α 的三角函数, 表示 2α 的三角函数的公式. 半角公式是用自变量 α 的三角函数, 表示$\frac{\alpha}{2}$的三角函数的公式.

一、倍角公式

在正弦和余弦的两角和的公式中,

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$

设 $\alpha = \beta$, 就得到下面的倍角公式:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$= 2\cos^2\alpha - 1$$
$$= 1 - 2\sin^2\alpha$$

因为 $\alpha = 2\cdot\frac{\alpha}{2}$，所以由倍角又可得出：

$$\sin\alpha = \sin\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

$$\cos\alpha = \cos\left(2\cdot\frac{\alpha}{2}\right) = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$= 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

例 1　已知 $\sin\alpha = \frac{4}{5}$，并且 $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$，求 $\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$ 的值．

解：　$\because$　$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$，$\cos\alpha < 0$，

$\therefore$　$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2} = -\frac{3}{5}.$

$\therefore$　$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25}.$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \left(-\frac{3}{5}\right)^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^2 = -\frac{7}{25}.$

例 2　求函数 $y = 4\sin x\cos x$ 的周期，并且作这个函数在区间 $(-\pi, \pi)$ 上的图象．

解：　$\because$　$y = 4\sin x\cos x = 2\sin 2x$，

$\therefore$　$y = 4\sin x\cos x$ 的周期是 π．

根据正弦型曲线的作法，作出图象（图11—4）．

二、半角公式

由　$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$，得

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2},$$

$\therefore$　$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}.$

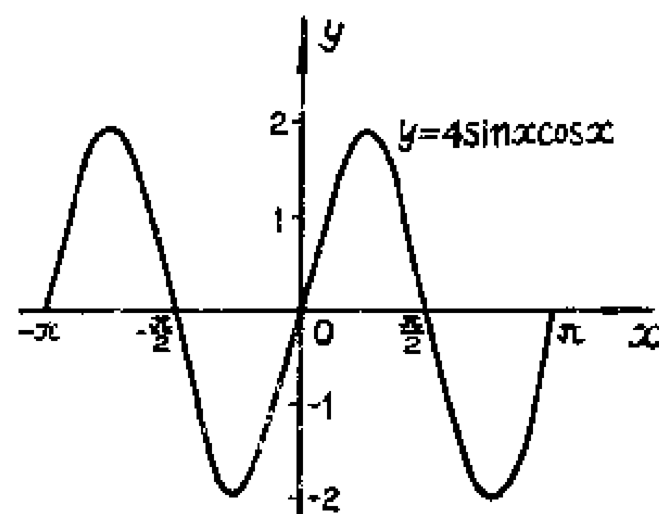


图11—4

由　$\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$，得

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2},$$

$$\therefore\quad \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.$$

这样就得到半角公式：

$$\boxed{\begin{aligned}\sin\frac{\alpha}{2}&=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}\\ \cos\frac{\alpha}{2}&=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\end{aligned}}$$

其中根号前的符号，由$\frac{\alpha}{2}$所在的象限确定.如果已知$\cos\alpha$的值，而α不加限制，则根号前应保持正负两个符号.

例 3 求证 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

证明： $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot 2\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot 2\cos\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$,

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

例 4 灯泡的瞬时功率p等于电压和电流的积，已知电压为$u=U\sin\omega t$，电流为$i=I\sin\omega t$，求证：

$$p=\frac{1}{2}UI\,(1-\cos 2\omega t).$$

证明： $p=ui=U\sin\omega t\cdot I\sin\omega t=UI\sin^2\omega t$,

$\because\quad \sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$, $\qquad\therefore\quad \sin^2\omega t=\dfrac{1-\cos 2\omega t}{2}$,

$$\therefore\quad p=UI\sin^2\omega t=\frac{1}{2}UI(1-\cos 2\omega t).$$

习　　题

1.不查表，求下面各式的值：

(1) $2\sin 15^\circ\cos 15^\circ$;　　(2) $\cos^2 22^\circ 30'-\sin^2 22^\circ 30'$;

(3) $1-2\sin^2 15^\circ$;　　(4) $\cos^2\frac{\pi}{8}-\sin^2\frac{\pi}{8}$;

(5) $1-2\sin^2 750°$;　　　　(6) $\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{5\pi}{12}$.

2.已知$\sin\alpha=0.8$，并且α是锐角，求$\sin 2\alpha$与$\cos 2\alpha$的值.

3.证 明 $\sin^2\omega t=\frac{1-\cos 2\omega t}{2}$，$\cos^2\omega t=\frac{1+\cos 2\omega t}{2}$.

4.化简下列各式:

(1) $\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{1+\sin 2\alpha}$;　(2) $\frac{1-\cos^2\alpha}{2\sin\alpha}$;　(3) $\frac{1-\cos 2\alpha}{2\sin\alpha}$;

(4) $-\frac{\cos\alpha}{\sin^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\frac{\alpha}{2}}$;　(5) $\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}$;　(6) $\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$.

5.设　$450°<\alpha<540°$，并 且 $\sin\alpha=\frac{336}{625}$，求$\cos\frac{\alpha}{2}$.

6.已知 $\sin\theta=0.28$，并且$90°<\theta<180°$，求$\sin\frac{\theta}{2}$、$\cos\frac{\theta}{2}$.

7.求证:

(1) $2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin(\pi-\alpha)=\sin 2\alpha$;　(2) $\cos 2\alpha=\cos^4\alpha-\sin^4\alpha$;

(3) $\left(\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2=1-\sin\alpha$;　(4) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$.

第四节　和差化积公式和积化和差公式

由两角和与差的正、余弦公式可得如下两组公式:

一、和差化积公式

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

二、积化和差公式

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$

例1 求 $\sin75°\sin15°$ 的值.

解: $\sin75°\sin15°=\frac{1}{2}[\cos(75°-15°)-\cos(75°+15°)]$

$$=\frac{1}{2}[\cos60°-\cos90°]=\frac{1}{4}.$$

例2 三相交流发电机中的三个绕组接成星形（图11—5），其中 U_{AO}，U_{BO} 是相电压（每相绕组的电压），U_{AB} 是线电压（二根火线间的电压）.已知相电压

$$U_{AO}=U_m\sin\omega t,\ U_{BO}=U_m\sin\left(\omega t-\frac{2}{3}\pi\right),$$

求线电压 $U_{AB}=U_{AO}-U_{BO}$.

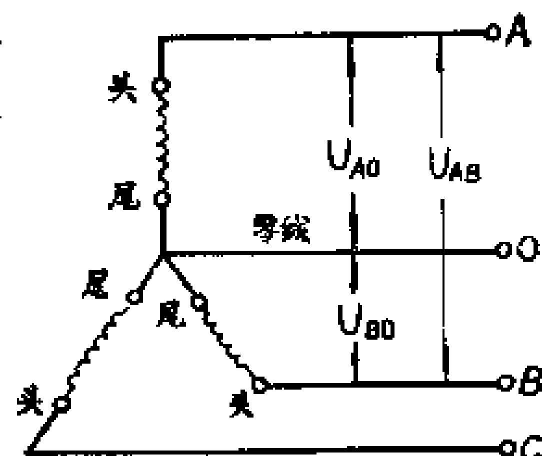


图11—5

解:

$$U_{AB}=U_{AO}-U_{BO}$$

$$=U_m\sin\omega t-U_m\sin\left(\omega t-\frac{2}{3}\pi\right)$$

$$=U_m\left[\sin\omega t-\sin\left(\frac{2}{3}\pi-\omega t\right)\right]$$

$$=U_m\left[2\sin\frac{\omega t+\frac{2}{3}\pi-\omega t}{2}\cos\frac{\omega t-\frac{2}{3}\pi+\omega t}{2}\right]$$

$$=2U_m\sin\frac{\pi}{3}\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=\sqrt{3}\,U_m\cos\left(\frac{\pi}{3}-\omega t\right)$$

$$=\sqrt{3}\,U_m\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{6}\right).$$

上式说明了线电压是相电压的$\sqrt{3}$倍，当相电压为220伏时，线电压便为$\sqrt{3}\times220=380$伏.

习　题

1.不查表，求下列各式的值:

(1) $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$;　　(2) $\cos 75^\circ + \cos 15^\circ$;

(3) $\cos 75^\circ \cos 15^\circ$;　　(4) $\sin 45^\circ \sin 15^\circ$.

2.利用和差化积公式将下列各式化为积的形式:

(1) $\sin 3\alpha - \sin\alpha$;　　(2) $\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$;

(3) $\sin 10^\circ + \sin 50^\circ$;　　(4) $\sin\omega t + \cos\omega t$.

3.利用积化和差公式将下列各式化为和差的形式:

(1) $2\sin 2\alpha \cos\alpha$;　　(2) $\sin\omega t \cos\omega t$;

(3) $\sin 5x \cos 3x$;　　(4) $2\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$.

4.试证: $\cos\alpha + \cos(120^\circ+\alpha) + \cos(240^\circ+\alpha) = 0$.

5.试证: $\sin\omega t + \sin(\omega t + 120^\circ) + \sin(\omega t + 240^\circ) = 0$.

复 习 题

1.已知 $\sin\alpha = \frac{15}{17}$，且 $90^\circ < \alpha < 180^\circ$，求 α 的其他三角函数值。

2.已知 $\cos\alpha = \frac{49}{81}$，求 $\sin\frac{\alpha}{2}$ 和 $\cos\frac{\alpha}{2}$.

3.简化下列各式:

(1) $\dfrac{\cos\alpha\cos\beta - \cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta - \cos(\alpha-\beta)}$;

(2) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha}$;

(3) $\dfrac{1+\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}$.

4.将 $8\sin(\omega t + 60^\circ) - 6\cos(\omega t + 60^\circ)$ 化成 $A\sin(\omega t + \varphi)$ 的形式。

第十二章　矢量和复数

“理论的基础是实践，又转过来为实践服务。”矢量和复数同数学中其他内容一样，是由于生产实践的需要而产生和发展起来的，转过来又为生产实践和科学实验服务．譬如在力学、电工学中，经常用到矢量和复数这一类数学工具．

第一节　矢量及其运算

一、矢量

我们遇到各种各样的量．这些量可分为两大类：一类是仅由它们数值的大小就可以确定的量，如温度、时间、质量等，这一类叫做数量；而另一类量不仅要由它们数值的大小而且要由它们的方向来确定，如力、速度、电场强度等，这一类量叫做矢量．**“有比较才能鉴别。”**数量可以用一个数来表示，但矢量仅用一个数表示是不够的，还要指出它的方向．“有方向”是矢量区别于数量的标志．例如竖直向下的50公斤的力是个矢量．50公斤就是它的大小，而竖直向下表示它的方向．

通常用一条标有方向的线段来表示矢量，线段的长度表示矢量的大小，箭头所指的方向表示矢量的方向〔图12—1（1）〕．若矢量的起点是A，终点是B，这个矢量就记为$\overrightarrow{AB}$或$\vec{a}$．这就是矢量的几何表示法，这种表示法的优点比较直观．

矢量的大小叫做矢量的模．矢量$\overrightarrow{AB}$（或$\vec{a}$）的模记为$|\overrightarrow{AB}|$（或$|\vec{a}|$）．

今后，如果没有特殊的限制，我们允许矢量$\overrightarrow{AB}$可自由地作平行移动，如图12—1(2)中的$\overrightarrow{A'B'}$就是由$\overrightarrow{AB}$平行移动得来的，它们代表同一矢量．

如果两矢量$\vec{a}$和$\vec{b}$的模相等，且方向相同，我们就称这两个矢量相等，记为$\vec{a}=\vec{b}$．如图12—1(3)所示．

若模相等但方向相反的两个矢量，我们就称它们互为反矢量．我们把一个矢量$\vec{a}$的反矢量记做$-\vec{a}$〔图12—1（4）〕，显然有$\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$．

模等于零的矢量叫做零矢量，并记为$\vec{0}$．零矢量的方向可以看作是任意的．

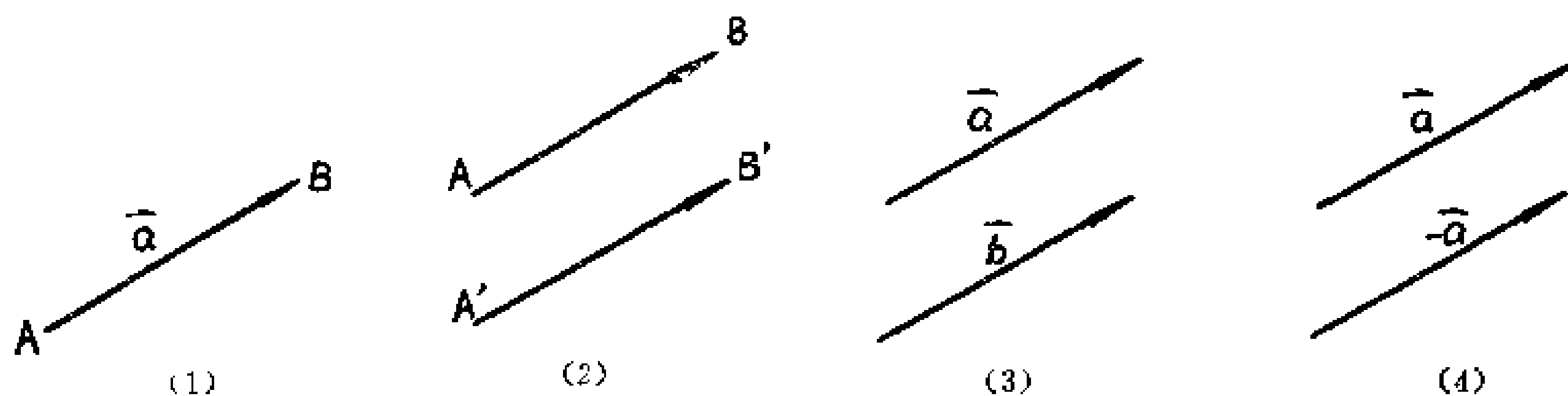


图12—1

二、矢量的运算

因为矢量除了大小以外，还有方向，所以不能把数量的运算法则照搬到矢量中来，下面就研究矢量的运算。

1.矢量的加法

由物理学知，作用于同一点的两个力$\vec{F}_1$和$\vec{F}_2$，其合力$\vec{F}$的大小和方向，就是以这两个力为边的平行四边形对角线矢量$\vec{F}$(图12—2). 矢量的加法也按这个方法规定：

两矢量$\vec{a}$与$\vec{b}$的和，就是由点O作矢量$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，以$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$为边作平行四边形的对角线矢量$\overrightarrow{OC}$（图12—3）.记作

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB},$$

或
$$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}.$$

这方法称为平行四边形法.

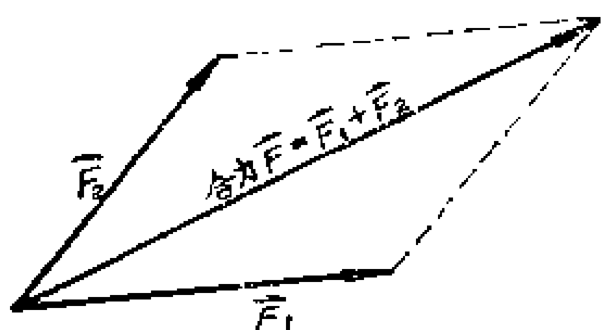


图12—2

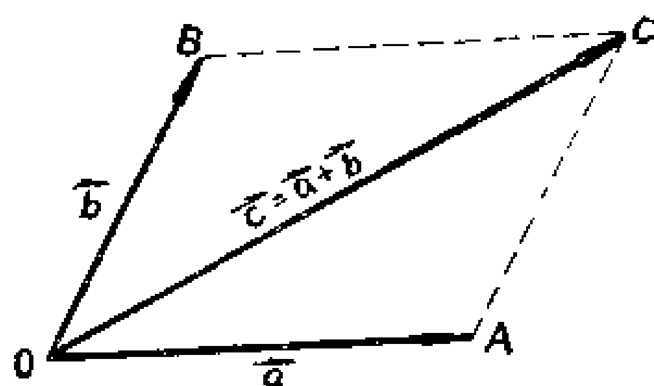


图12—3

由图12—3可以看出，$\overrightarrow{OB}$与$\overrightarrow{AC}$代表同一矢量$\vec{b}$，因此两矢量的和也可按下面的方法求得：先作$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，再把$\vec{a}$的终点$A$作为$\vec{b}$的起点，作$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，那么$\triangle OAB$的第三边$\overrightarrow{OB}$就是矢量$\vec{a}$与$\vec{b}$的和（图12—4），即

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\vec{a}+\vec{b}.$$

这个方法也称为三角形法.

三个以上的矢量的加法，可按下法进行：如已知矢量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$，求$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$时，只要将前一矢量的终点作为后一矢量的起点，依次相接，则以第一个矢量$\vec{a}$的起点O和最后一个矢量$\vec{c}$的终点C构成的矢量$\overrightarrow{OC}$就是所求的和（图12—5），即

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}.$$

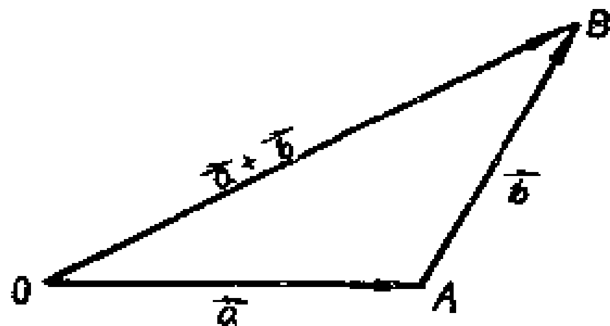


图12—4

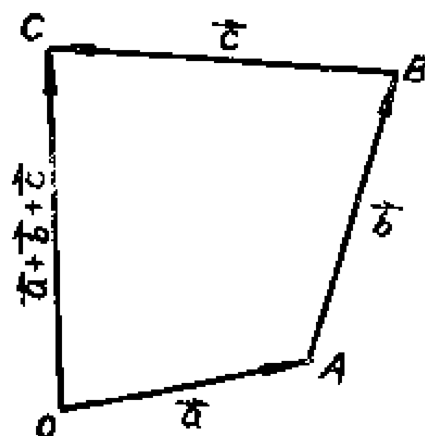


图12—5

这个方法称为多边形法.

由上述的规定可知，矢量的和仍然是一个矢量，它的模和方向可由已知矢量的模和方向计算出来.

例1 作用在O点的两个力$\vec{F}_1$和$\vec{F}_2$，$|\vec{F}_1|=5$公斤，$|\vec{F}_2|=3$公斤，它们的夹角是60°（图12—6），求$\vec{F}_1$和$\vec{F}_2$的合力$\vec{F}$.

解: $\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2$.

在$\triangle OAC$中，$OA=|\vec{F}_1|=5$，$AC=|\vec{F}_2|=3$，$\angle A=180^\circ-60^\circ=120^\circ$，由余弦定理得:

$$|\vec{F}|=\sqrt{5^2+3^2-2\times5\times3\cos120^\circ}$$

图12—6

$$=\sqrt{25+9-30\times\left(-\frac{1}{2}\right)}=\sqrt{49}=7\text{（公斤）}.$$

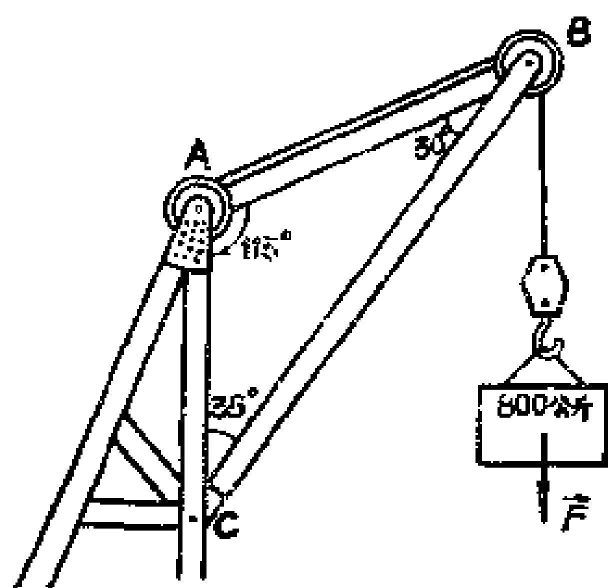
再由正弦定理得

$$\sin\alpha=\frac{AC}{OC}\sin120^\circ=\frac{3}{7}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=0.3711,$$

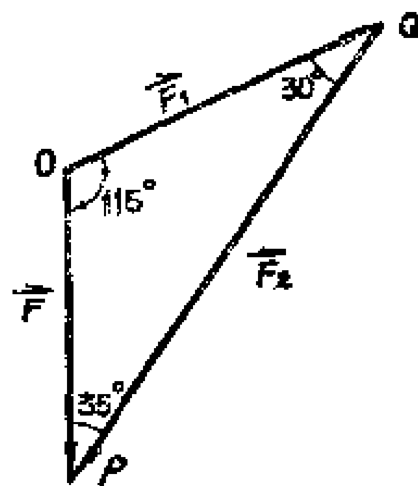
查表得 $\alpha=21^\circ47'$.

答: 合力$\vec{F}$的大小是7公斤，它和$\vec{F}_1$的夹角是21°47′.

例2 某吊装设备如图12－7(1). 设重力$\vec{F}$的大小为800公斤，求沿钢索AB方向的分力$\vec{F}_1$和支撑BC方向的分力$\vec{F}_2$的大小.



（1）



（2）

图12—7

解: $\vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2$.

依题意，在$\triangle OPQ$中〔图12－7(2)〕，由正弦定理得:

$$|\vec{F}_1|=\frac{|\vec{F}|}{\sin30^\circ}\cdot\sin35^\circ=\frac{800}{0.5}\times0.5736=918\text{（公斤）};$$

$$|\vec{F}_2|=\frac{|\vec{F}|}{\sin30^\circ}\cdot\sin115^\circ=\frac{800}{0.5}\times0.9063=1450\text{（公斤）}.$$

答： 重力沿钢索方向的分力大小是918公斤，沿支撑方向的分力大小是1450公斤．

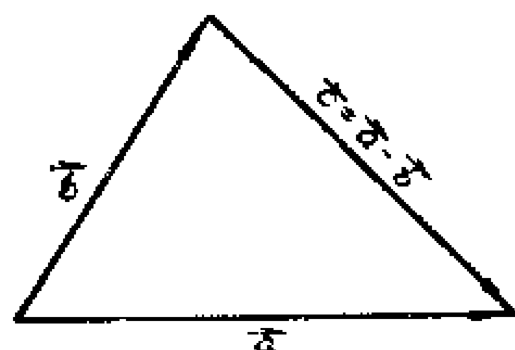
在力学中，如例1那样已知两个分力，求它的合力问题叫做力的合成；如例2那样把一个力分解成两个确定方向的分力的问题叫做力的分解．

2.矢量的减法

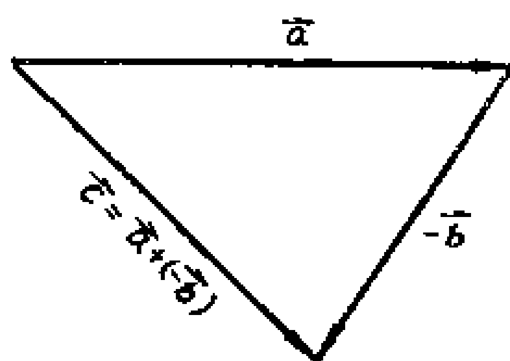
象数量的减法是加法的逆运算一样，矢量的减法也是加法的逆运算．因此，我们可以由两个矢量的和来定义两个矢量的差．

如果 $\vec{c}+\vec{b}=\vec{a}$，那末，称 $\vec{c}$ 为 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的差，记作 $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$．

已知 $\vec{a}$、$\vec{b}$，怎样求 $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$ 呢？如图12－8(1)，根据矢量加法的三角形法，把 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的起点放在一起．以 $\vec{b}$ 的终点为起点，以 $\vec{a}$ 的终点为终点的矢量 $\vec{c}$ 就是 $\vec{a}-\vec{b}$．



(1)



(2)

图 12—8

实际上，利用反矢量，矢量的减法都可以化为加法．如图12—8(1)和(2)表明 $\vec{a}-\vec{b}$ 和 $\vec{a}+(-\vec{b})$ 是一样的，即

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}).$$

3.数量与矢量的乘积

由物理学知，两个大小相等方向相同的力 $\vec{F}_1$ 和 $\vec{F}_2$ 作用在物体的同一点上，其效果相当于 $2\vec{F}_1$（或 $2\vec{F}_2$）的力作用在该点上．$2\vec{F}_1$ 就是一个数量与一个矢量的乘积．

一般地，数量 k 与矢量 $\vec{a}$ 的乘积 $k\vec{a}$ 仍是一个矢量，它的模为：

$$|k\vec{a}|=|k||\vec{a}|.$$

$k\vec{a}$ 的方向：当 $k>0$ 时，与 $\vec{a}$ 相同；当 $k<0$ 时，与 $\vec{a}$ 相反．

特别－1与 $\vec{a}$ 相乘得 $\vec{a}$ 的反矢量 $-\vec{a}$，0与 $\vec{a}$ 相乘得零矢量，即

$$(-1)\vec{a}=-\vec{a}, \qquad 0\vec{a}=\vec{0}.$$

模等于1的矢量叫做单位矢量，若用 $\vec{a}_0$ 表示与 $\vec{a}$ 同方向的单位矢量，则由数量与矢量的乘积，可知

$$\vec{a}=|\vec{a}|\vec{a}_0,$$

故有

$$\vec{a}_0=\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.$$

三、平面矢量的坐标表示法

上述矢量的运算虽然比较直观，但要计算它的模和确定它的方向却是比较麻烦的．为了简化这些计算，我们引进矢量的坐标表示法．

这里只讨论在一个平面内的矢量叫做平面矢量．

大家知道，平面上的一个力可以分解为两个相互垂直的力，同样，平面上的一个矢量也可以分解成两个互相垂直的矢量．

如图12—9，在平面上建立直角坐标系，设x轴正方向上的单位矢量为$\vec{i}$，y轴正方向上的单位矢量为$\vec{j}$，$\vec{a}$是平面上任一矢量．现把矢量$\vec{a}$平移，使它的起点放在坐标原点上，设终点M的坐标为（x，y)，于是有

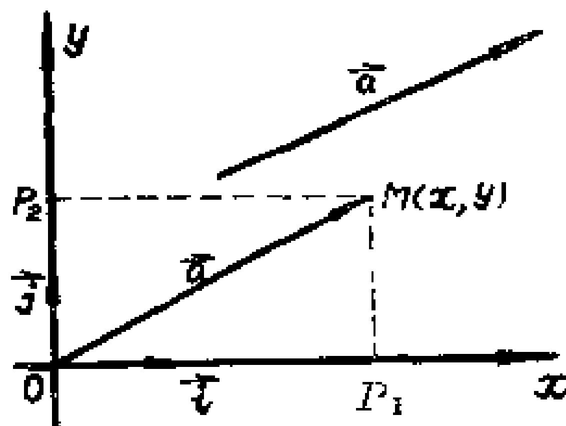


图12—9

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}.$$

$\because$ $\overrightarrow{OP_1}=x\vec{i}$；$\overrightarrow{OP_2}=y\vec{j}$，

$\therefore$ $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}$，

即 $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}.$

上式叫做矢量$\vec{a}$的坐标表示式，其中x，y分别叫做矢量$\vec{a}$在x轴、y轴上的投影．

例1 图12—9中，设矢量$\vec{a}$的模$|\vec{a}|=4$，它和x轴正向的夹角为$\frac{\pi}{6}$，试写出矢量$\vec{a}$的坐标表示式．

解： $\because$ $x=|\vec{a}|\cos\frac{\pi}{6}=4\times\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$，

$y=|\vec{a}|\sin\frac{\pi}{6}=4\times\frac{1}{2}=2$，

$\therefore$ $\vec{a}=2\sqrt{3}\vec{i}+2\vec{j}.$

矢量的坐标表示式表明，平面上任意一矢量$\vec{a}$可以确定坐标平面上一个点M（x，y)，反之坐标平面上任意一点M（x，y），把原点和它连成线段以后，就确定一个以原点为起点，$M(x，y)$为终点的矢量$\vec{a}$．这样，平面上的矢量和坐标平面上的点建立了一一对应关系，即

$$\text{矢量}\ \vec{a}\Longleftrightarrow M\ (x,\ y)\ .$$

例如，矢量$\vec{a}=2\sqrt{3}\vec{i}+2\vec{j}$和$M(2\sqrt{3},2)$相对应．

设$\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}$，从图12—10可知，$\vec{a}$的模为

$$|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2},$$

$\vec{a}$的方向，决定于$\vec{a}$和x轴正向的夹角φ，而夹角φ由下式确定

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x},\quad -\pi<\varphi\leqslant\pi.$$

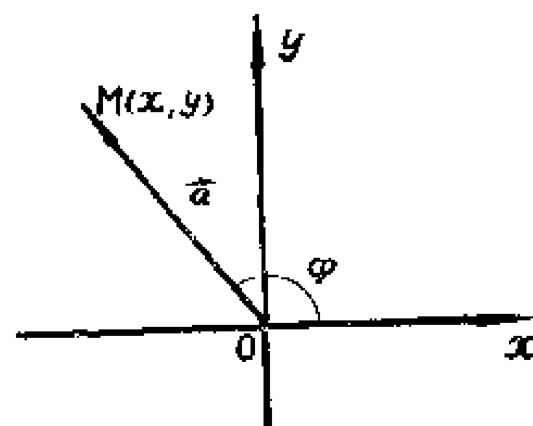


图12—10

注意：应根据矢量的终点$M(x，y)$所在的象限来确定φ的值．

在图12—10中，

$\because$ $x=|\vec{a}|\cos\varphi$，　　$y=|\vec{a}|\sin\varphi$，

$$\therefore\quad \vec{a}=|\vec{a}|\cos\varphi\,\vec{i}+|\vec{a}|\sin\varphi\,\vec{j},$$

即有 $$\vec{a}=|\vec{a}|(\cos\varphi\,\vec{i}+\sin\varphi\,\vec{j}).$$

上式叫做矢量$\vec{a}$的三角表示式，其中φ叫做矢量$\vec{a}$的幅角.

例2 设$\vec{a}=-\vec{i}+\sqrt{3}\,\vec{j}$，求$\vec{a}$的模$|\vec{a}|$和幅角$\varphi$。

解: $|\vec{a}|=\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+3}=2$，

由于$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sqrt{3}}{-1}=-\sqrt{3}$，并且$\vec{a}$的终点$M(-1,\sqrt{3})$在第二象限内，所以$\varphi=120°$.

有了矢量的坐标表示式后，就可以将矢量的运算，转化为数量的运算.

设 $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}$，　$\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}$，则有

$$\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2)\vec{i}+(y_1+y_2)\vec{j};$$

$$\vec{a}-\vec{b}=(x_1-x_2)\vec{i}+(y_1-y_2)\vec{j};$$

$$K\vec{a}=Kx_1\vec{i}+Ky_1\vec{j}.$$

例3 如图12—11，已知$\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}$，$\vec{b}=3\vec{i}+\vec{j}$，求$\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$，并计算$\vec{c}$的模和幅角.

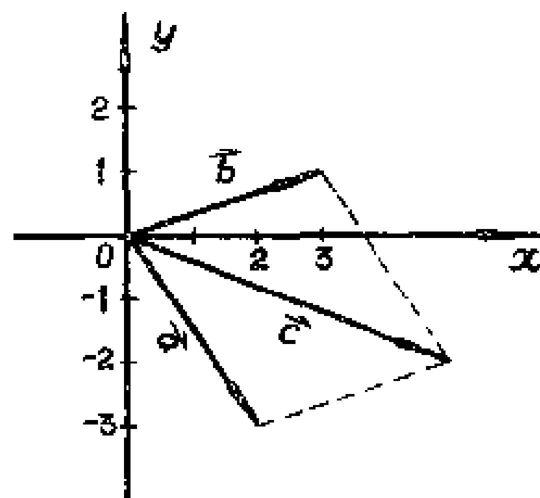


图12—11

解: $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}=(2+3)\vec{i}+(-3+1)\vec{j}$

$=5\vec{i}-2\vec{j}$,

$|\vec{c}|=\sqrt{5^2+(-2)^2}=\sqrt{29}=5.385$.

由于$\operatorname{tg}\varphi=\frac{-2}{5}=-0.4$，并且$\vec{c}$的终点$(5,-2)$在第四象限内，所以$\vec{c}$的幅角$\varphi=-21°48'$.

习　题

1.两矢量的模相等，两矢量是否相等?

2.$\vec{a}>\vec{b}$有没有意义? $|\vec{a}|>|\vec{b}|$有没有意义?

3.矢量$\vec{a}$与$\vec{b}$必须满足什么条件，以下等式才成立?

(1) $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$; (2) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$; (3) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$.

4.已知矢量$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$，试作:

(1) $\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$; (2) $\vec{a}+2\vec{b}-3\vec{c}$($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$自己任意选定).

5.在平行四边形$ABCD$内，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$. 设$M$是对角线的交点，试

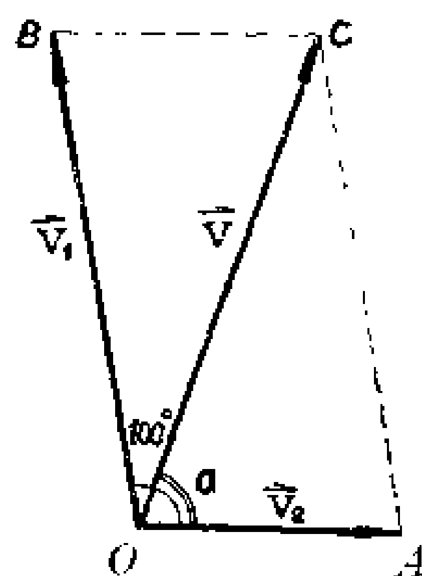
用$\vec{a}$和$\vec{b}$表示矢量$\overrightarrow{MA}$、$\overrightarrow{MB}$、$\overrightarrow{MC}$和$\overrightarrow{MD}$.

6.已知矢量$\vec{a}$与$\vec{b}$之间的夹角为$\varphi=60°$，$|\vec{a}|=5$，$|\vec{b}|=3$，求$|\vec{a}+\vec{b}|$、$|\vec{a}-\vec{b}|$以及$\vec{a}+\vec{b}$与$\vec{a}$的夹角φ.

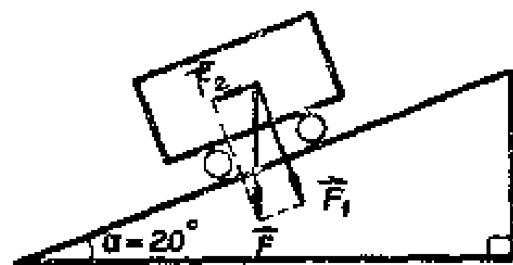
7.如图，轮渡以每小时15公里的速度沿OB方向行驶，水流以每小时4公里的速度沿OA方向流动，OA与OB的夹角为100°，求轮渡实际航行的速度$\vec{V}$的大小以及它和水流方向的夹角α.

8.如图，2吨重的货物沿倾角为20°的斜面向下自由滚动，求货物对斜面的压力$\vec{F_1}$和向下滚动时的下滑力$\vec{F_2}$的大小.

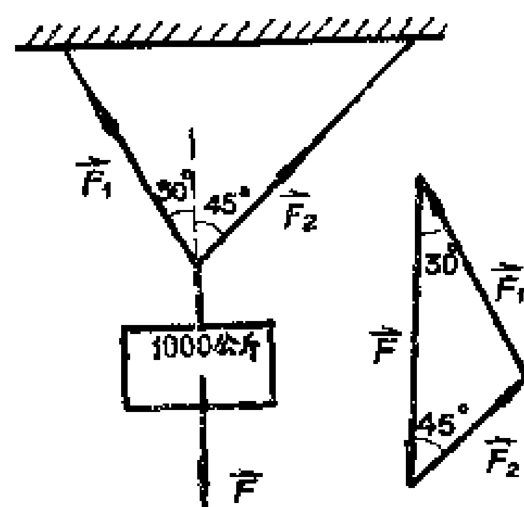
9.如图，用绳索起吊货物，如果两绳索与铅垂线的交角为30°和45°，货物重$F=1000$公斤，试求两绳索所承受的拉力$\vec{F_1}$和$\vec{F_2}$的大小.



（第7题）



（第8题）



（第9题）

10.写出矢量$\vec{a}=\frac{1}{3}(2\vec{i}+2\vec{j})$与$\vec{b}=\frac{1}{3}(-\vec{i}+2\vec{j})$的终点坐标并求其模.

11.已知$\vec{a}=\vec{i}+4\vec{j}$，求$\vec{a}$的模和幅角φ.

12.已知$\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}$，$\vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}$. 试求出下列矢量的模和幅角：

(1) $\vec{a}+\vec{b}$；　　(2) $\vec{a}-\vec{b}$.

13.已知矢量$\vec{a}=5\vec{i}+12\vec{j}$，　$\vec{b}=\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$.

求　$2\vec{a}+3\vec{b}$；　$\frac{3}{2}\vec{a}+3\vec{b}$；　$|\vec{a}|$；　$|\vec{b}|$；　$\vec{a}_0$；　$\vec{b}_0$.

第二节　复数及其运算

在科学技术中，常要利用复数进行计算，例如利用复数可以把交流电路的计算问题简化.因此，复数及其运算已成为科学技术中一种重要的数学工具.

一、复数和平面矢量

在第三章里，我们已经知道，形如

$$Z = a + jb$$

的数叫做复数，其中 a 和 b 是实数，j 是虚数单位（满足 $j^2 = -1$）．实数 a 和 b 分别叫做复数 Z 的实部和虚部．

我们把 $a - jb$ 叫做复数 $Z = a + jb$ 的共轭复数，记作 $\bar{Z}$，即 $\bar{Z} = a - jb$．例如 $Z_1 = 2 + j3$ 的共轭复数是 $\bar{Z}_1 = 2 - j3$，$Z_2 = 3 - j5$ 的共轭复数是 $\bar{Z}_2 = 3 + j5$．

在平面直角坐标系里，每一个复数 $Z = a + jb$ 都可以用横坐标为 a，纵坐标为 b 的点 $M(a, b)$ 来表示（图12—12）．于是，对于任意一复数，$Z = a + jb$，可以确定坐标平面上的一个点 $M(a, b)$；反之，对于坐标平面上的任意一个点 $M(a, b)$，可以确定一个复数 $Z = a + jb$．这样，复数和坐标平面上的点建立了一一对应关系，即

$$\text{复数 } Z = a + jb \Longleftrightarrow \text{点 } M(a, b).$$

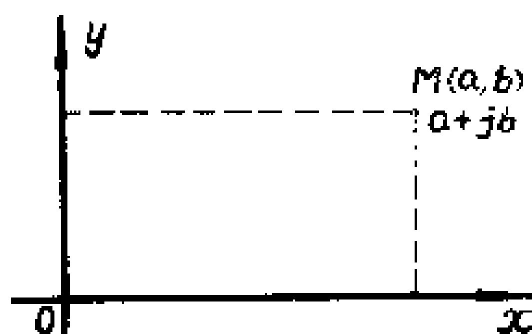


图12—12

在复数 $Z = a + jb$ 中，当 $b = 0$ 时，复数 Z 就是实数 a，这时它所对应的点都在 x 轴上，因此，x 轴叫做实轴；当 $a = 0$，$b \neq 0$ 时，复数 Z 就是纯虚数 jb，这时它所对应的点都在 y 轴上，因此，y 轴叫做虚轴．

在上一节里，我们把平面矢量 $\overrightarrow{OM}$ 和坐标平面上的点 $M(a, b)$ 建立了一一对应关系，即

$$\text{矢量 } \overrightarrow{OM} \Longleftrightarrow M(a, b).$$

而在本节中坐标平面上的点 $M(a, b)$ 又和复数 $Z = a + jb$ 建立了一一对应关系，所以复数 $Z = a + jb$ 和矢量 $\overrightarrow{OM}$ 之间可以建立一一对应关系，即

$$\text{复数 } Z = a + jb \Longleftrightarrow \text{矢量 } \overrightarrow{OM}.$$

我们把与复数 $Z = a + jb$ 相对应的矢量 $\overrightarrow{OM} = a\vec{i} + b\vec{j}$ 的模，叫做复数的模，记为 $|Z|$（或 r），矢量 $\overrightarrow{OM}$ 的幅角 φ 叫做复数 Z 的幅角，记为 $\arg Z$（图12—13）．即

$$|Z| = r = \sqrt{a^2 + b^2},$$

$$\arg Z = \varphi.\ (\text{其中 } \operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a})$$

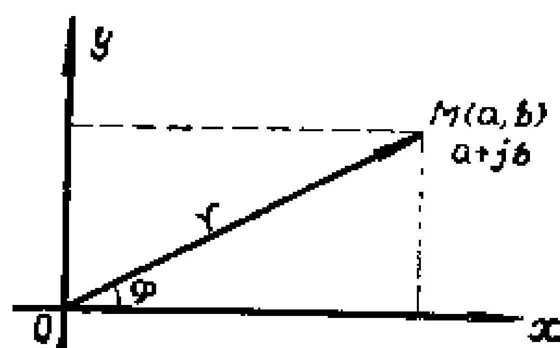


图12—13

注意：应根据复数对应点所在的象限来确定幅角的值．

例 求 $Z = 5 - j12$ 的模和幅角．

解： $|Z| = r = \sqrt{5^2 + (-12)^2} = \sqrt{169} = 13$．

∵ $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{12}{5} = -2.4$，并且点 $(5, -12)$ 在第四象限，

∴ $\arg Z = \varphi = -67°23'$．

二、复数的运算

复数的加减法和乘法，可按多项式的加减法和乘法法则来进行．

设 $Z_1 = a_1 + jb_1$，　　$Z_2 = a_2 + jb_2$，则

1．加法

$$Z_1 + Z_2 = (a_1 + jb_1) + (a_2 + jb_2) = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2).$$

2. 减法

$$Z_1-Z_2=(a_1+jb_1)-(a_2+jb_2)=(a_1-a_2)+j(b_1-b_2).$$

例1 设 $Z_1=3+j4$, $Z_2=5-j7$, 求 Z_1+Z_2; Z_1-Z_2.

解: $Z_1+Z_2=(3+j4)+(5-j7)=(3+5)+j(4-7)=8-j3$;

$Z_1-Z_2=(3+j4)-(5-j7)=(3-5)+j[4-(-7)]=-2+j11$.

3. 乘法

$$Z_1\cdot Z_2=(a_1+jb_1)(a_2+jb_2)=a_1a_2+ja_1b_2+ja_2b_1+j^2b_1b_2$$
$$=(a_1a_2-b_1b_2)+j(a_1b_2+a_2b_1).$$

例2 设 $Z_1=1+j2$, $Z_2=3-j4$, 求 $Z_1\cdot Z_2$.

解: $Z_1\cdot Z_2=(1+j2)(3-j4)=3-j4+j6-j^2 8=11+j2$.

例3 设 $Z=a+jb$, $\bar{Z}=a-jb$, 求 $Z\cdot\bar{Z}$.

解: $Z\cdot\bar{Z}=(a+jb)(a-jb)=a^2+jab-jab-j^2b^2=a^2+b^2$.

由此可知，两个共轭复数之积是一个实数. 根据这个性质，就可以利用复数的乘法法则来做复数的除法.

4. 除法

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{a_1+jb_1}{a_2+jb_2}=\frac{(a_1+jb_1)(a_2-jb_2)}{(a_2+jb_2)(a_2-jb_2)}$$
$$=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)+j(a_2b_1-a_1b_2)}{a_2^2+b_2^2}$$
$$=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+j\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}.$$

例4 设 $Z_1=3+j4$, $Z_2=5+j6$, 求 $\frac{Z_1}{Z_2}$.

解: $$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{3+j4}{5+j6}=\frac{(3+j4)(5-j6)}{(5+j6)(5-j6)}=\frac{15+24+j20-j18}{5^2+6^2}$$
$$=\frac{39+j2}{61}=\frac{39}{61}+j\frac{2}{61}.$$

三、复数的三角式

设 $Z=a+jb$, 且其模为 r, 幅角为 φ (图12—14).

$\because$ $a=r\cos\varphi$, $b=r\sin\varphi$,

$\therefore$ $Z=a+jb=r(\cos\varphi+j\sin\varphi)$.

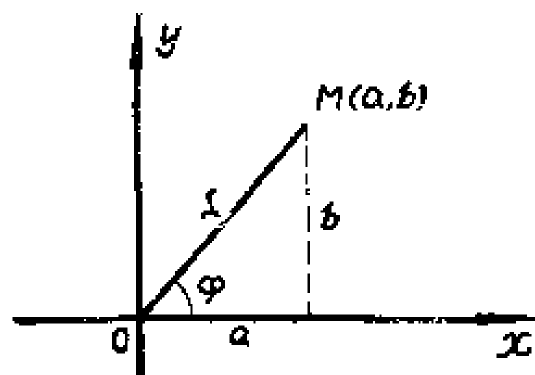


图12—14

式子 $r(\cos\varphi+j\sin\varphi)$ 叫做复数 Z 的三角式；与之区别，式子 $a+jb$ 叫做复数 Z 的代数式.

例1 把 $Z=\sqrt{3}+j$ 化成三角式.

解: $\because$ $r=\sqrt{3+1}=2$,

又由 $\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}=\frac{1}{\sqrt{3}}$, 且点 $M(\sqrt{3},1)$

在第一象限，得 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，

$$\therefore\quad Z=\sqrt{3}+j=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+j\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

例 2 以三角式表示复数 （1） 5； （2） $-6j$.

解： （1） $\because\ r=\sqrt{5^2+0^2}=5$，

又由 $\operatorname{tg}\varphi=\frac{0}{5}=0$，且 $M(5,\ 0)$ 在 x 轴上，得 $\varphi=0$，

$$\therefore\quad 5=5\ (\cos 0+j\sin 0)；$$

（2） $\because\ r=\sqrt{0^2+(-6)^2}=6$，

$$\varphi=-\frac{\pi}{2},$$

$$\therefore\quad -6j=6\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+j\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

用复数的三角式作乘除运算较方便.

设 $Z_1=r_1(\cos\varphi_1+j\sin\varphi_1)$，$Z_2=r_2(\cos\varphi_2+j\sin\varphi_2)$，则

$$\begin{aligned}Z_1\cdot Z_2&=r_1r_2\ (\cos\varphi_1+j\sin\varphi_1)\ (\cos\varphi_2+j\sin\varphi_2)\\&=r_1r_2[\ (\cos\varphi_1\cos\varphi_2-\sin\varphi_1\sin\varphi_2)\\&\qquad+j\ (\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\cos\varphi_1\sin\varphi_2)]\\&=r_1r_2[\cos(\varphi_1+\varphi_2)+j\sin(\varphi_1+\varphi_2)].\end{aligned}$$

由此可得：两复数相乘，乘积的模等于因数模的积，而积的幅角等于因数的幅角的和.

同样可得

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1-\varphi_2)+j\sin(\varphi_1-\varphi_2)].$$

这就是说：两个复数相除，商的模等于被除数的模除以除数的模，商的幅角等于被除数的幅角减去除数的幅角.

例如，设 $Z_1=\sqrt{2}(\cos15^\circ+j\sin15^\circ)$， $Z_2=\sqrt{3}(\cos45^\circ+j\sin45^\circ)$，则

$$\begin{aligned}Z_1\cdot Z_2&=\sqrt{2}\sqrt{3}[\cos(15^\circ+45^\circ)+j\sin(15^\circ+45^\circ)]\\&=\sqrt{6}(\cos60^\circ+j\sin60^\circ)\\&=\sqrt{6}\left(\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\sqrt{6}}{2}+j\frac{3\sqrt{2}}{2}；\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{Z_1}{Z_2}&=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}[\cos(15^\circ-45^\circ)+j\sin(15^\circ-45^\circ)]\\&=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}[\cos(-30^\circ)+j\sin(-30^\circ)]=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(\cos30^\circ-j\sin30^\circ)\end{aligned}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-j\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}-j\frac{\sqrt{6}}{6}.$$

四、复数的指数式

在高等数学中有公式（叫尤拉公式）：

$$\cos\varphi+j\sin\varphi=e^{j\varphi}.$$

于是 $Z=a+jb=r(\cos\varphi+j\sin\varphi)=re^{j\varphi}$．其中 r 是模，φ 是幅角．

式子 $re^{j\varphi}$ 叫做复数 Z 的指数式，在电工基础中，常把复数 $Z=re^{j\varphi}$，表示为 $r\angle\varphi$，它叫做复数 Z 的极坐标式．

例1 将 $3+j4$ 化成指数式．

解： $\because$ $r=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$，$\text{tg}\,\varphi=\frac{4}{3}$，$\varphi=53°7'$，

$\therefore$ $3+j4=5e^{j53°7'}$．

例2 将 $3e^{j\frac{\pi}{6}}$ 化成代数式．

解：
$$3e^{j\frac{\pi}{6}}=3\left(\cos\frac{\pi}{6}+j\sin\frac{\pi}{6}\right)=3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+j\frac{1}{2}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{2}+j\frac{3}{2}.$$

用复数的指数式进行乘除运算也很方便．

设 $Z_1=r_1e^{j\varphi_1}$，$Z_2=r_2e^{j\varphi_2}$，则

$$Z_1\cdot Z_2=r_1e^{j\varphi_1}\cdot r_2e^{j\varphi_2}=r_1r_2e^{j(\varphi_1+\varphi_2)}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{r_1e^{j\varphi_1}}{r_2e^{j\varphi_2}}=\frac{r_1}{r_2}e^{j(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

例如，$Z_1=20e^{j50°}$，$Z_2=5e^{j30°}$，则

$$Z_1\cdot Z_2=20\times5e^{j(50°+30°)}=100e^{j80°};$$

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{20}{5}e^{j(50°-30°)}=4e^{j20°}.$$

例3 设复数 $Z=re^{j\varphi}$，求 $Z\cdot j$．

解： $\because$ $j=e^{j\frac{\pi}{2}}$，

$\therefore$ $Z\cdot j=re^{j\varphi}\cdot e^{j\frac{\pi}{2}}=re^{j(\varphi+\frac{\pi}{2})}$．

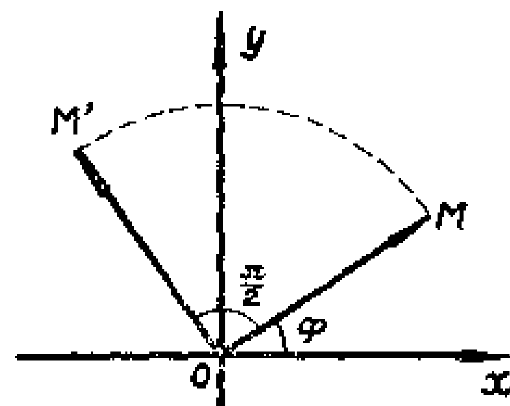


图12—15

这说明，任一复数乘 j 之后，其模不变，幅角增加90°．因此，只要将 Z 所对应的矢量 $\overrightarrow{OM}$ 按逆时针方向旋转90°，就得到 $Z\cdot j$ 所对应的矢量 $\overrightarrow{OM'}$（图12—15）．

由于j具有这个性质，所以j叫做旋转90°的旋转乘数.

习　题

1.在平面直角坐标系中，画出以下复数对应的矢量，并求这些复数的模和幅角：

(1) $-1+j$;　(2) $\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}$;

(3) 1;　(4) $-j$;　(5) -5;　(6) $+10j$;

(7) $-\frac{\sqrt{3}}{2}-j\frac{1}{2}$; (8) $4+j3$.

2.求下列各复数的共轭复数，并作出对应的矢量：

(1) $2+j3$;　(2) $-3-j2$;　(3) $j4$;　(4) 8.

3.计算下列各题：

(1) $(2-j3)+(1+j2)$;　(2) $(4-j3)+(2-j)$;

(3) $\sqrt{-4}+\sqrt{-9}-\sqrt{-16}$;　(4) $(5+j4)-(-2-j2)$;

(5) $(0.5-j3.2)+(1.5-j0.8)+(-4-j)$;

(6) $(a+jb)+(a-jb)$;　(7) $(a+jb)-(a-jb)$;

(8) $(3x-j4y)+(-x+j2y)$;

(9) $\left(1\frac{3}{4}+j\frac{2}{3}\right)-\left(1\frac{1}{2}-j\frac{5}{6}\right)+\left(-\frac{3}{4}-j2\right)$.

4.计算下列各题：

(1) $j2\cdot j2$;　(2) $j(-4)\cdot j5$;

(3) $(3+j5)\cdot 2$;　(4) $(8-j7)[j(-3)]$;

(5) $(1-j2)(5-j)$;　(6) $(0.5+j)(2+j3)$;

(7) $(\sqrt{a}+j\sqrt{b})(\sqrt{a}-j\sqrt{b})$; (8) $\sqrt{-64}\cdot\sqrt{-49}$.

5.求j^2, j^3, j^4, j^5, j^6, j^7, j^8，并总结其规律.

6.计算下列各题：

(1) $(j4)\div 2$;　(2) $\frac{2+j}{j}$;　(3) $\frac{4}{j3}$;

(4) $\frac{5}{1+j2}$;　(5) $\frac{7-j3}{1+j3}$;　(6) $\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{-9}}$;

(7) $\frac{5+j4}{3-j5}$;　(8) $\frac{6-j5}{4-j3}$;　(9) $\frac{\sqrt{a}-j\sqrt{b}}{\sqrt{a}+j\sqrt{b}}$.

7.将下列复数表示成三角式：

(1) $1-j$;　　(2) $-3+j2$;　　(3) 3；　　(4) $j5$；

(5) -4；　　(6) $-j7$.

8.将下列三角式化为代数式:

(1) $2(\cos45°+j\sin45°)$;　　(2) $6(\cos40°+j\sin40°)$;

(3) $\cos25°+j\sin25°$;　　(4) $3(\cos\pi+j\sin\pi)$.

9.计算下列各题:

(1) $Z_1=4\left(\cos\frac{\pi}{2}+j\sin\frac{\pi}{2}\right), Z_2=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+j\sin\frac{\pi}{3}\right)$，求$Z_1\cdot Z_2$，$\frac{Z_1}{Z_2}$；

(2) $5\left(\cos\frac{\pi}{6}+j\sin\frac{\pi}{6}\right)\cdot 2\left(\cos\frac{\pi}{4}+j\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

(3) $4(\cos18°+j\sin18°)\cdot2(\cos72°+j\sin72°)$;

(4) $(\cos75°+j\sin75°)\div(\cos30°+j\sin30°)$;

(5) $\frac{\sqrt{3}}{2}(\cos150°+j\sin150°)\cdot\sqrt{3}(\cos120°+j\sin120°)$;

(6) $12(\cos55°+j\sin55°)\div3(\cos20°+j\sin20°)$.

10.将下列各复数化成指数式:

(1) $2+j2$;　　(2) $2+j\sqrt{3}$;　　(3) $\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}$;

(4) $-3+j2$;　　(5) $15-j20$.

11.计算下列各式:

(1) $3e^{j\frac{\pi}{2}}\cdot2e^{j\frac{\pi}{4}}$;　　(2) $\sqrt{2}\angle60°\cdot2\angle20°$;

(3) $\frac{44e^{j(-50°)}}{22e^{j(-70°)}}$;　　(4) $\frac{118\angle0°}{19.7\angle24°}$.

12.用坐标平面上的点表示下列复数，并画出对应的矢量:

(1) $2e^{j30°}$;　　(2) $j\cdot2e^{j30°}$;　　(3) $(-j)\cdot2e^{j30°}$.

13.由电工学知: 复数阻抗$Z=r+j(x_L-x_C)$，其中r为电阻，x_L为感抗，x_C为容抗.

(1) 若$r=30$，$x_L=10$，$x_C=40$，求Z并表成$r\angle\varphi$的形式;

(2) 若$r=40$，$x_L=40$，$x_C=10$，求Z并表成$r\angle\varphi$的形式.

14.已知，三个串联阻抗Z_1、Z_2、Z_3的等值复数阻抗为$Z=Z_1+Z_2+Z_3$，若$Z_1=5+j10$，$Z_2=3-j15$，$Z_3=4+j21$，求Z并表成$r\angle\varphi$的形式.

15.两个并联阻抗Z_1、Z_2的等值复数阻抗为$Z=\frac{Z_1Z_2}{Z_1+Z_2}$.
若$Z_1=10+j5$，$Z_2=10-j5$，求Z并表成$r\angle\varphi$的形式.

16.若$Z=r(\cos\varphi+j\sin\varphi)$，则

$Z^n=r^n(\cos n\varphi+j\sin n\varphi)$，它叫做棣美费公式.

试就$n=2$，$n=4$验证这个公式的正确性.

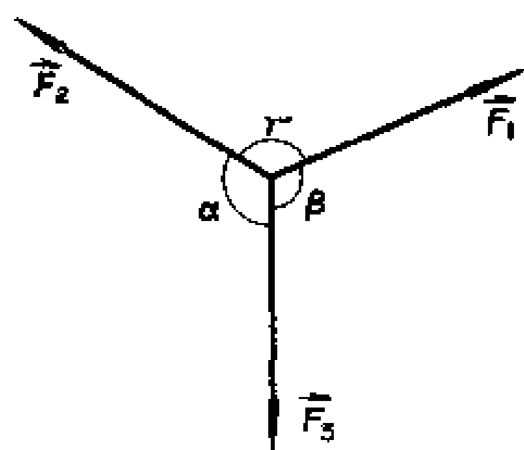
复 习 题

1. 如果三个力 $\vec{F}_1$、$\vec{F}_2$、$\vec{F}_3$ 平衡，并且夹角的记号如图所示.

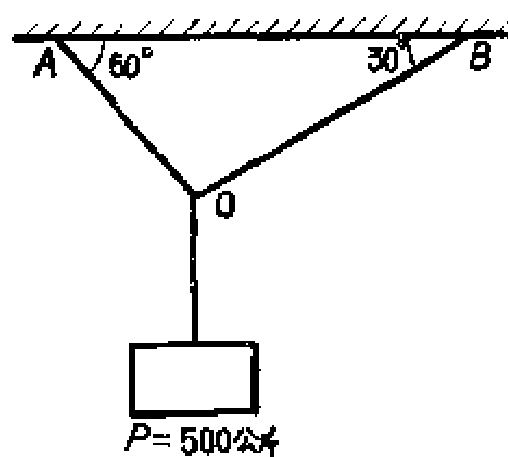
(1) 求证：$\dfrac{|\vec{F}_1|}{\sin\alpha}=\dfrac{|\vec{F}_2|}{\sin\beta}=\dfrac{|\vec{F}_3|}{\sin\gamma}$；

(2) 已知 $|\vec{F}_1|=100$公斤，$\beta=145°$，$\gamma=92°$，求 $|F_2|$ 和 $|F_3|$.

2. 如图所示，OA 和 OB 为两条钢绳，它们分别与水平线成50°和30°的角. 今在 O 点挂 $P=500$公斤的重物，试利用上题的结论求 OA 和 OB 所受的力 $\vec{F}_1$ 和 $\vec{F}_2$ 的大小.



（第1题）



（第2题）

3. 已知矢量 $\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}$，　　$\vec{b}=2\vec{i}+2\vec{j}$.

求 $|\vec{a}+\vec{b}|$、$|\vec{a}-\vec{b}|$，和 $\vec{a}$ 平行的单位矢量，以及 $\vec{b}$ 的幅角 φ.

4. 已知矢量 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的夹角为 $\dfrac{2\pi}{3}$，$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=5$.

求 $|\vec{a}+\vec{b}|$，以及 $\vec{a}+\vec{b}$ 和矢量 $\vec{a}$ 的夹角.

5. 把下列复数用矢量表示，并求出模和幅角：

(1) $-2-j2\sqrt{3}$；　　(2) $-\sqrt{3}+j$；

(3) $1-j\sqrt{3}$；　　(4) $5+j12$.

6. 已知 $Z_1=3+j2$，$Z_2=2-j5$，求 Z_1+Z_2、Z_1-Z_2、$Z_1\cdot Z_2$、$\dfrac{Z_1}{Z_2}$.

7. 已知 $Z_1=-1+j$，$Z_2=-\dfrac{1}{2}+j\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 利用三角式和指数式求 $Z_1\cdot Z_2$，$\dfrac{Z_1}{Z_2}$.

8. 把复数 e^{j0}、$e^{j\frac{\pi}{2}}$、$e^{j(-\frac{\pi}{2})}$、$e^{j\pi}$ 化为代数式.

9. 证明：$|Z_1+Z_2|^2+|Z_1-Z_2|^2=2(|Z_1|^2+|Z_2|^2)$，
并进行几何解释.

第四篇　平面解析几何

第十三章　曲线和方程、直线

在平面几何里，我们初步研究了三角形和圆的性质.但在实际应用中，还常遇到其他曲线.例如，行星运动的轨道是椭圆，抛物体运动的轨道是抛物线，凸轮的轮廓线有的是螺线等.研究这些曲线，初等几何的方法就不够用了.

解析几何正是随着生产斗争和科学实验的需要而发展起来的，它的特点是通过坐标法，使点与坐标对应起来，使曲线与方程对应起来，从而借助于代数方法来研究几何问题.

第一节　曲线和方程

一、两点间的距离公式

我们知道，在平面上建立直角坐标系之后，平面上的点就可用它的坐标来确定.

设$M_1(x_1,y_1)$、$M_2(x_2,y_2)$是平面上的两个点（图13—1），我们来求它们之间的距离，即线段M_1M_2的长度$|M_1M_2|$.

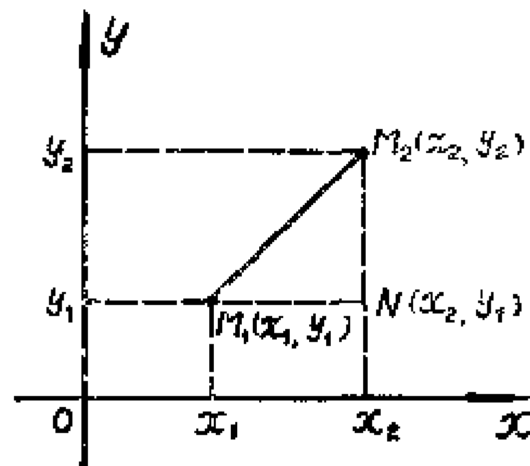


图13—1

如图13—1所示，过M_1、M_2分别作平行于x轴、平行于y轴的直线，两直线相交于N，在直角$\triangle M_1M_2N$中，根据勾股定理有

$$|M_1M_2|^2=|M_1N|^2+|NM_2|^2,$$

$\because$ $|M_1N|^2=|x_2-x_1|^2=(x_2-x_1)^2$;

$|NM_2|^2=|y_2-y_1|^2=(y_2-y_1)^2$;

$\therefore$ $|M_1M_2|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$.

从而得

$$\boxed{|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}$$

上式叫做两点间的距离公式，利用它可求平面上任意两点之间的距离。

特别是，平面上任一点$M(x,y)$到原点$O(0,0)$的距离

$$|OM|=\sqrt{x^2+y^2}.$$

例1　求$M_1(-2,5)$、$M_2(7,-3)$之间的距离。

解： $|M_1M_2|=\sqrt{[7-(-2)]^2+[-3-5]^2}=\sqrt{81+64}=\sqrt{145}\doteq12.04$.

例 2 冲制如图13—2所表示的零件时，需要知道三孔中心的距离．已知三孔中心的坐标是$A(-2,4)$，$B(4,0)$，$C(-5,0)$．求三孔中心之间的距离．

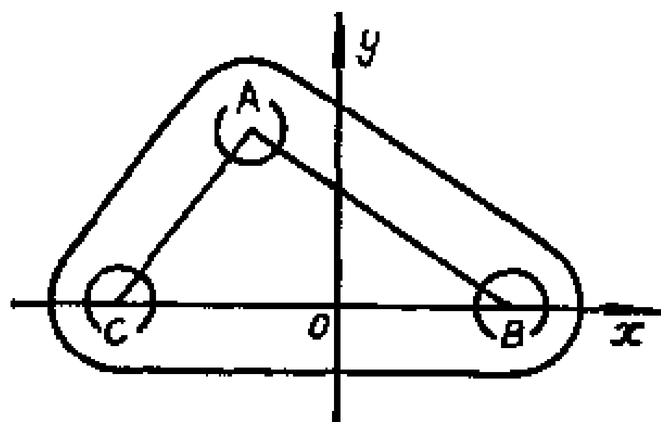


图13—2

解： 根据距离公式，得

$$|BA|=\sqrt{(-2-4)^2+(4-0)^2}=\sqrt{52}\doteq7.21;$$

$$|AC|=\sqrt{[-5-(-2)]^2+(0-4)^2}=\sqrt{25}=5;$$

$$|CB|=\sqrt{[4-(-5)]^2+0^2}=\sqrt{81}=9.$$

二、曲线的方程

在解析几何里，平面上任意一条曲线，都可以看作一个动点按照一定规律运动所形成的轨迹．例如，圆就可以看作到一固定点（圆心）的距离保持不变的动点的运动轨迹．

在直角坐标系中，由于动点M可以用一对变量x和y表示．因此一条曲线（动点运动的轨迹）就可以用一个含有两个变量x、y的方程来表示．

例 1 设有一个圆，圆心在O点，半径为r，试用含有两个变量x、y的一个方程来表示这个圆．

解： 以O点为坐标原点，选取坐标系xoy（图13—3）．

在圆上取一动点M，设它的坐标为(x, y)，那么，动点运动的规律是

$$|OM|=r.$$

由距离公式得

$$|OM|=\sqrt{x^2+y^2},$$

所以 $\sqrt{x^2+y^2}=r$.

两边平方，得 $x^2+y^2=r^2$.

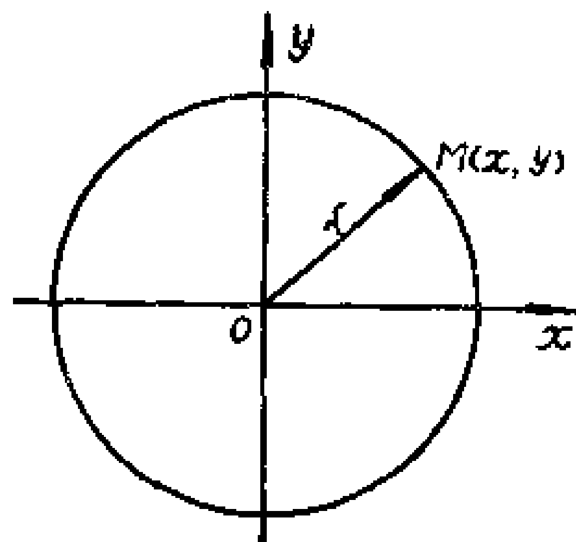


图13—3

现在来分析以O为圆心，r为半径的圆和方程$x^2+y^2=r^2$之间的关系：

（1）圆上任一点的坐标都满足这个方程；

（2）不在圆上的点的坐标都不满足这个方程，也就是说，所有坐标满足这个方程的点都在圆上．

方程 $x^2+y^2=r^2$叫做圆心在原点，半径为r的圆的方程．

一般地，如果某一条平面曲线和一个含有两个变量x、y的方程之间，存在着下述的关系：

（1）凡是在曲线上的点，它们的坐标x、y都满足这个方程；

（2）凡是不在曲线上的点，它们的坐标x、y都不满足这个方程．
那么，这个方程就叫做这条曲线的方程，而这条曲线叫做这个方程的图形．

曲线的方程这一概念反映了几何上的曲线和代数上的方程之间的联系，它使得我们有可能用代数的方法来研究曲线的性质．

为了熟悉曲线的方程这一概念，下面再举一个例子．

例2 求连结$A(2,3)$、$B(-2,-1)$所成的线段的中垂线方程，并判别$C(2,-1)$、$D(-1,3)$是否在中垂线上（图13—4）．

解：我们知道，中垂线上的任一点到线段两个端点的距离都相等，因此中垂线可以看作是到线段AB两个端点A、B等距离的动点M的轨迹．

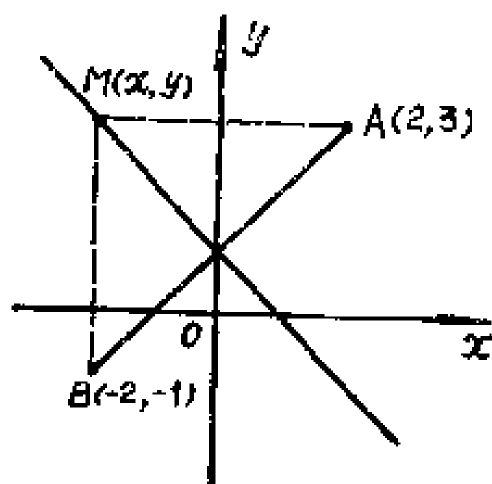


图13—4

动点运动的规律是$|MA|=|MB|$．

设M点的坐标为(x,y)，用坐标表示上述运动规律就得到：

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}=\sqrt{(x+2)^2+(y+1)^2}.$$

两边平方，并化简得

$$x+y-1=0.$$

即中垂线上一切点的坐标都满足方程$x+y-1=0$．

我们还可以证明，不在中垂线上的点的坐标都不满足这个方程（在建立曲线方程的过程中，这一步往往从略），因此所求的中垂线方程为$x+y-1=0$．

因为将$C(2,-1)$的坐标代入中垂线方程，有$2-1-1=0$，故C点在中垂线上；

因为将$D(-1,3)$的坐标代入中垂线方程，有$-1+3-1\neq 0$．故D点不在中垂线上．

通过上面的例子，可以看出，建立曲线的方程，可分三步进行：

（1）根据所给条件，选择适当的坐标系；

（2）找出动点运动时所必须遵循的规律；

（3）用动点的坐标(x,y)来表示这个规律，便可得到一个含有x、y的等式，经过整理、化简，便得曲线的方程．

习　　题

1．求下列各题所给两点之间的距离：

（1）$(4,2)$、$(1,-3)$；　　（2）$(5,1)$、$(-2,-2)$；

（3）$(-4,7)$、$(8,3)$；　　（4）$(6,9)$、$(-2,6)$；

（5）$(6,8)$、$(-6,-8)$；　　（6）$(2,3)$、$(2,\ \ 5)$；

（7）$(7,4)$、$(6,2)$；　　（8）$(7,4)$、$(-6,-2)$．

2．判别以下各题所给的点为顶点的三角形，是直角三角形还是斜角三角形：

（1）$(4,-4)$、$(3,4)$、$(10,0)$；　　（2）$(-1,0)$、$(0,-1)$、$(2,2)$；

（3）$(-2,1)$、$(12,9)$、$(-6,8)$；　　（4）$(0,0)$、$(5,3)$、$(2,8)$．

3．试证$(-4,2)$、$(3,1)$和$(3,-5)$在以$(-1,-2)$为圆心的同一圆周上．

4.求证原点$O(0,0)$在$A(6,8)$、$B(0,10)$连线的中垂线上.

5.判断$A(0,7)$、$B\left(-\frac{7}{3},\ 0\right)$、$C(1,10)$、$D(2,3)$、$E(-3,5)$各点是否在曲线$3x-y+7=0$上.

6.判断曲线 $xy+y-x=0$ 和曲线 $x+5y=3$ 是否经过原点.

7.求$A(1,5)$、$B(3,-1)$连线的中垂线方程.

8.一动点运动时，它到y轴的距离和它到点（2,2）的距离保持相等，求动点的轨迹方程.

9.一动点运动时，它到点A（0,3）的距离恒为它到原点的距离的两倍，求动点的轨迹方程.

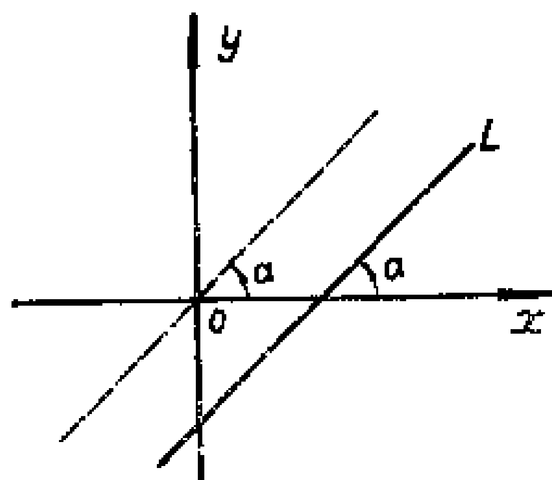
第二节　直　　线

毛主席教导我们:"人们的认识，……，**也都是一步又一步地由低级向高级发展，即由浅入深，由片面到更多的方面。**"

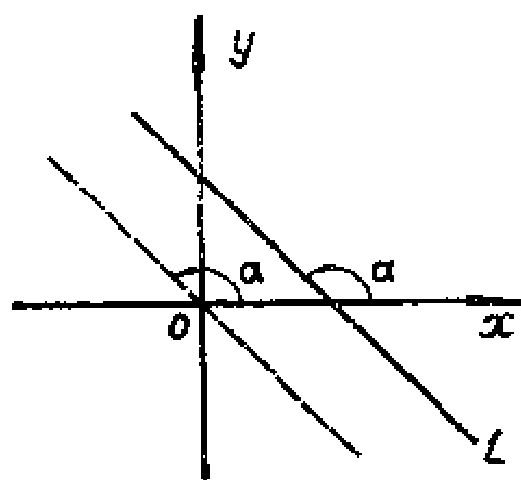
现在，我们就来研究最简单的平面图形——直线和它的方程.

一、倾角和斜率

在平面上给定一条直线l，让x轴按逆时针方向绕原点旋转，当它和直线l第一次平行时所转过的角度α，叫做直线l的倾角（图13—5）.



（1）



（2）

图13—5

显然，不论直线l的位置如何，它的倾角α总满足$0\leqslant\alpha<\pi$.当直线和x轴平行时它的倾角$\alpha=0$；当直线与y轴平行时，它的倾角$\alpha=\frac{\pi}{2}$.

我们把一直线的倾角α的正切，即$\operatorname{tg}\alpha$，叫做这条直线的斜率.斜率通常用K表示，于是有

$$\boxed{K=\operatorname{tg}\alpha}$$

当直线平行于x轴时，因倾角$\alpha=0$，故它的斜率$K=\operatorname{tg}0=0$；当直线平行于y轴时，因倾角$\alpha=\frac{\pi}{2}$，故它的斜率没有意义；当倾角α为锐角时，因$\operatorname{tg}\alpha>0$，故斜率为正；当倾角$\alpha$为钝角时，因$\operatorname{tg}\alpha<0$，故斜率为负.

如果已知一直线 l 经过$M_1(x_1, y_1)$和$M_2(x_2, y_2)$，那么它的位置就完全确定，因而斜率也就完全确定.现在我们就来求这条直线的斜率.

如图13—6 所示，过 M_1、M_2 分别作平行于 x 轴、y 轴的直线，则因 l 的倾角 $\alpha=\angle M_2M_1N$，故斜率

$$K=\operatorname{tg}\alpha=\frac{NM_2}{M_1N},$$

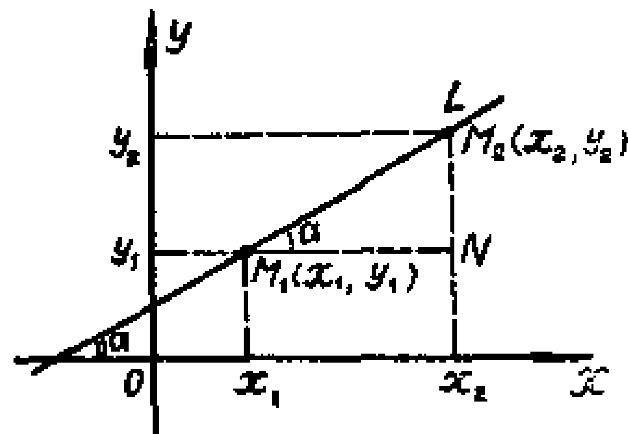


图13—6

又因 $NM_2=y_2-y_1$， $M_1N=x_2-x_1$，

故得计算斜率的公式:

$$\boxed{K=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}$$

除了M_1、M_2的连线平行于 y 轴之外（此时 $x_1=x_2$，因而$x_2-x_1=0$)，这个公式适用于求平面上任意两点连线的斜率. 又因为 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$，所以在运用这个公式求斜率时，可任取两点之一作为 M_1，而把另一点当作M_2.

例 求直线的斜率 K和倾角α. 设直线上两点M_1和M_2的坐标为:

(1) $M_1(3,2)$、$M_2(15,8)$; (2) $M_1(3,2)$、$M_2(-9,8)$.

解: (1) 根据斜率的计算公式，有

$$K=\frac{8-2}{15-3}=\frac{6}{12}=0.5,$$

又 ∵ $K=\operatorname{tg}\alpha=0.5$,

∴ 倾角$\alpha=26°34'$.

(2) 根据斜率的计算公式，有

$$K=\frac{8-2}{-9-3}=-\frac{6}{12}=-0.5,$$

又 ∵ $K=\operatorname{tg}\alpha=-0.5$,

∴ 倾角$\alpha=180°-26°34'=153°26'$.

二、直线的方程

1.点斜式方程

已知一直线l经过点$M_0(x_0,y_0)$，且其斜率为K(图13—7)，求这条直线的方程.

设直线 l 上的动点为$M(x,y)$，则M和M_0 连线的斜率就是直线 l 的斜率 K.根据斜率的计算公式，有

$$\frac{y-y_0}{x-x_0}=K,$$

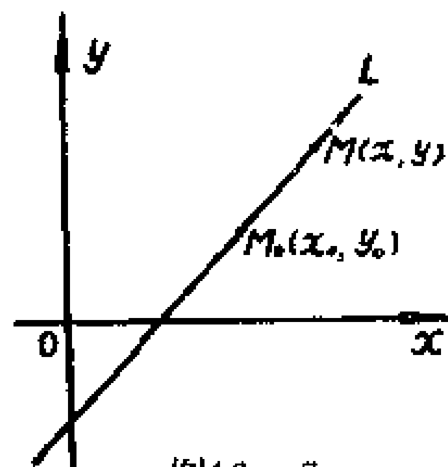


图13—7

即

$$\boxed{y-y_0=K(x-x_0)} \qquad (1)$$

(1) 式叫做直线的点斜式方程.

例 1 求过 $M_0(3,5)$，斜率$K=\frac{1}{3}$的直线方程.

解: 根据直线的点斜式方程，得该直线的方程为

$$y-5=\frac{1}{3}(x-3),$$

或 $$x-3y+12=0.$$

根据直线的点斜式方程可知：经过点$M_0(x_0,y_0)$，且平行于x轴的直线（图13—8），其方程为

$$y-y_0=0(x-x_0)$$

即 $$\boxed{y=y_0}$$

x轴的方程为

$$y=0.$$

如果一条直线经过点 $M_0(x,y_0)$，且平行于 y 轴（图13—8），显然这条直线上所有的点的横坐标都等于x_0，因而这条直线的方程为

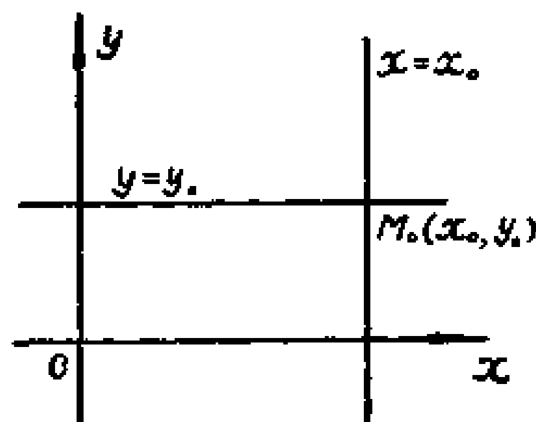


图13—8

$$\boxed{x=x_0}$$

y 轴的方程为

$$x=0.$$

2.斜截式方程

我们把直线与 x 轴交点的横坐标叫做直线的 x 截距，把直线与 y轴交点的纵坐标叫做直线的 y 截距.

如图13—9 中的直线，其x截距就是a，其y截距就是b.

若已知一直线的斜率为K、y截距为b，我们来求这直线的方程.

事实上，已知直线的y截距为b，就相当于已知直线上的一个点 $(0,b)$.于是，根据直线的点斜式方程，便知此直线的方程为

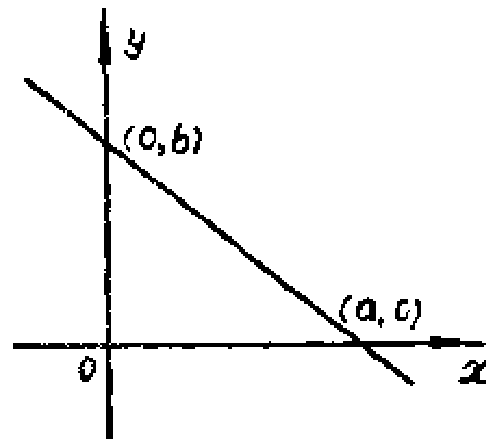


图13—9

$$y-b=K(x-0),$$

即 $$\boxed{y=Kx+b} \quad (2)$$

(2) 式叫做直线的斜截式方程.

例 2 已知一直线的 y 截距为 $-\frac{2}{3}$，斜率为 5，求其方程.

解: 根据直线的斜截式方程，可知此直线的方程为

$$y=5x-\frac{2}{3},$$

或 $$15x-3y-2=0.$$

3.两点式方程

已知一直线l通过两点$M_1(x_1,y_1)$、$M_2(x_2,y_2)$（图13—10），求直线 l 的方程。

因为直线l通过$M_1(x_1,y_1)$和$M_2(x_2,y_2)$，所以斜率为

$$K=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

又因为直线l经过点$M_1(x_1,y_1)$，根据直线的点斜式方程，得直线l的方程为

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1).$$

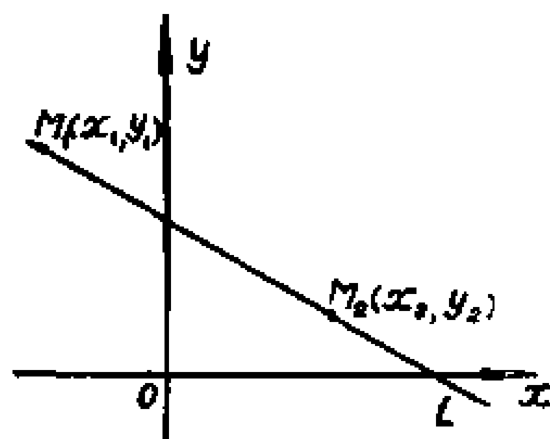


图13—10

即
$$\boxed{\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}} \qquad (3)$$

（3）式叫做直线的两点式方程.

例 3 求过$M_1(1,2)$、$M_2(3,5)$两点的直线方程.

解： 根据直线的两点式方程，得该直线的方程为

$$\frac{y-2}{5-2}=\frac{x-1}{3-1},$$

或
$$3x-2y+1=0.$$

三、直线和一次方程

从上面的讨论知道，平面上任何一条直线，它的方程都是x和y的一次方程.反过来，x和y的一次方程的图形，是否都是直线呢？下面就来讨论这个问题.

二元一次方程的一般形式是

$$\boxed{Ax+By+C=0} \qquad (4)$$

其中A、B、C是常数，A、B不同时为零.分两种情况讨论：

（1）当$B\neq0$时，方程(4)可化为

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B},$$

和斜截式方程(2)比较可知，它的图形是斜率$K=-\frac{A}{B}$，y截距$b=-\frac{C}{B}$的直线.

（2）当$B=0$，$A\neq0$时，方程(4)可化为

$$x=-\frac{C}{A},$$

由此可知，它的图形是平行于y轴的直线.

总之，二元一次方程的图形都是一条直线.

综上所述，我们得到下面的结论：

平面上任何一条直线，它的方程都是二元一次方程；任何一个二元一次方程，它在

坐标平面上的图形都是直线．

由于平面上任何一条直线的方程都可以化为（4）的形式，所以（4）式叫做直线的一般式方程．

例1　求直线$x+2y=4$的斜率和y截距．

解：$x+2y=4$可变形为$y=-\frac{1}{2}x+2$，因而其斜率$=-\frac{1}{2}$，y截距$=2$．

我们知道二元一次方程的图形是直线，因而只要找到它上面的两个点，用直尺连起来，所得到的便是二元一次方程的图形．

例2　作出直线$3x-4y=12$的图形．

解：在方程中令$y=0$，则得$x=4$，故$(4,0)$是直线上的一点．在方程中令$x=0$，则得$y=-3$，故$(0,-3)$是直线上的一点．

连结$(4,0)$、$(0,-3)$两点便得所求之图形（图13－11）．

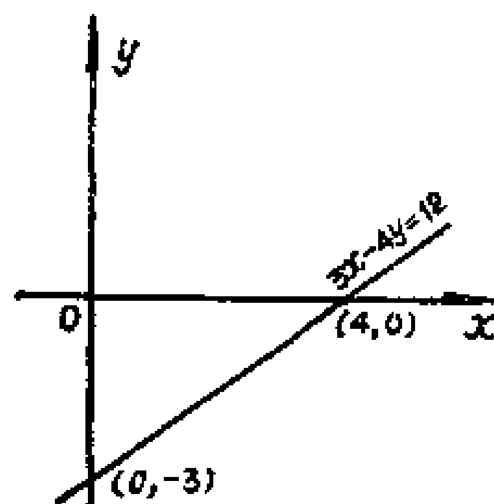


图13—11

二元一次方程

$$Ax+By+C=0,$$

当$B\neq 0$时，表示了y和x两个变量的函数关系

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}.$$

因为这种函数的图象是直线，所以叫做线性函数（或一次函数）．

例3　已知一段铜导线的电阻R（欧姆）和温度t(°C)之间的函数关系是线性函数．由实验测得当$t=0$时，$R=50$；当$t=50$时，$R=60$，求R与t之间的函数关系式，且作出它的图象．

解：以t为横坐标，R为纵坐标，将测得t和R的两组对应值作为点的坐标，得

$$M_1(0,50),\qquad M_2(50,60).$$

由两点式方程，得

$$\frac{R-50}{60-50}=\frac{t-0}{50-0},$$

所以R和t之间的函数关系式为

$$R=0.2t+50.$$

连接M_1（0,50），M_2（50,60）两点，便得它的图象（图13—12）．

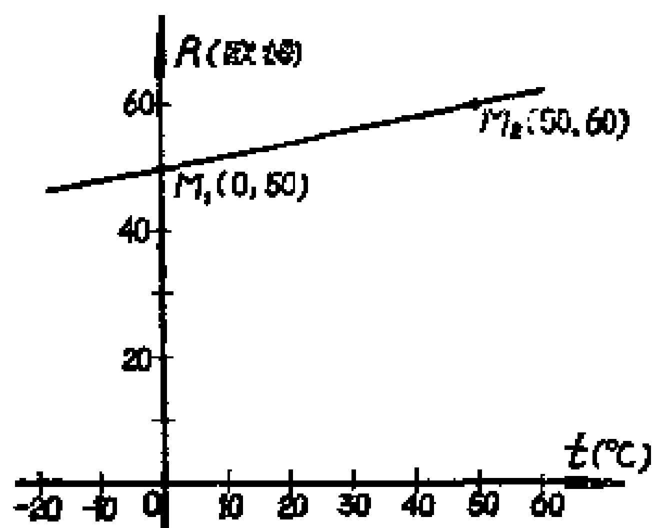


图13—12

在生产斗争和科学实验中，往往要找出两个变量之间的函数关系．当我们还没有认识它们之间的变化规律时，总是先通过观察和实验，取得两个变量相对应的实验数据，列成表；然后把数据作为点的坐标描出各点．如果这些点大体在一直线上，这两个变量的函数关系就可认为大体是线性函数；如果

接近其他已知方程的曲线，就可认为大体是别的某种函数关系．这样由实验数据找出来的函数关系式，叫做经验公式．

例 4 测得一种铅合金的熔点t（°C）和含铅量P（%）的数据如下：

$P(\%)$	36.9	46.7	63.7	77.8	84.0	87.5
t（°c）	181	197	235	270	283	292

求t与P之间的函数关系式．

解： 以含铅量P为横坐标，熔点t为纵坐标，把表中数据作为点的坐标描出各点(图13—13)．从图中看出这些点大体在一条直线上，这表明熔点t和含铅量P之间的关系接近线性关系．

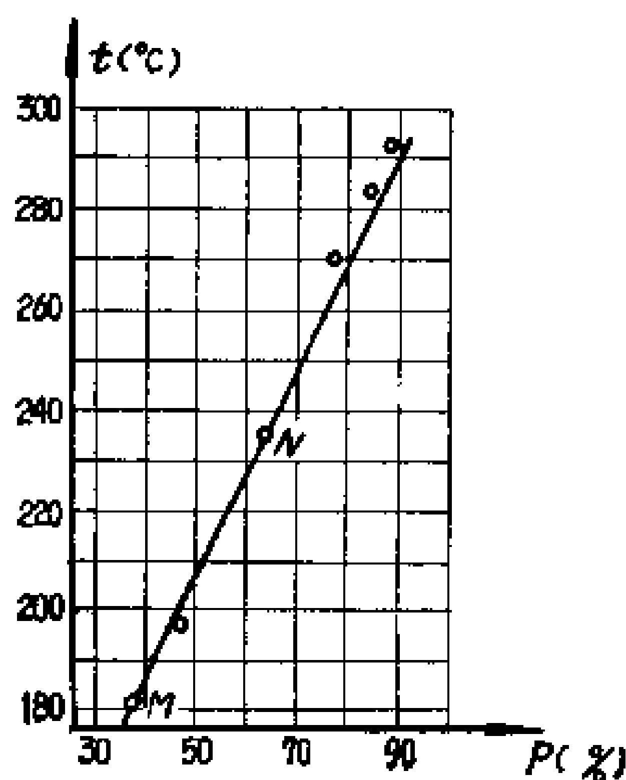


图13—13

作出一条和各点都比较接近的直线，如过M（36.9,181），N（63.7,235）两点的直线，它的方程为

$$\frac{t-181}{235-181}=\frac{P-36.9}{63.7-36.9}$$

即 $$t=2P+107.2.$$

答： t与P之间的函数关系式为$t=2P+107.2$．

四、两直线间的关系

1.两直线互相平行的条件

如果两直线互相平行，那么，它们的倾角必定相等（图13—14），因而其斜率也必定相等，即

$$\boxed{K_1=K_2}$$

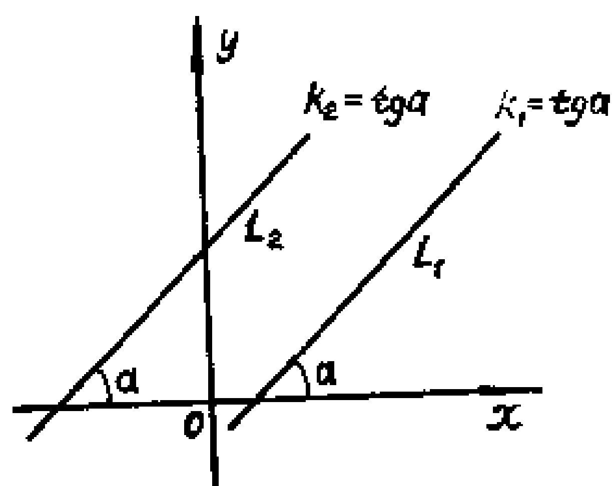


图13—14

反之，若两直线的斜率相等，即$K_1=K_2$，那么它们的倾角也必定相等，因而两直线平行．

所以，要判断两直线是否平行，只要判断$K_1=K_2$是否成立就可以了．

例 1 判断下列各组直线是否平行：

（1）$y=2x+3$、$4x-2y+5=0$；

（2）$x+y=1$、$4x+2y=3$．

解：（1）直线$y=2x+3$的斜率$K_1=2$；而$4x-2y+5=0$能变形为$y=2x+\frac{5}{2}$，故知其斜率$K_2=2$；因为$K_1=K_2$，故两直线平行．

（2）$x+y=1$可变形为$y=-x+1$，故知此直线的斜率$K_1=-1$；$4x+2y=3$可变形为$y=-2x+\frac{3}{2}$，故知此直线的斜率$K_2=-2$；因为$K_1\neq K_2$，所以两直线不平行．

例 2 求通过$M(2,3)$，并平行于$2x-3y+1=0$的直线方程．

解：$2x-3y+1=0$ 可变形为 $y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$，因而此直线的斜率 $K=\frac{2}{3}$.又因所求的直线和它平行，所以斜率亦应为$\frac{2}{3}$. 再根据点斜式方程写出所求的直线方程，有

$$y-3=\frac{2}{3}(x-2),$$

或化为 $$2x-3y+5=0.$$

2.两直线互相垂直的条件

如果直线 l_1、l_2互相垂直（图13—15），则根据三角形外角的性质可知它们的倾角α_1、α_2之间满足下述关系：

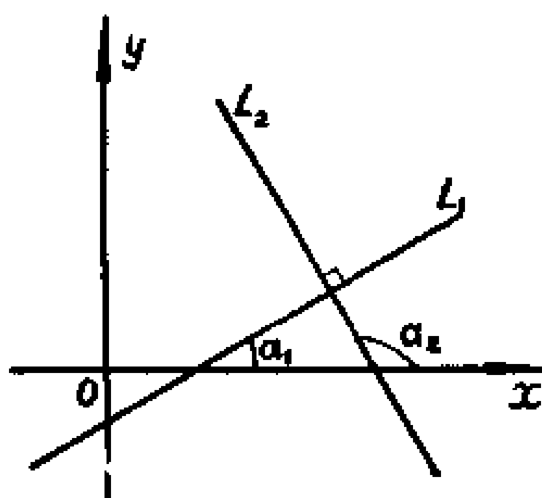


图13—15

$$\alpha_2=\frac{\pi}{2}+\alpha_1,$$

从而有 $$K_2=\operatorname{tg}\alpha_2=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha_1\right)=-\operatorname{ctg}\alpha_1$$

$$=-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha_1}=-\frac{1}{K_1},$$

即 $$\boxed{K_1\cdot K_2=-1.}$$

反之，若$K_1\cdot K_2=-1$，我们也可证明l_1、l_2必定互相垂直.

所以，要判断两直线是否互相垂直，只要判断 $K_1\cdot K_2=-1$ $\left(\text{或 } K_2=-\frac{1}{K_1}\right)$是否成立就可以了.

例 3 判断下列各组直线是否互相垂直：

(1) $l_1:x+2y=1, l_2:2x-y=3$; (2) $l_1:3x-y=6, l_2:x+3y=5$;

(3) $l_1:x+2y=3, l_2:4x+2y=3$; (4) $l_1:5x+3=0, l_2:4x+3y=6$.

解：(1) l_1之斜率 $K_1=-\frac{1}{2}$，l_2之斜率 $K_2=2, K_1\cdot K_2=-\frac{1}{2}\cdot 2=-1$，故 $l_1\perp l_2$;

(2) l_1之斜率$K_1=3$，l_2之斜率 $K_2=-\frac{1}{3}$，$K_1\cdot K_2=3\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-1$，故$l_1\perp l_2$;

(3) l_1之斜率 $K_1=-\frac{1}{2}$，l_2之斜率$K_2=-2$，$K_1\cdot K_2=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(-2)\neq-1$，故 l_1与l_2不垂直；

(4) l_1是平行于y轴的直线，l_2不平行于x轴，故l_1与l_2不垂直.

例 4 求过点(1,3)并垂直于$x+2y=3$的直线方程.

解：直线$x+2y=3$的斜率为 $-\frac{1}{2}$，故所求直线的斜率$=2$. 因而所求的直线方程为

$$y-3=2(x-1).$$

3.两直线的交点

例 5 求直线$x+y=5$、$2x-y=4$的交点(图13—16).

解：由于交点同时在这两条直线上，交点的坐标一定同时满足这两个方程.反之，如果有一个点的坐标同时满足这两个方程，那么这个点既在直线 $x+y=5$ 上，又在直线

$2x-y=4$ 上，从而这个点就必定是这两条直线的交点．因此要求这两条直线交点的坐标只要求方程组

$$\begin{cases}x+y=5,\\2x-y=4,\end{cases}$$

的实数解就可以了．解上述方程组得：

$$x=3,\qquad y=2.$$

所以交点为$M_0(3,2)$．

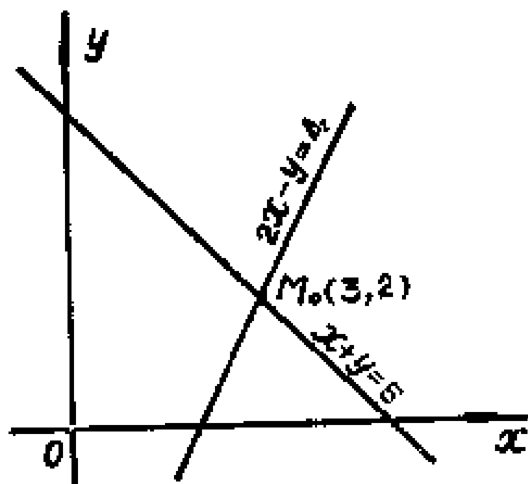


图13—16

例 6 求点 $P_0(8,2)$ 到直线 $3x-2y+6=0$ 的距离 d（图13—17）．

解： 过P_0点作P_0D垂直于直线$3x-2y+6=0$．

∵ 直线 $3x-2y+6=0$的斜率为$\frac{3}{2}$，

∴ P_0D的斜率为$-\frac{2}{3}$，

直线P_0D的方程为

$$y-2=-\frac{2}{3}(x-8),$$

即 $$2x+3y-22=0.$$

解方程组 $\begin{cases}3x-2y+6=0,\\2x+3y-22=0,\end{cases}$

得D点的坐标为 $x=2$， $y=6$．

∴ $d=|P_0D|=\sqrt{(2-8)^2+(6-2)^2}=\sqrt{52}=7.21$．

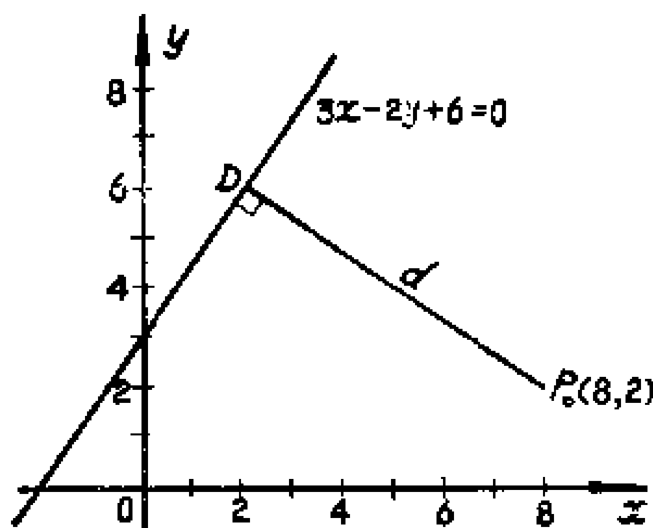


图13—17

根据例 6 的方法，可以推导出点$P_0(x_0,y_0)$到直线 $Ax+By+C=0$ 的距离公式为

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

利用这个公式，求点到直线的距离可使计算简化．

例如，在例 6 中点$P_0(8,2)$到直线$3x-2y+6=0$的距离

$$d=\frac{|3\times8-(-2)\times2+6|}{\sqrt{3^2+(-2)^2}}=\frac{26}{\sqrt{13}}=2\sqrt{13}=7.21.$$

例 7 图13—18表示拖拉机支承架的平面图，检验时需要计算孔心O到边AB的距离 $|OD|$．

解： B点的坐标是(20,32)．直线AB的斜率

$$K=\text{tg}(180°-18°)=-\text{tg}18°=-0.3249,$$

由点斜式方程可得直线AB的方程为

$$y-32=-0.3249(x-20),$$

或 $$0.3249x+y-38.498=0.$$

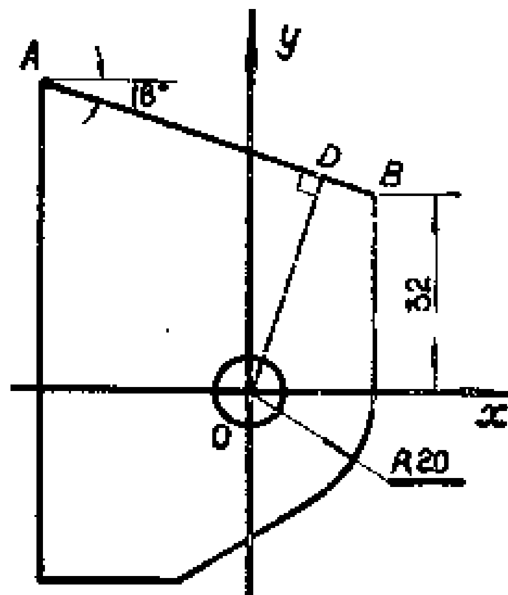


图13—18

$$\therefore \quad |OD| = \frac{|-38.498|}{\sqrt{0.3249^2+1^2}} = \frac{38.498}{\sqrt{1.1056}} = 36.61\ (\text{毫米}).$$

习　　题

1. 求由下列各组点所决定的直线的斜率及倾角：

(1) (1,4)、(5,8);　(2) (4,2)、(8,−2);　(3) (−2,−1)、(−4,7);

(4) (9,−5)、(3,0);　(5) (3,−5)、(8,−1);　(6) (5,2)、(−4,−6).

2. 已知一直线经过M_0点，其斜率为K，求该直线的方程. 设

(1) $M_0(3,5)$, $K=\frac{1}{3}$;　(2) $M_0(4,-2)$, $K=\frac{4}{5}$.

(3) $M_0(-1,3)$, $K=2$;　(4) $M_0(-5,3)$, $K=4$;

(5) $M_0(-2,-4)$, $K=-\frac{1}{4}$;　(6) $M_0(6,1)$, $K=-\frac{1}{6}$.

3. 求经过 (1,2)，平行于x轴和平行于y轴的直线方程.

4. 求经过 (3,8)，平行于x轴和平行于y轴的直线方程.

5. 已知一直线的斜率为K，y截距为b，试求其方程. 设

(1) $K=3, b=-2$;　(2) $K=1$, $b=5$;

(3) $K=2$, $b=7$;　(4) $K=\frac{1}{3}$, $b=2$.

6. 已知一直线经过M_1、M_2点，求该直线的方程. 设

(1) $M_1(0,0)$, $M_2(2,2)$;　(2) $M_1(1,2)$, $M_2(5,4)$;

(3) $M_1(-1,1)$, $M_2(5,-3)$;　(4) $M_1(2,8)$, $M_2(3,0)$.

7. 证明下列各题所给的三个点在同一直线上：

(1) (0,0)、(2,3)、(6,9);　(2) (0,0)、(−1,3)、(−3,9);

(3) (4,6)、(0,4)、(−8,0);　(4) (−5,2)、(−1,1)、(3,0).

8. 由下列各组条件，建立直线方程：

(1) 经过(3,5)，斜率 = 2;　(2) 经过(−2,3)，倾角 $=\frac{\pi}{6}$;

(3) 经过(−2,−3)，倾角 $=\frac{2}{3}\pi$;　(4) 过原点，斜率 = 0.4;

(5) 过(2,−1)、(1,−3);　(6) 过(2,1)、(2,5);

(7) 斜率 = 3，y截距 = 5;　(8) 斜率 $=-\frac{2}{3}$，y截距 = −1;

(9) 过(−1,3)、(5,3);　(10) 倾角 = 0，y截距 = 2;

(11) 倾角 $=\frac{\pi}{2}$，x截距 = 0.5;　(12) 倾角 $=\frac{\pi}{4}$，x截距 = 3.

9. 写出一、三象限和二、四象限角平分线的方程.

10. 求下列各直线的斜率、x截距、y截距，并作出它们的图形：

(1) $2x-3y=6$;　(2) $5x+3y=15$;　(3) $x+2y=0$;

(4) $y-5=2(x+3)$;　　(5) $x-3=0$;　　(6) $y+1=0$.

11.某拖拉机开始翻地时，油箱中存有40公斤油，翻地时，每小时要消耗6公斤油，试写出油箱中剩油量y（公斤）与翻地时间t(小时)之间的函数关系，并作出它的图象.

12.某电源电压U与电流I之间的函数关系是线性函数，且当空载时（即$I=0$），电压$U=230$伏特；当电流$I=100$安培时，电压U下降为220伏特．试写出电压U(伏特)与电流I（安培）之间的函数关系式，并作出它的图象.

13.某车间测定实际用的酒精的体积V(升)和温度t(°C)的数据如下：

t(°C)	0	5	10	20	30	40	50
V(升)	5.25	5.27	5.31	5.39	5.43	5.49	5.53

求表示V和t之间关系的经验公式.

14.判断下列各题所给的两直线哪些是互相平行的？哪些是互相垂直的？

(1) $x+3y=2$,　$2x+6y=5$;　(2) $2x-y=3$,　$2y-4y=5$;

(3) $6x+y=8$,　$y=3x+2$;　(4) $x+5=0$,　$2x+y=3$;

(5) $2x-y=1$,　$x+2y=3$;　(6) $3x+y=0$,　$x+3y=1$;

(7) $5x-2y=3$,　$2x+5y=0$;　(8) $x+3=0$,　$2y+3=0$.

15.λ应取怎样的值，直线$\lambda x-y+2=0$才和$3x-2y+6=0$：

(1) 互相平行；　(2) 互相垂直.

16.求下列各题中两直线的交点：

(1) $2x+y-1=0$,　$x+2y+1=0$;　(2) $x+y-3=0$,　$3x-2y+1=0$;

(3) $2x+y-8=0$,　$3x+2y=0$;　(4) $2x+5y-14=0$, $4x-3y+11=0$;

(5) $x-3y=14$,　$x-5=0$;　(6) $3y+1=0$,　$x+6y=3$.

17.由下列已知条件，建立直线方程：

(1) 经过点(3,6)，并和直线$y=\frac{1}{2}x$平行；

(2) 经过$x-2y+1=0$与$2x+y=3$的交点，并和直线$3x-y+2=0$平行；

(3) 经过点(2,−3)，并和直线$x+y-9=0$垂直；

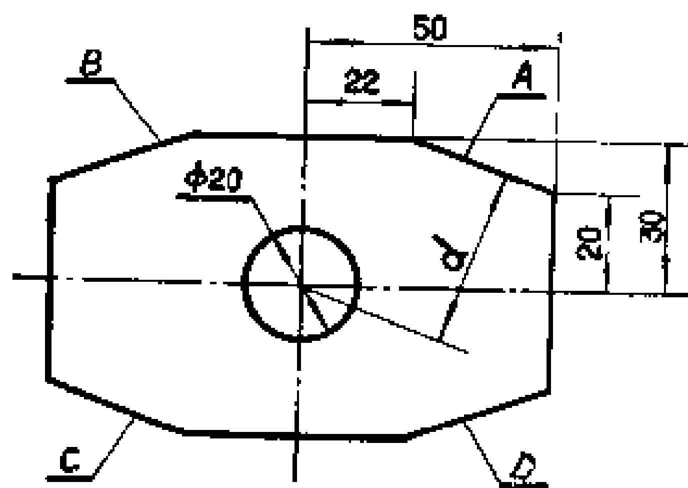
(4) 经过$x+y+4=0$与$x-2y+1=0$的交点，并和直线$8x-12y+5=0$垂直；

(5) 经过原点，并经过$2x+y-8=0$与$3x+2y=14$的交点.

18.求点(−2,10)到直线$5x-12y=39$的距离.

19.求点(1,2)到直线$2x-y=5$的距离.

20.有一多边形零件．加工时，须知道A、B、C、D面到零件中心的距离，试按图示尺寸求d.



（第20题）

复 习 题

1. 动点P运动时，它和两定点$(a,0)$、$(-a,0)$的连线总保持互相垂直，试求P的轨迹方程。

2. 动点P运动时，它到y轴的距离总是它到点$(2,0)$的距离的两倍，求P点的轨迹方程。

3. 求证以$x-\sqrt{3}y-1=0$、$x+\sqrt{3}y-7=0$，$x=1$为三边的三角形是等边三角形。

4. 根据下列各条件，决定直线的斜率：

(1) 倾角$=-\frac{5}{6}\pi$；　　(2) 经过点$(2,5)$、$(-1,2)$；

(3) 与直线$3x-y+5=0$平行；　　(4) 与直线$2x-4y=3$垂直；

(5) 其方程为$3x+6y-8=0$。

5. 求下列各直线的x截距和y截距，并作图：

(1) $2x-y=4$；(2) $3x+5y-15=0$；(3) $4x-3y+12=0$；(4) $x+5=0$.

6. 一直线通过点$(2,-3)$，且平行于两点$(1,2)$、$(-1,-5)$的连线，求其方程。

7. 求过两直线$3x-y-3=0$，$4x+3y-4=0$的交点，且与直线$3x-2y+2=0$平行的直线方程。

8. 求证三直线：$x+2y=3$，$2x+y=0$，$2x+5y-8=0$相交于一点。

9. 设三角形的三个顶点为$(-1,0)$、$(3,0)$、$(0,5)$，试写出其三条高的方程，并证明它们相交于一点。

10. 设三角形的三个顶点为$(3,5)$、$(1,-1)$、$(5,1)$，试写出其三条中垂线方程，并证明它们相交于一点。

第十四章　二 次 曲 线

在生产斗争和科学实验中，除了前面讲过的直线以外，还常遇到椭圆、抛物线和双曲线．由于这三种曲线，在直角坐标系中的方程都是二次方程，因此它们统称为二次曲线．

在这一章里，首先给出椭圆、抛物线和双曲线的定义，并选择适当的坐标系建立它们的标准方程，然后通过标准方程研究它们的几何性质．

第一节　圆，坐标轴的平移

一、圆的方程

圆是最常见的、也是最简单的一种二次曲线．

在上一章里，我们已经知道，在直角坐标系中，以坐标原点为圆心，以r为半径的圆的方程是:

$$x^2+y^2=r^2.$$

用同样的方法，可以得到圆心在任意点的圆的方程．

设圆心在点$C(a,b)$，半径为r，求圆的方程(图14—1)．

在圆上任取一点$M(x,y)$，由于M点到圆心C的距离等于半径r，即

$$|MC|=r,$$

而 $$|MC|=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2},$$

所以 $$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r.$$

两边平方，得

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=r^2} \qquad (1)$$

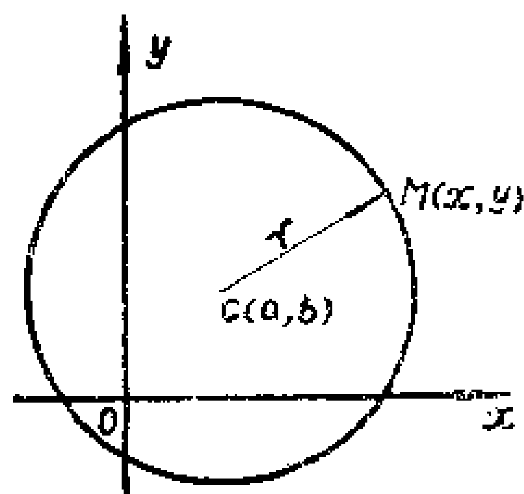


图14—1

这个方程叫做圆的标准方程．

例如　圆心在点$C(3,4)$、半径为5的圆的方程为

$$(x-3)^2+(y-4)^2=5^2.$$

把(1)式的左边展开，并整理，得

$$x^2+y^2-2ax-2by+a^2+b^2-r^2=0.$$

可见，任何一个圆的方程都可以写成下面的形式

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0, \qquad (2)$$

把它和一般形式的二元二次方程

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

比较，可以看到它有这样的特点：x^2和y^2项的系数相等，且不为零(在这里为1)；xy项

的系数为零．（2）式叫做圆的一般方程．

例1 讨论下列二元二次方程的图形：

（1）$x^2+y^2-2x+4y-4=0$；

（2）$x^2+y^2-2x+4y+5=0$；

（3）$x^2+y^2-2x-4y+6=0$．

解： 这三个方程都具有圆的一般方程的特点．经过配方：

（1）式化为

$$(x^2-2x+1)+(y^2+4y+4)=4+1+4,$$

$$(x-1)^2+(y+2)^2=3^2.$$

它表示圆心在点$(1,-2)$，半径为3的圆（图14—2）．

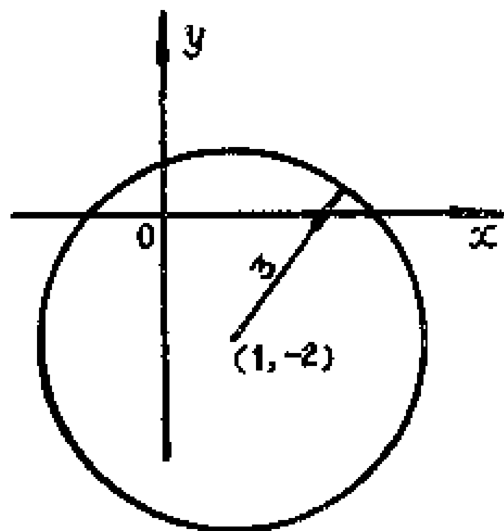


图14—2

（2）式化为

$$(x-1)^2+(y+2)^2=0.$$

它表示圆心在点$(1,-2)$，半径为零的圆，就是说它只表示一个点$(1,-2)$．

（3）式化为

$$(x-1)^2+(y+2)^2=-1.$$

这个方程的右边是负数，显然，x、y取任何实数值都不满足这个方程，所以它没有图形．

例2 求过$O(0,0)$，$M_1(1,1)$，$M_2(4,2)$三点的圆的方程，并求此圆的半径和圆心的坐标．

解： 设所求圆的方程为

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0,$$

其中D、E、F是待定常数．因为点O,M_1,M_2在圆上，把它们的坐标分别代入上述方程，得到含D、E、F的三元一次方程组：

$$\begin{cases}F=0,\\D+E+F+2=0,\\4D+2E+F+20=0.\end{cases}$$

解得 $F=0$，$D=-8$，$E=6$．于是所求圆的方程为

$$x^2+y^2-8x+6y=0.$$

配方得 $$(x-4)^2+(y+3)^2=5^2,$$

因此圆心的坐标为$(4,-3)$，半径为5．

例3 求圆$x^2+y^2=25$和直线$y=2x$的交点（图14—3）．

解： 同求两条直线的交点一样，要求$x^2+y^2=25$和$y=2x$的交点的坐标，只要求方程组

$$\begin{cases}x^2+y^2=25,\\y=2x.\end{cases}$$

的实数解就可以了．解上述方程组得：

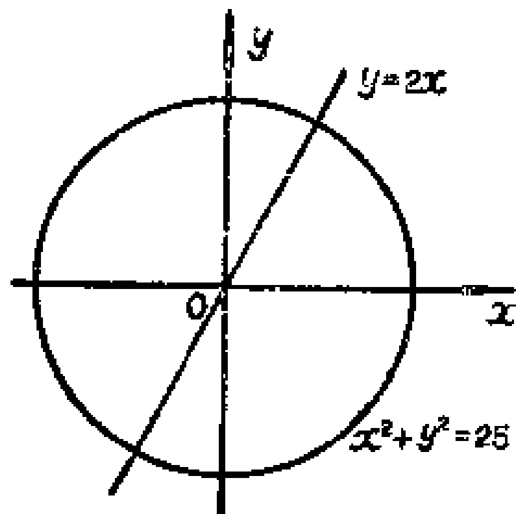


图14—3

$$\begin{cases}x_1=-\sqrt{5},\\y_1=-2\sqrt{5};\end{cases}\quad\begin{cases}x_2=\sqrt{5},\\y_2=2\sqrt{5}.\end{cases}$$

因此交点的坐标为$(-\sqrt{5},\ -2\sqrt{5})$，$(\sqrt{5},\ 2\sqrt{5})$.

二、坐标轴的平移

平面上点的坐标和曲线的方程是对给定的坐标系来说的．同一个点，在不同的坐标系中就有不同的坐标；从而，同一条曲线，在不同的坐标系中也就有不同的方程．

例如，设有两个坐标系 xoy 和 $x'o'y'$（图14—4），它们的坐标轴分别平行，即 x 轴平行于x'轴，y轴平行于y'轴，而且它们的长度单位都相同，那末，点O'在坐标系 xoy 的坐标是$(2,3)$；而它在坐标系$x'o'y'$的坐标就是$(0,0)$．

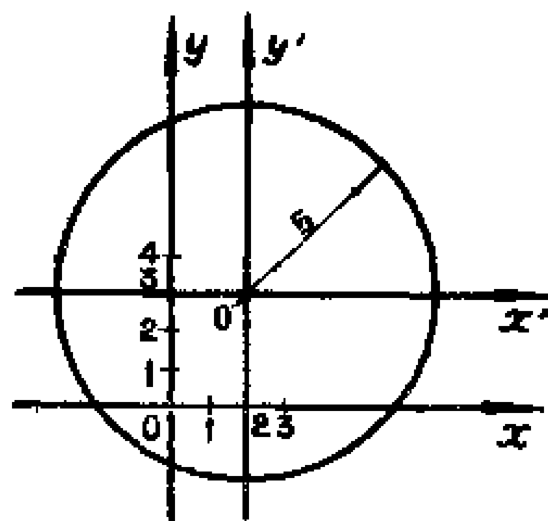


图14—4

对于坐标系xoy来说，圆心在点 O'、半径为5的圆，它的方程是

$$(x-2)^2+(y-3)^2=25;$$

对于坐标系$x'o'y'$来说，它的方程就是

$$x'^2+y'^2=25.$$

从上面的例子可以看出，虽然点的位置没有改变，曲线的位置、形状和大小没有改变，但是由于坐标系的改变，点的坐标和曲线的方程也会随着改变．从而，如果我们把坐标系适当地变换，曲线的方程就可以化简．

当坐标轴的方向和长度单位都不改变，只改变原点的位置时，这种坐标变换叫做坐标轴的平移或简称移轴．

如图14—5，xoy是旧坐标系，$x'o'y'$是新坐标系．新坐标系的原点O'在旧坐标系中的坐标是(a,b)．

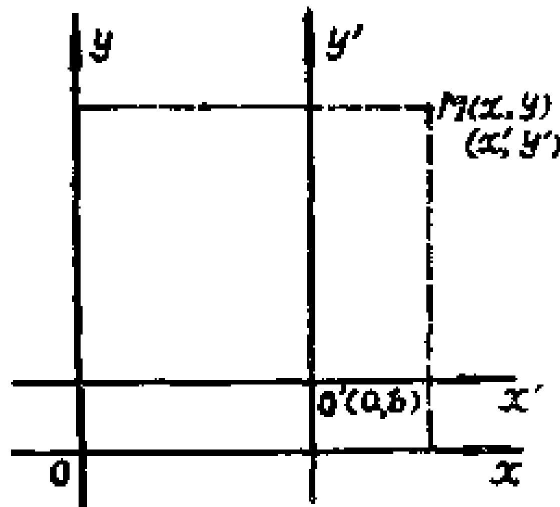


图14—5

设平面上任意一点M在旧坐标系 xoy 中的坐标是(x,y)和新坐标系$x'o'y'$中的坐标是(x',y')．那末从图14—5容易看出，新旧坐标之间有如下关系：

$$\begin{cases}x=x'+a\\y=y'+b\end{cases}\qquad(3)$$

或

$$\begin{cases}x'=x-a\\y'=y-b\end{cases}\qquad(4)$$

(3)式和(4)式都叫做平移公式．

例1 如图14—6，平移坐标轴，把原点移到$O'(3,-4)$．求下列各点的新坐标：

$O(0,0)$；$A(3,-4)$；$B(0,3)$；$C(6,0)$；$D(-2,-3)$．

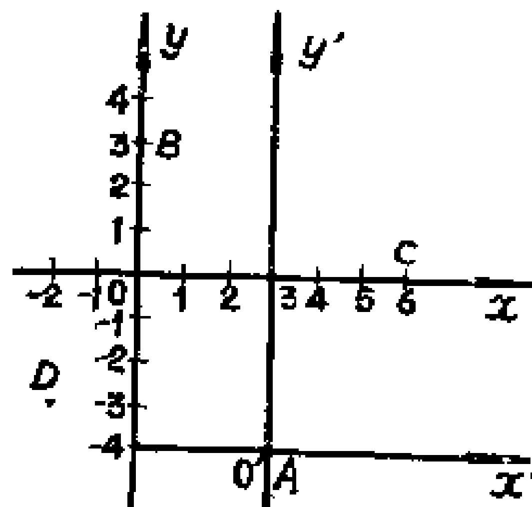


图14—6

解：由(4)式知

$$\begin{cases} x' = x - 3, \\ y' = y + 4. \end{cases}$$

把已知各点的旧坐标分别代入，就得到它们的新坐标依次是 $O(-3, 4)$; $A(0,0)$; $B(-3,7)$; $C(3, 4)$; $D(-5,1)$.

例 2 平移坐标轴，把原点移到 $O'(-1, -2)$，设一圆在旧坐标系中的方程是 $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 4 = 0$，求在新坐标系中的方程，并画出新旧坐标系和这个圆的图形.

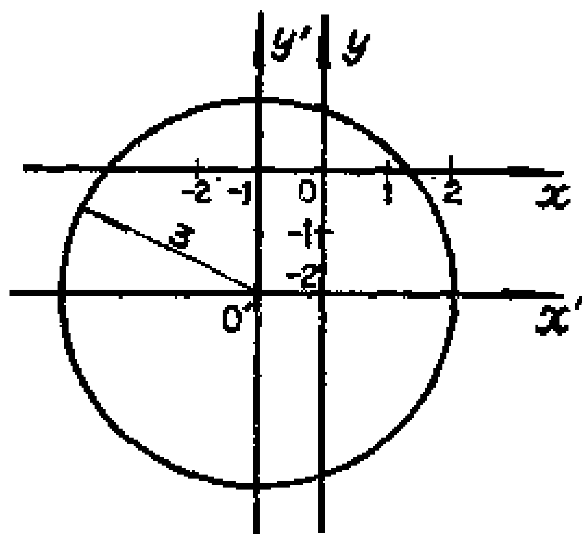


图14—7

解: 把
$$\begin{cases} x = x' - 1, \\ y = y' - 2, \end{cases}$$
代入圆的方程得
$$(x'-1)^2 + (y'-2)^2 + 2(x'-1) + 4(y'-2) - 4 = 0$$
化简后得
$$x'^2 + y'^2 = 9.$$

新旧坐标系和这个圆的图形如图14—7所示.

习 题

1. 已知下述条件，求圆的方程:

(1) 圆心的坐标是(3,2)，半径是 4;

(2) 圆心的坐标是(3,5)，且与y轴相切;

(3) 圆心的坐标是(3,0)，且经过点(1,3).

2. 求下列各圆的圆心和半径，并画出它们的图形:

(1) $x^2 + y^2 - 8x + 4y - 5 = 0$;

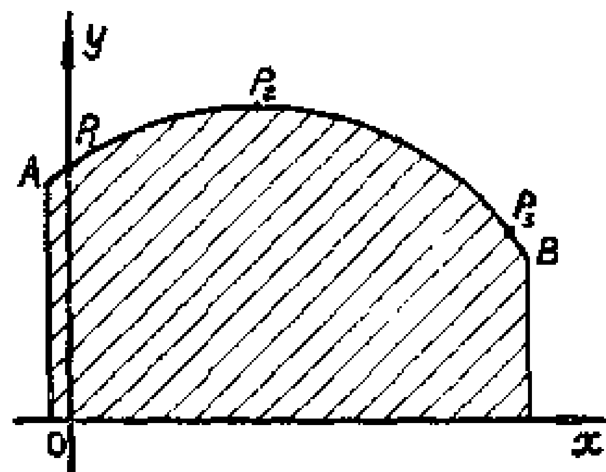
(2) $2x^2 + 2y^2 - 2x - 2y - 1 = 0$;

(3) $x^2 + y^2 - 6x = 0$; (4) $x^2 + y^2 + 8y = 0$.

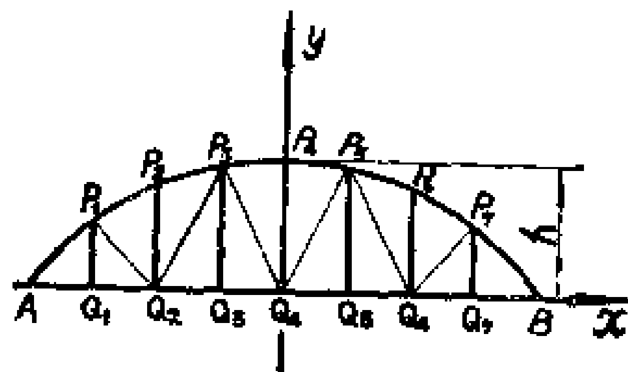
3. 求经过$A(0,1)$、$B(0,6)$和$C(3,0)$三点的圆的方程.

4. 某零件的剖面形状如图，$\overset{\frown}{AB}$为圆弧，测得圆弧上三点的坐标为 $P_1(0,40)$，$P_2(30,50)$和$P_3(70,30)$，试求圆心的坐标和半径之长.

5. 某地建造一座跨度$AB = 8$米，矢高$h = 2$米的圆弧拱桥（见图），每隔 1 米竖一根撑梁，求撑梁Q_5P_5的长.



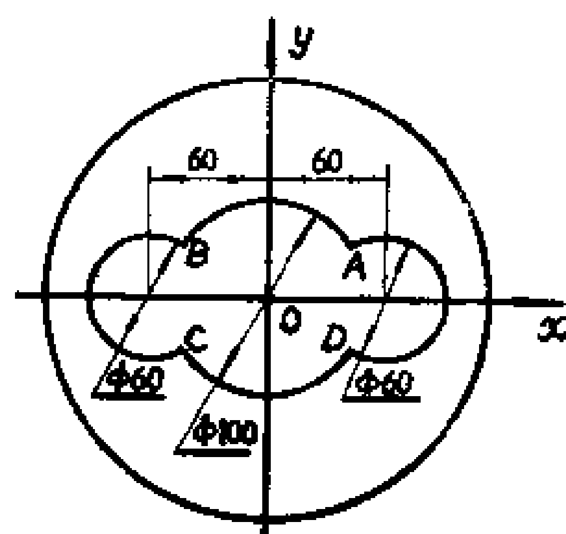
（第 4 题）



（第 5 题）

6. 求直线$x-y=0$和圆$x^2+y^2=8$的交点的坐标.

7. 某零件尺寸如图所示，试计算交点A、B、C和D的坐标.



（第7题）

8. 求圆$x^2+y^2=100$在点$(6,8)$处的切线方程.

9. 求以$M(1,4)$点为圆心，且与直线$4x-3y-4=0$相切的圆的方程.

10. 平移坐标轴，把原点移到$O'(-4,5)$，求下列各点的新坐标，并画出新旧坐标轴和标出各点:

$A(3,-6)$；$B(7,0)$；$C(-4,5)$；$D(0,-8)$.

11. 经过移轴后，原点移到$O'(3,-2)$，A、B、C各点的新坐标分别是$(-4,-5)$、$(0,-6)$、$(3,2)$，求它们的旧坐标，并画出新旧坐标轴和标出各点.

12. 平移坐标轴，把原点移到O'，求下列各曲线的新方程，并画出新旧坐标轴和各方程表示的图形.

(1) $y=4$，$O'(-2,4)$；

(2) $3x-4y=6$，$O'(2,0)$；

(3) $x^2+y^2-4x-2y=0$，$O'(2,1)$.

第二节 椭　　圆

一、椭圆及其标准方程

椭圆是常见的一种曲线. 例如行星的运行轨道是椭圆；某些机械零件的外形是椭圆；圆柱面被平面斜截，截得的交线是椭圆. 工人师傅为了在钢板上画椭圆，常采用下述方法：在钢板上取定两点F_1、F_2，拿一条长度一定的无伸缩的绳子，把它的两端固定在所取定的两点上，用划针把绳子拉紧，使针尖在钢板上慢慢移动，就可以画出一个椭圆(图14—8).

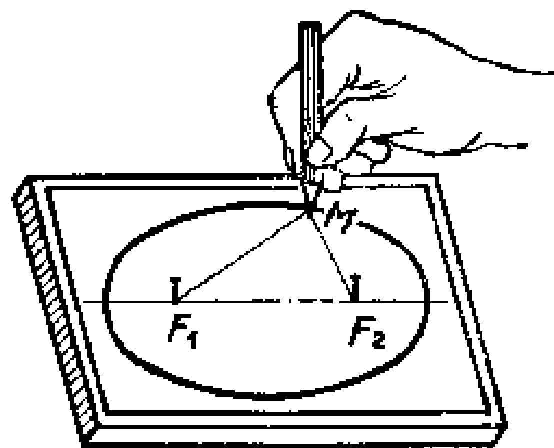


图14—8

从上面的作图中，我们可以看出，椭圆上任何一点M到两定点F_1和F_2的距离的和都等于这条绳子的长度. 于是我们给出椭圆的定义如下：

定义 如果平面内一个动点到两个定点的距离的和等于定长，那末这个动点的轨迹叫做椭圆，这两个定点叫做椭圆的焦点，两个焦点间的距离叫做焦距.

根据上面的定义，我们来推导椭圆的方程.

取经过两个焦点F_1和F_2的直线作x轴，线段F_1F_2的垂直平分线作y轴，建立坐标系（图14—9）.

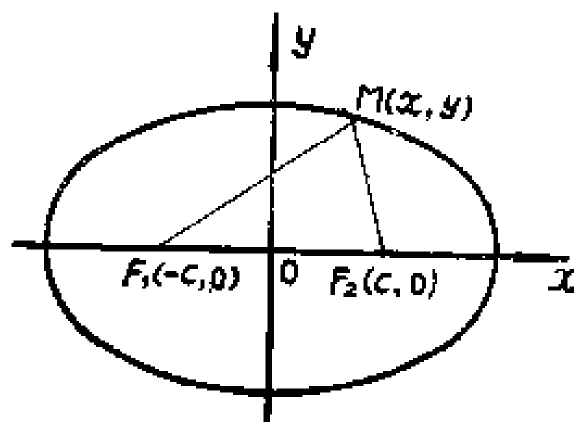


图14—9

设椭圆的焦距是$2c$ $(c>0)$，那末F_1、F_2的坐标分别是$(-c,\ 0)$、$(c,\ 0)$.

设$M(x,y)$是椭圆上的任意一点，它到两个焦点F_1、F_2的距离的和为$2a$ $(a>0)$，那末

$$|MF_1|+|MF_2|=2a,$$

即 $\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a,$

移项，得 $\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2},$

两端平方，得 $(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2,$

展开化简，得 $a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx,$

两端再平方，得 $a^2[(x-c)^2+y^2]=a^4-2a^2cx+c^2x^2,$

化简，得 $(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$

由图14—9看出，$2a>2c$，所以$a>c$，故a^2-c^2是正数，设$a^2-c^2=b^2\ (b>0)$，代入上式，得

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2,$$

两端同除以a^2b^2，得

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1} \tag{5}$$

这里$a>b>0$. 方程(5)叫做椭圆的标准方程. 这个方程所表示的椭圆，它上面的点到两焦点的距离的和是$2a$，焦距是$2c$，两焦点的坐标是$F_1(-c,\ 0)$、$F_2(c,\ 0)$，其中

$$c=\sqrt{a^2-b^2}.$$

例 如果在图14—8中绳子的长是10,焦点的距离是8,写出所画的椭圆的标准方程.

解: 取直线F_1F_2为x轴，F_1F_2的垂直平分线为y轴.

$\because\ 2a=10,\ 2c=8,$

$\therefore\ a=5,\quad c=4.$

$\therefore\ b^2=a^2-c^2=5^2-4^2=9.$

因此所画的椭圆的标准方程是

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$$

二、椭圆的性质

现在我们根据椭圆的标准方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0) \tag{5}$$

来研究它的性质.

1.对称性

从图14—9可以看出，椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$是关于$x$轴、$y$轴和原点对称的图形.

2.顶点

由方程（5）可知,椭圆交x轴于$A(a,\ 0)$和$A'(-a,\ 0)$两点，交y轴于$B(0,\ b)$和$B'(0,\ -b)$两点（图14—10）. A、A'、B、B'四个点叫做椭圆的顶点. 知道了椭圆的四个顶点就能画出它的草图.

3.长轴和短轴

线段$A'A$叫做椭圆的长轴，它的长等于$2a$线段，$B'B$叫做椭圆的短轴，它的长等于$2b$．两轴的交点叫做椭圆的中心．很明显，椭圆的焦点在长轴上．

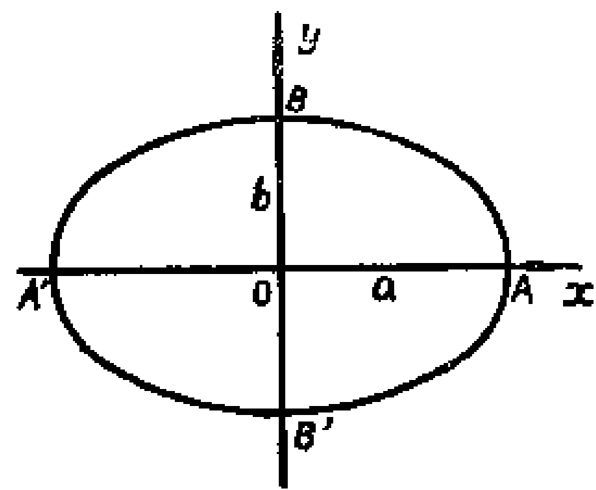


图14—10

a叫做椭圆的长半轴，b叫做椭圆的短半轴．

如果$a=b$，方程（5）就变成$x^2+y^2=a^2$，可见，圆是椭圆的特殊情况．

例1　求椭圆 $16x^2+25y^2=400$的长、短半轴，顶点和焦点的坐标，并画出它的图形．

解：把已知方程化成标准方程，得

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1.$$

所以　　$a=5$，$b=4$，$c=\sqrt{25-16}=3$．

因此椭圆的四个顶点是$A(5,\ 0)$、$A'(-5,\ 0)$、$B(0,\ 4)$、$B'(0,\ -4)$．二个焦点是$F_1(-3,\ 0)$和$F_2(3,\ 0)$．

由$16x^2+25y^2=400$，得 $y=\pm\frac{4}{5}\sqrt{25-x^2}$　　$(-5\leqslant x\leqslant 5)$．

给x以一系列的值，求出y的对应值（只计算在第一象限内的值），得下表：

x	0	1	2	3	4	5
y	4	3.9	3.7	3.2	2.4	0

在坐标平面上描出上表各点，用一条光滑的曲线把它们依次连接起来，就得到椭圆在第一象限内的图形，再利用椭圆的对称性，就可以画出椭圆的图形（图14—11）．

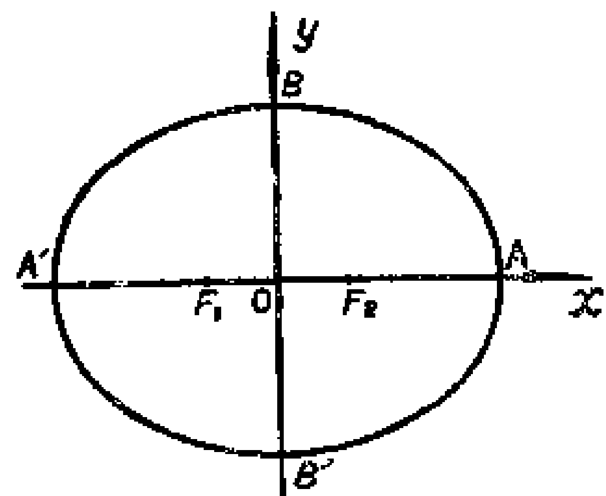


图14—11

如果椭圆的中心在原点，焦点在y轴上，长半轴仍为a，短半轴仍为b，那末它的方程是

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1\qquad(a>b>0).$$

例2　求椭圆$9x^2+4y^2=36$的长、短半轴，焦点坐标，并画出它的图形．

解：把已知方程化成标准方程，得

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1.$$

所以　　$a=3$，$b=2$，$c=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$．

因此椭圆的二个焦点是$F_1(0,\ -\sqrt{5})$和$F_2\ (0,\ \sqrt{5})$，它的图形如图14—12所示．

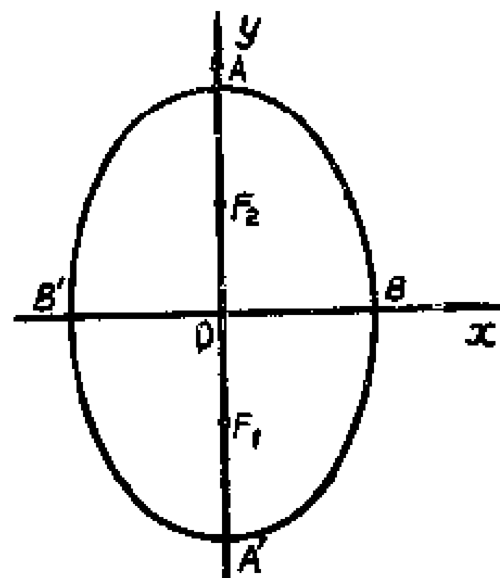


图14—12

例3　我国发射的第一颗人造地球卫星，它的运

行轨道是以地心为一个焦点的椭圆．卫星离地面最近距离$h_1=439$公里，最远距离$h_2=2384$公里．地球半径$R=6371$公里．试按图14—13所示的坐标系，建立这个椭圆的方程．

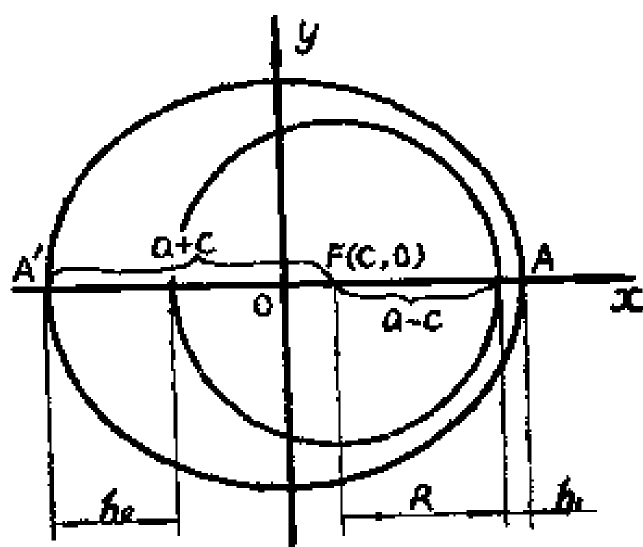


图14—13

解：设椭圆的长、短半轴分别为 a、b．

$\because\quad a-c=R+h_1=6810,$

$\quad\quad a+c=R+h_2=8755,$

$\therefore\quad a=7782.5$（公里），

$\quad\quad c=972.5$（公里）．

$\therefore\quad b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{7782.5^2-972.5^2}$

$\quad\quad=7722$（公里）．

因此所求轨道的标准方程是

$$\frac{x^2}{(7782.5)^2}+\frac{y^2}{(7722)^2}=1.$$

如果椭圆的中心不在原点，而在点（x_0，y_0）处，长轴平行于x轴，短轴平行于y轴，长半轴为a，短半轴为b，求它的方程．

如图14—14所示，平移坐标轴，将原点移到点$O'(x_0,\ y_0)$，得到新坐标系$x'o'y'$．显然，椭圆在$x'o'y'$中的方程是

$$\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1.$$

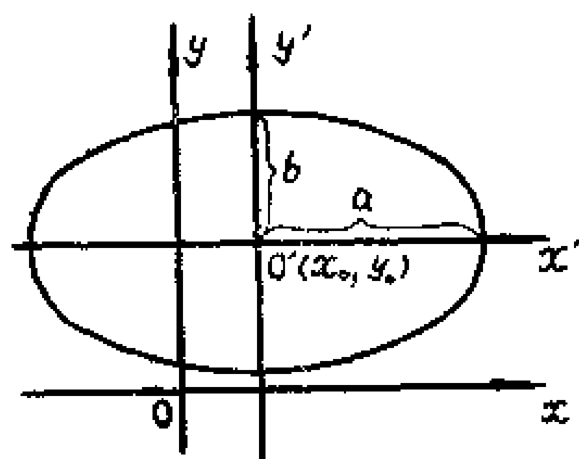


图14—14

根据平移公式

$$\begin{cases}x'=x-x_0,\\ y'=y-y_0,\end{cases}$$

代入上面的方程，就得到椭圆在旧坐标系 xoy 中的方程

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1.$$

例 4　平移坐标轴，把椭圆方程$4x^2+9y^2-8x+18y-23=0$化为标准方程，并画出它的图形．

解：把方程按 x、y 配方，得

$$4(x^2-2x)+9(y^2+2y)=23,$$

$$4(x^2-2x+1)+9(y^2+2y+1)=23+4+9,$$

即
$$4(x-1)^2+9(y+1)^2=36,$$

或
$$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+1)^2}{4}=1.$$

设$x-1=x'$，　$y+1=y'$，得出平移公式：

$$\begin{cases}x=x'+1,\\ y=y'-1,\end{cases}$$

代入上面的方程，得

$$\frac{x'^2}{3^2}+\frac{y'^2}{2^2}=1.$$

这是椭圆在新坐标系$x'o'y'$中的标准方程，它的中心在点O'，长半轴为3，短半轴为2（图14—15）。

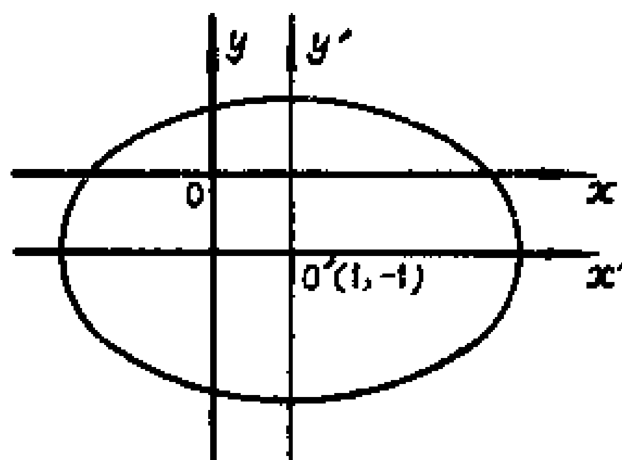


图14—15

习　　题

1.求下列椭圆的长、短半轴，焦点的坐标，并画出它们的图形：

（1）$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$；　　（2）$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$；

（3）$9x^2+16y^2=144$；　　（4）$25x^2+9y^2=100$；

（5）$x^2+25y^2=25$；　　（6）$2x^2=1-y^2$.

2.根据下列条件，建立椭圆的方程（长轴在x轴上，短轴在y轴上）：

（1）长轴的长等于6，短轴的长等于4；

（2）两焦点间的距离等于8，长轴的长等于10；

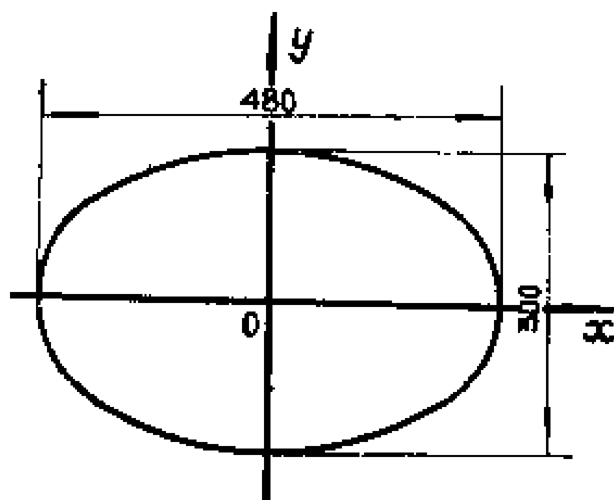
（3）两焦点间的距离等于6，短轴的长等于2；

（4）长、短半轴的和等于10，两焦点间的距离等于$4\sqrt{5}$.

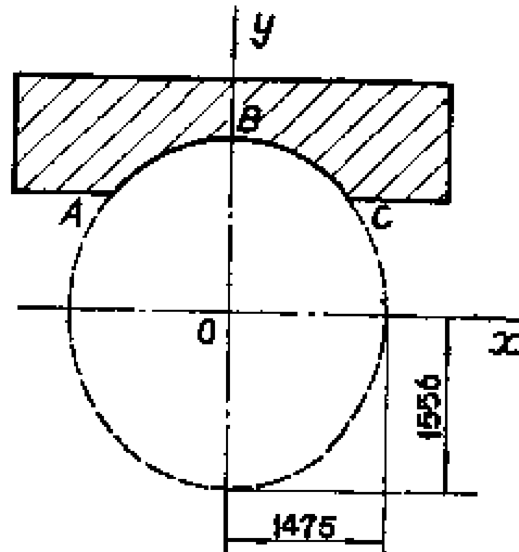
3.油罐车上的油罐的横截面是椭圆，椭圆的长轴是1.6米，短轴是1米，试写出长、短轴分别在x轴、y轴上的椭圆方程.

4.锅炉上的人孔形状是椭圆，它的长、短轴尺寸如图所示，试写出椭圆的方程.

5.汽轮发电机冷凝器的进气室侧板如图中的斜线部分，弧ABC是椭圆的一部分，椭圆的长半轴$a=1556$毫米，短半轴$b=1475$毫米，求弧ABC的方程.



（第4题）



（第5题）

6. 我国发射的第二颗人造地球卫星，它的运行轨道是以地心为一个焦点的椭圆. 卫星离地面最近距离是266公里，最远距离是1826公里，地球半径是6371公里，求这个椭圆的方程.

7. 平移坐标轴，将下列椭圆的方程化为标准方程，并画出它们的图形：

(1) $x^2+4y^2-2x-16y+1=0$;　　(2) $4x^2-8x+9y^2-36y+4=0$;

(3) $2x^2+y^2+4x-4y+2=0$.

8. 求椭圆$x^2+4y^2=25$与直线$x+2y-7=0$的交点的坐标.

第三节　抛　物　线

一、抛物线及其标准方程

现在我们来研究抛物线.

把一根直尺固定在画图板上直线 l 的位置上，再把一块三角板的一条直角边紧靠着直尺的边缘（图14—16）. 把一条无伸缩的绳子的一端固定在三角板另一条直角边上的一点A，截取绳子的长等于从A点到直线 l 的距离 AC，并且把绳子的另一端固定在画图板上的一点 F. 用一支铅笔扣着绳子，紧靠着三角板的这条直角边把绳子绷紧，然后使三角板紧靠着直尺上下滑动，这样铅笔就描出一条曲线，这条曲线叫做抛物线.

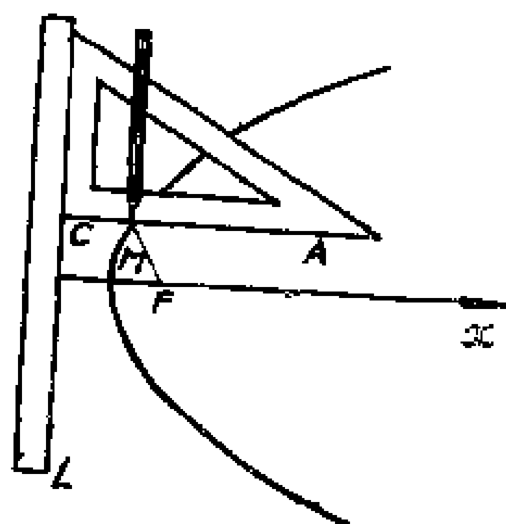


图14—16

由上面的画图中，我们可以看到抛物线上任意一点M到F的距离和它到直线 l 的距离是相等的，即 $MF=MC$. 于是我们给出抛物线的定义如下：

定义　如果平面内一个动点到一个定点和一条定直线的距离相等，那末这个动点的轨迹叫做抛物线. 这个定点叫做抛物线的焦点，这条定直线叫做抛物线的准线.

根据上面的定义，我们来推导抛物线的方程.

取经过焦点F且垂直于准线 l 的直线作x轴(图14—17)，x轴与l相交于D点，取线段DF的垂直平分线作y轴.

设$DF=P$，那末焦点F的坐标是$\left(\frac{P}{2},\ 0\right)$，准线 l 的方程是$x=-\frac{P}{2}$.

设$M(x,\ y)$是抛物线上的任意一点，作$MQ\perp l$，那末 Q点的坐标是$\left(-\frac{P}{2},\ y\right)$.

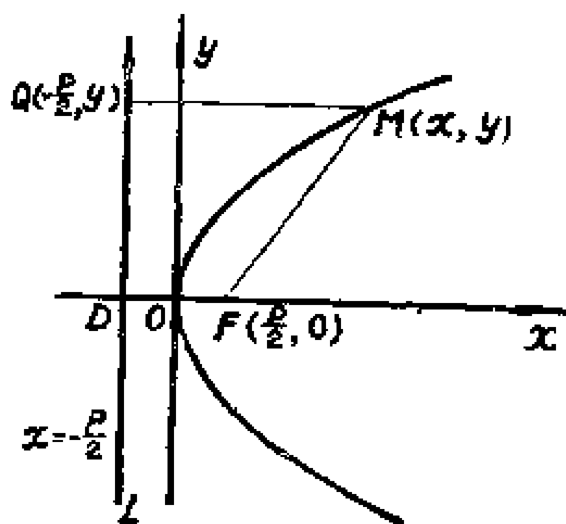


图14—17

$$\because\quad |MF|=|MQ|,$$

$$\therefore\quad \sqrt{\left(x-\frac{P}{2}\right)^2+y^2}=x+\frac{P}{2}.$$

两端平方，得 $\left(x-\frac{P}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{P}{2}\right)^2$，

$$x^2-Px+\frac{P^2}{4}+y^2=x^2+Px+\frac{P^2}{4},$$

于是得

$$\boxed{y^2=2Px} \qquad (6)$$

这里 $P>0$．方程（6）叫做抛物线的标准方程．这个方程所表示的抛物线，它的焦点是 $F\left(\frac{P}{2},\ 0\right)$，准线的方程是 $x=-\frac{P}{2}$．

抛物线是常见的一种曲线．例如炮弹运行的轨道是一条抛物线；又如探照灯、汽车前灯的反射镜面，它们的纵断面的截线也都是抛物线．

二、抛物线的性质

1.对称性

由图14—17可以看出，所给抛物线关于x轴是对称的，x轴叫做抛物线的轴．

2.顶点

抛物线和它的对称轴的交点叫做抛物线的顶点，抛物线$y^2=2Px$的顶点在原点．

3.张口方向

抛物线是向某一个方向张口的曲线，例如$y^2=2Px$（$P>0$）是向右张口的抛物线．

抛物线的方程、焦点和准线的位置与坐标系的选择有关．现将抛物线的四种标准方程及性质列表如下：

图形				
方程	$y^2=2Px$	$y^2=-2Px$	$x^2=2Py$	$x^2=-2Py$
焦点	$F\left(\frac{P}{2},\ 0\right)$	$F\left(-\frac{P}{2},\ 0\right)$	$F\left(0,\ \frac{P}{2}\right)$	$F\left(0,\ -\frac{P}{2}\right)$
准线	$x=-\frac{P}{2}$	$x=\frac{P}{2}$	$y=-\frac{P}{2}$	$y=\frac{P}{2}$
对称轴	x 轴	x 轴	y 轴	y 轴
张口方向	向右	向左	向上	向下
顶点	原点	原点	原点	原点

例1 求抛物线$y^2=4x$的焦点的坐标和准线方程并画出图形．

解： $P=2$，焦点F的坐标$(1,\ 0)$，准线方程$x=-1$．

给x以一系列的值，求出y的对应值（只计算在第一象限内的值），得下表：

x	0	1	2	4……
y	0	2	$2\sqrt{2}$	4……

在坐标平面上描出上表各点，用一条光滑的曲线把它们依次连接起来，就得到抛物线在第一象限内的图形，再利用抛物线的对称性，就可以画出它的图形（图14—18）．

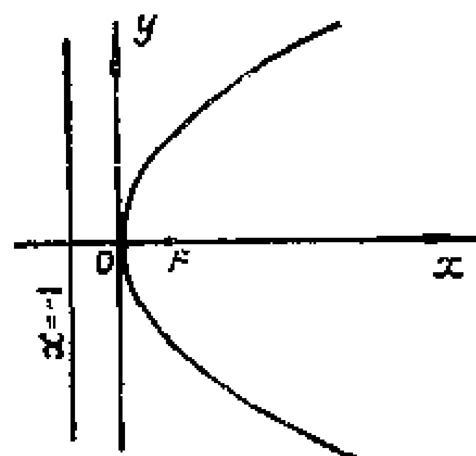


图14—18

例 2 已知抛物线的顶点在原点，关于 y 轴对称，并且经过 A（4，-5）点，求抛物线的方程（图14—19）．

解：因为已知抛物线的顶点在原点，以 y轴为对称轴，并且经过$A(4,-5)$点，所以它的方程是

$$x^2=-2Py \qquad (P>0).$$

因为A(4，-5）点在抛物线上．所以

$$16=10P,$$

$$P=\frac{8}{5}.$$

因此，所求的方程是

$$x^2=-\frac{16}{5}y.$$

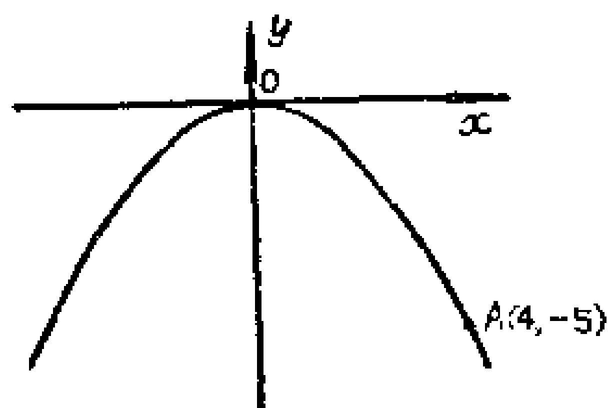


图14—19

例 3 平移坐标轴，把抛物线方程 $y=\frac{x^2}{4}-x-2$化为标准方程，并画出它的图形．

解：把方程化为 $x^2-4x=4y+8$．

配方，得 $x^2-4x+4=4y+8+4$，

$$(x-2)^2=4(y+3).$$

设 $x-2=x'$，$y+3=y'$，得出平移公式：

$$\begin{cases}x=x'+2,\\ y=y'-3.\end{cases}$$

代入上面的方程，得

$$x'^2=4y'.$$

这是抛物线在新坐标系 $x'o'y'$ 中的标准方程，它的顶点在O'，对称轴是 y' 轴（图14—20）．

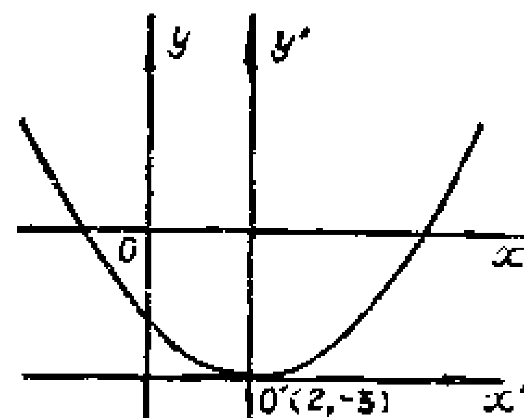


图14—20

这个例子说明了二次函数

$$y=ax^2+bx+c \qquad (a\neq 0)$$

的图象是一条对称轴平行于 y轴的抛物线．

例 4 鼓风机向冲天炉送风时，风在风管内的速度是按抛物线分布的，即越靠近管壁风速越小，在管子中心风速最大（图14—21）．设风管的直径为 d，管中心的风速为 v_0，求风管中风速的分布函数．

解：取坐标系xov如图14—22所示．设抛物线方程为

$$v=ax^2+bx+c,$$

其中a,b,c为待定系数。由于点$A(0,v_0)$，$B\left(\frac{d}{2},0\right)$，$C\left(-\frac{d}{2},0\right)$在抛物线上，因此把它们分别代入方程，得三元一次方程组：

$$\begin{cases} v_0=C, \\ 0=\frac{d^2}{4}a+\frac{d}{2}b+C, \\ 0=\frac{d^2}{4}a-\frac{d}{2}b+C, \end{cases}$$

解得　$C=v_0$，$b=0$　$a=-\frac{4v_0}{d^2}$.代入原方程，得风速的分布函数为

$$v=-\frac{4v_0}{d^2}x^2+v_0.$$

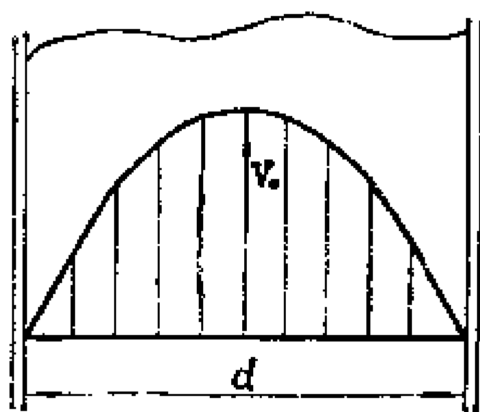


图14—21

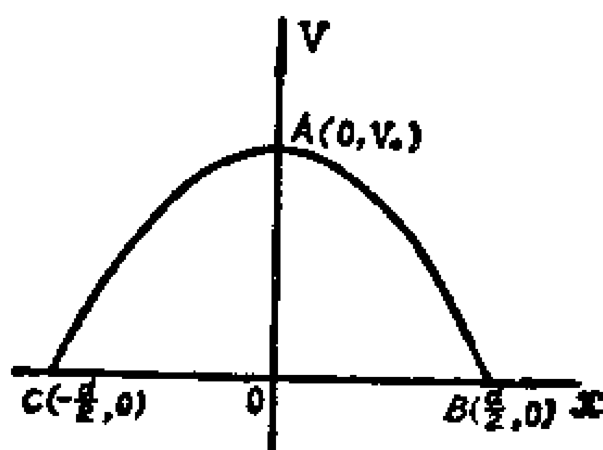


图14—22

例 5　物体从离地面45米的高处自由落下，如果取重力加速度$g=10$米/秒²（注：一般g取作9.8米/秒²，为了计算方便，这里取$g=10$米/秒²）．求：

（1）物体在t秒后距离地面的高度h和时间t之间的函数关系；

（2）写出它的定义域，并作出这个函数的图象；

（3）经过1秒钟、2秒钟后，物体离地面的高度各为多少？

解：（1）物体从45米高处自由落下，开始时初速度为零，由于受地心引力的影响，下落时产生重力加速度g. 如果t秒钟后，物体从A点落到B点（图14—23），那末经过的距离为$\frac{1}{2}gt^2$，物体离开地面的高度$h=45-\frac{1}{2}gt^2$.把$g=10$代入，即得所要求的h和t之间的函数关系

$$h=45-5t^2.$$

（2）因为函数$h=45-5t^2$中，自变量$t\geqslant 0$，因变量$h\geqslant 0$，当$h=0$时，由$45-5t^2=0$，得$t=3$,所以函数的定义域是$0\leqslant t\leqslant 3$．

函数的图象是抛物线在第一象限中的一部分（图14—24）．

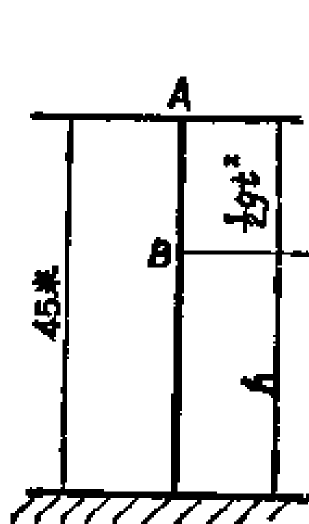


图14—23

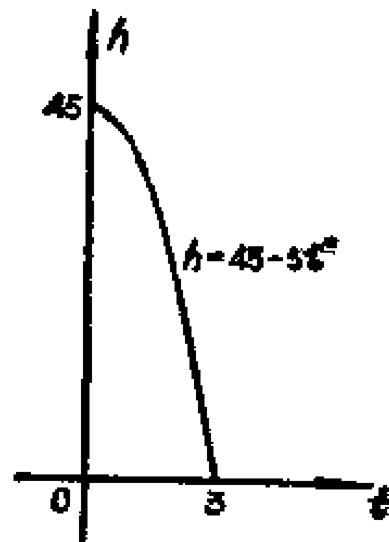


图14—24

(3) 当 $t=1$ 秒时，$h=45-5=40$(米)；

当 $t=2$秒时，$h=45-5\times(2)^2=25$(米)。

三、抛物线的光学性质

抛物线绕它的对称轴旋转一周，所得到的曲面叫做旋转抛物面．由光学知识知道，将光源放在抛物线的焦点位置上，经旋转抛物镜反射出去的光线必平行于对称轴（图14—25）．

毛主席教导我们："**理论的基础是实践，又转过来为实践服务。**"根据抛物线的光学性质，人们把探照灯和汽车前灯的反射镜都做成旋转抛物面的形状，光源放在焦点上，光线经镜面反射后形成平行光柱，可照得很远；反过来，旋转抛物面也能将平行于对称轴的光线汇聚于焦点，产生高温．太阳灶的聚光镜就是根据这种原理制成的（太阳光近似于平行光线）．

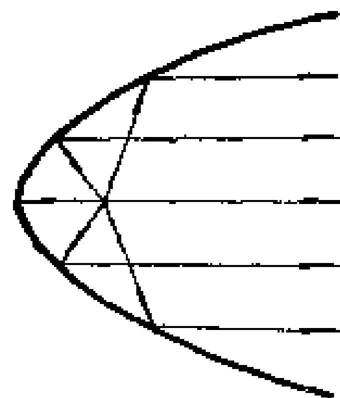


图14—25

例 汽车前灯的反射镜面为旋转抛物面．已知灯口直径为20厘米，深度为10厘米（图14—26）.问灯泡应安装在什么位置上？

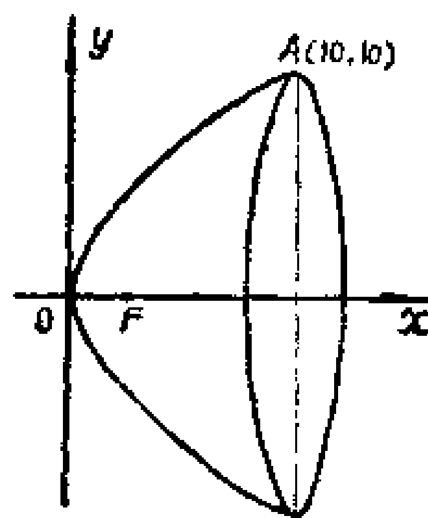


图14—26

解： 显然灯泡应放在焦点 F处．

取直角坐标系 xoy，如图14—26 所示．于是抛物线的标准方程应是

$$y^2=2Px.$$

由灯口直径和深度，可得灯口上 A点的坐标为(10,10)，它在抛物线上，因此

$$10^2=20P,$$

$$P=5.$$

所以焦点 F的坐标为（2.5，0）．

答： 灯泡应装在距灯底 2.5 厘米处。

习　　题

1.求下列抛物线的焦点坐标，准线的方程，对称轴，开口方向，并画出它们的图形：

(1) $y^2=16x$；　　(2) $y^2=-2x$；

(3) $x^2-8y=0$；　　(4) $2x^2=-16y$.

2.根据下列条件，建立抛物线的方程：

(1) 顶点在原点，焦点是F（0，4）；

(2) 顶点在原点，准线的方程是 $y=\frac{1}{2}$；

(3) 焦点是 $F\left(0,-\frac{1}{2}\right)$，准线的方程是 $y=\frac{1}{2}$；

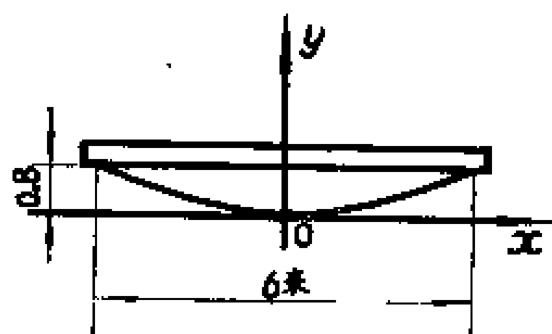
（4）顶点在原点，关于 x 轴对称，并且经过$A(2,-5)$点.

（5）通过$A(-2,0)$，$B(0,0)$、$C(1,-3)$三点，且对称轴平行于 y 轴.

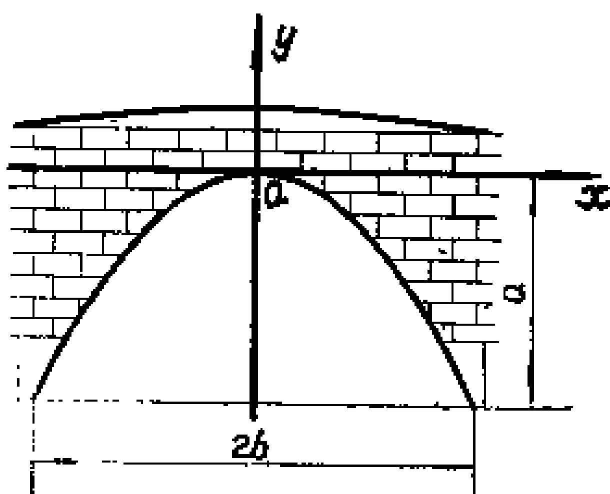
3.建筑上采用的鱼腹梁，其下缘为抛物线，尺寸和坐标系如图所示，求此抛物线的方程.

4.一抛物线形的拱桥，拱高为a，拱宽为$2b$（见图），求这条抛物线的方程.

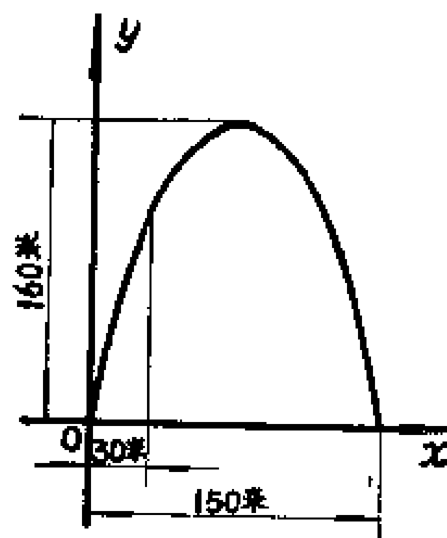
5.炮弹运行轨道是一条抛物线.已知某迫击炮的最大射程为150米，最大高度为160米，在如图所示的坐标系中，求炮弹的轨迹方程，并求出距离炮位30米处炮弹的高度h.



（第3题）



（第4题）



（第5题）

6.平移坐标轴，把下列抛物线的方程化为标准方程，并画出它们的图形：

（1）$y^2+8x-16=0$；　　（2）$3x^2-6x+y=0$；

（3）$x^2-6x-6y-21=0$；　　（4）$y^2+2y-2x+5=0$.

7.探照灯的灯口直径为80厘米，深度为40厘米，问灯泡应安装在什么位置上？

第四节　双　曲　线

一、双曲线及其标准方程

下面，我们再来研究双曲线.

取一拉链，拉开它的一部分，在拉开的两边上各选择一点，分别固定在定点F_1和F_2上，使两边的交点M到F_1的距离减去到F_2的距离的差等于所给的定长$2a$（$a>0$），如图14—27.把铅笔放在M处，于是随着拉链的逐渐拉开或闭拢，铅笔画出曲线的一支，这一支上任何一点M到F_1的距离减去到F_2的距离的差都等于这个定长.如果再将两股在F_1和F_2的位置对调一下，同法可画出曲线的另一支.这一曲线叫做双曲线，它的定义如下：

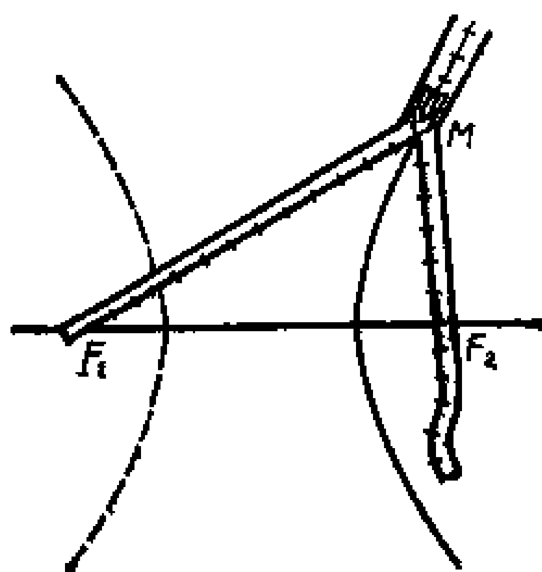


图14—27

定义　如果平面内一个动点到两个定点的距离的差的绝对值等于定长，那末这个动点的轨迹叫做双曲线.这两个定点叫做双曲线的焦点，两个焦点间的距离叫做焦距.

根据双曲线的定义，我们来推导出双曲线的方程.

取经过两个焦点F_1和F_2的直线作x轴，线段

F_1F_2的垂直平分线作y轴（图14—28）。

设双曲线的焦距是$2c$（$c>0$），那末F_1、F_2的坐标分别是（$-c$，0）和（c，0）。

设M（x，y）是双曲线上的任意一点，它到两个焦点F_1、F_2的距离的差的绝对值是定长$2a$（$a>0$），那末

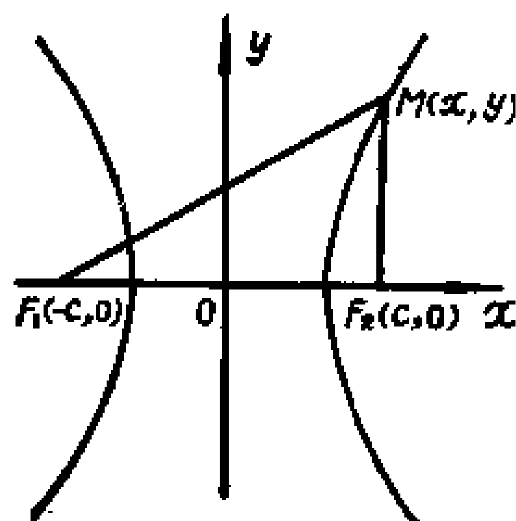


图14—28

$$|MF_1|-|MF_2|=\pm 2a,$$

即
$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a.$$

化简，得
$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2).$$

由图14—28看出，$2a<2c$，所以$c>a$，故c^2-a^2是正数，设$c^2-a^2=b^2$（$b>0$），代入上式，得

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2,$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1} \qquad (7)$$

方程（7）叫做双曲线的标准方程。这个方程所表示的双曲线，它上面的点到两焦点的距离的差是$2a$，焦距是$2c$，两焦点是$F_1(-c,0)$和$F_2(c,0)$，其中$c=\sqrt{a^2+b^2}$。

例 已知双曲线的焦点是$F_1(-5,0)$和$F_2(5,0)$，动点到两焦点的距离的差是6，求它的方程。

解： 由题意知 $c=5$，$a=3$，所以

$$b^2=c^2-a^2=5^2-3^2=16,$$

因此所求的方程是

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1.$$

二、双曲线的性质

现在我们根据双曲线的标准方程

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (7)$$

来研究它的性质。

1.对称性

由图14—28可以看出，双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$是关于$x$轴、$y$轴和原点对称的图形。

2.顶点

由（7）得双曲线交x轴于$A(a,0)$和$A'(-a,0)$两点，双曲线和y轴不相交（图14—29）。A、A'两个点叫做双曲线的顶点。

3.实轴和虚轴

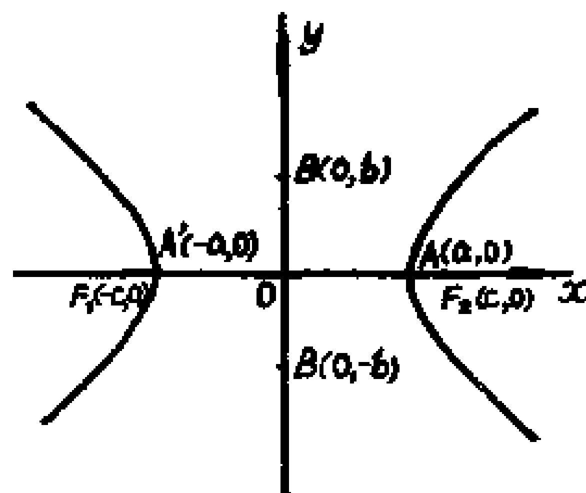


图14—29

线段$A'A$叫做双曲线的实轴，它的长等于$2a$，a叫做双曲线的实半轴．在y轴上取两点$B(0,b)$、$B'(0,-b)$，线段$B'B$叫做双曲线的虚轴，它的长等于$2b$，b叫做双曲线的虚半轴．实轴和虚轴的交点叫做双曲线的中心．很明显，双曲线的焦点在实轴的延长线上．

4.渐近线

由图14—28可以看出，双曲线是远离其中心无限伸展的曲线．我们来研究双曲线上的点，当它远离中心时的趋向．

由双曲线的对称性，我们先研究双曲线在第一象限内的部分．

在第一象限内，$x>0$，$y>0$．由$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，得

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}=\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}<\frac{b}{a}x,$$

而$y=\frac{b}{a}x$表示一条直线．

由上面不等式可知，在第一象限内，双曲线永远在直线$y=\frac{b}{a}x$的下方，并且当x无限增大时，由于$\frac{a^2}{x^2}$无限接近于零，因此$1-\frac{a^2}{x^2}$无限接近于1．也就是说，当M点沿双曲线的这一部分移动，而且无限远离其中心时，双曲线上的点和直线$y=\frac{b}{a}x$就无限接近（图14—30）．

同样，双曲线在其他三个象限内的点也有相同的性质．这两条直线叫做双曲线的渐近线（图14—31）．

综合上述可得：双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的两条渐近线是$y=\pm\frac{b}{a}x$．

例1 试将双曲线$9x^2-16y^2=144$化为标准方程，并且求它的实半轴与虚半轴，焦点坐标和渐近线的方程．

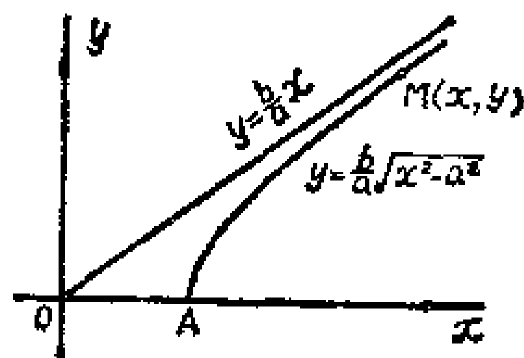


图14—30

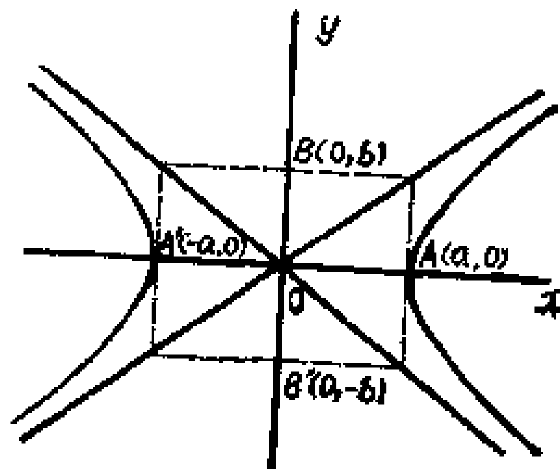


图14—31

解：把方程化成

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1,$$

得 $a=4$，$b=3$。因为 $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{16+9}=5$，所以焦点是 $F_1(-5,0)$ 和 $F_2(5,0)$。渐近线的方程是 $y=\pm\frac{b}{a}x$，即 $y=\pm\frac{3}{4}x$。它的图形如图14—31所示。

将方程（7）中的变量 x 和 y 互相交换，便得

$$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1. \tag{8}$$

方程（8）表示一双曲线，这双曲线，实轴在 y 轴上，实半轴是 a，虚半轴是 b，焦点是 $F_1(0,-c)$，$F_2(0,c)$，渐近线的方程是 $y=\pm\frac{a}{b}x$，它的图形如图14—32所示。

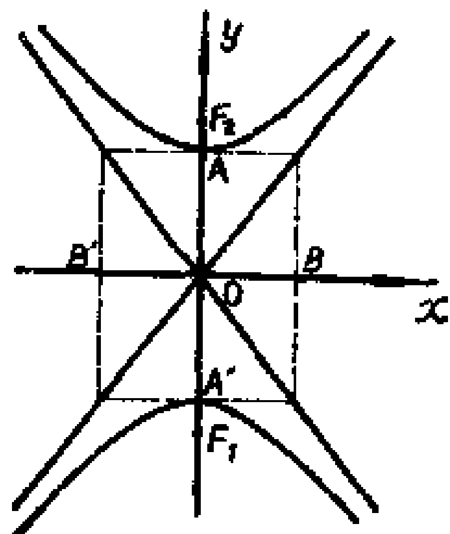


图14—32

例 2　将双曲线 $9y^2-16x^2=144$ 化为标准方程，并求出它的实半轴与虚半轴，焦点的坐标和渐近线的方程。

解：把方程化成

$$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1,$$

得 $a=4$，$b=3$。因为 $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{16+9}=5$，所以焦点是 $F_1(0,-5)$ 和 $F_2(0,5)$。渐近线的方程是 $y=\pm\frac{a}{b}x$，即 $y=\pm\frac{4}{3}x$。它的图形如图14—32所示。

例 3　双曲线型的自然通风塔的通风筒，是由双曲线绕其虚轴旋转而成的壳体（图14—33）。它具有接触面大，风的对流好，冷却快，又能节省建筑材料等优点。某电厂使用的双曲线型的通风塔，它的通风筒的最小半径是11.61米，上口半径是13米，下底半径是24.56米，高是55米。求通风筒轴截面的双曲线方程（图14—34）。

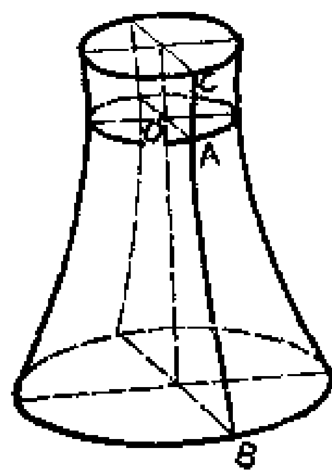


图14—33

解：取坐标系如图14—34所示，设通风筒轴截面的双曲线方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

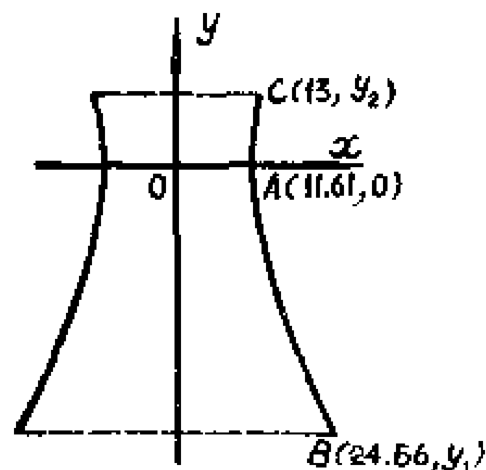


图14—34

因为点 A (11.61,0) 是双曲线的一顶点，所以 $a=11.61$。又因为 $B(24.56,y_1)$ 和 $C(13,y_2)$ 都在双曲线上，所以有方程组

$$\begin{cases}\dfrac{24.56^2}{11.61^2}-\dfrac{y_1^2}{b^2}=1,\\[2ex]\dfrac{13^2}{11.61^2}-\dfrac{y_2^2}{b^2}=1.\end{cases}$$

解得

$$\begin{cases}y_1=-\dfrac{b}{11.61}\sqrt{24.56^2-11.61^2}\doteq-1.864b,\\[2ex]y_2=\dfrac{b}{11.61}\sqrt{13^2-11.61^2}\doteq0.5036b.\end{cases}$$

由于通风筒的高度是55米，所以$y_2-y_1=55$，

即 $$0.5036b-(-1.864b)=55.$$

解得

$$b\doteq23.23.$$

所以通风筒轴截面的双曲线方程是

$$\frac{x^2}{11.61^2}-\frac{y^2}{23.23^2}=1.$$

工人师傅根据这个方程，可以先画出通风筒轴截面的双曲线的图形，然后再进行施工．

例 4 平移坐标轴，把双曲线方程$x^2-y^2+8x-14y-133=0$化为标准方程，并画出它的图形．

解：把方程按x，y配方，得

$$(x^2+8x+16)-(y^2+14y+49)=133+16-49,$$
$$(x+4)^2-(y+7)^2=100.$$

设 $x'=x+4$，　$y'=y+7$，得出平移公式：

$$\begin{cases}x=x'-4,\\y=y'-7,\end{cases}$$

代入上面的方程，得

$$\frac{x'^2}{10^2}-\frac{y'^2}{10^2}=1.$$

这是双曲线在新坐标系$x'o'y'$中的标准方程，它的中心在点O'，实半轴和虚半轴都是10（图14—35）．

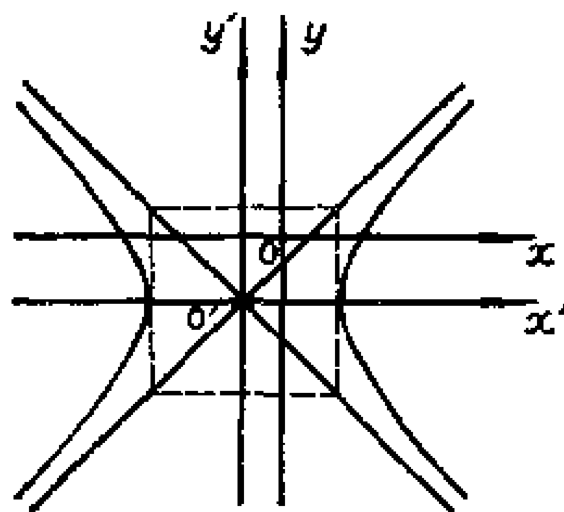


图14—35

前面几节我们分别研究了圆、椭圆、抛物线和双曲线．这些曲线统称为圆锥曲线．因为它们都可以用不经过圆锥顶点的平面去截圆锥面而得到（图14—36）．设锥面的半顶角为α，截面和圆锥面的轴所夹的角为θ，则

(1) 当$\theta=\frac{\pi}{2}$时，截口为圆；

(2) 当$\alpha<\theta<\frac{\pi}{2}$时，截口为椭圆；

(3) 当$\theta=\alpha$时，截口为抛物线；

(4) 当$0<\theta<\alpha$时，截口为双曲线.

这里，我们看到：由于截面和圆锥面的相对位置的变化，引起了截口形状的改变.当角θ从$\frac{\pi}{2}$不断减小到0时，截口的形状由圆依次转化为椭圆、抛物线、双曲线.

由此可知：椭圆、抛物线、双曲线，它们既是互相对立，互相区别，各有其特殊的本质，但在一定条件下，它们又是互相联系，互相转化，互相统一的.

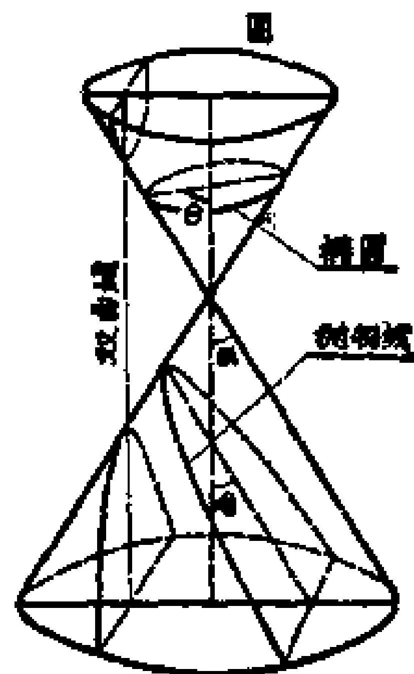


图14—36

习　　题

1.求下列双曲线的焦点坐标，渐近线的方程，并画出图形：

(1) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$；　　(2) $5x^2-4y^2=20$；

(3) $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{4}=1$；　　(4) $9y^2-3x^2=27$.

2.根据下列条件，建立双曲线的方程（实轴在x轴上，虚轴在y轴上）：

(1) 焦距等于14，实半轴等于6；

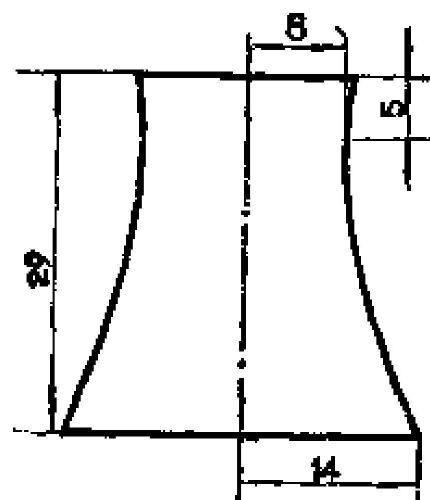
(2) 焦距等于10，虚半轴等于4；

(3) 实半轴等于$\sqrt{15}$，且经过$A(5,-2)$点；

(4) 渐近线方程是$y=\pm x$，且经过$A(-5,3)$点.

3.已知椭圆$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{5}=1$. 求以这个椭圆的焦点做顶点，而以它的顶点做焦点的双曲线方程.

4.某火力发电厂修建一座双曲线型钢筋混凝土冷却塔，塔高29米，塔筒喉部到塔顶的距离是5米，塔筒喉部圆的半径是8米，塔底圆的半径是14米，求塔筒断面双曲线的方程.



（第4题）

5.平移坐标轴，将下列双曲线的方程化为标准方程，并画出它们的图形：

(1) $4x^2-4y^2+4x+24y-135=0$；　　(2) $9x^2-16y^2-54x-64y-127=0$.

复 习 题

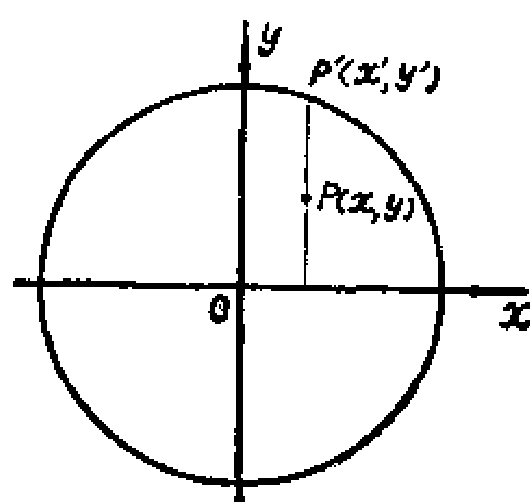
1. 根据椭圆的标准方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$和$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1\ (a>b>0)$，分别说明半焦距$c$和$a$、$b$的关系，焦点和顶点的坐标，长轴、短轴的位置和长度。

2. 根据双曲线的标准方程$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$和$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$，分别说明半焦距$c$和$a$、$b$的关系，焦点和顶点的坐标，实轴、虚轴的位置和长度，以及渐近线的方程。

3. 求与椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$共焦点，且经过$A(3,-2)$点的椭圆的方程。

4. 求经过$A(1,4)$和$B(7,2)$两点，并且以坐标轴为对称轴的椭圆的方程。

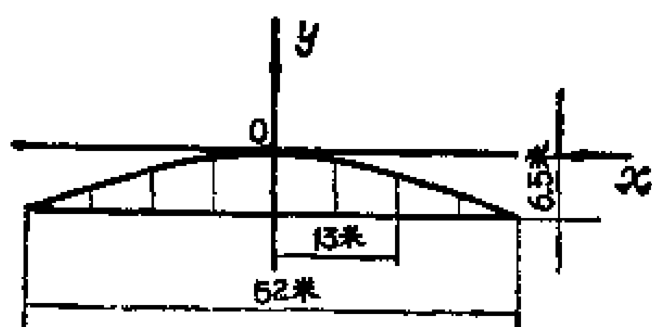
5. $P'(x',y')$点在圆$x^2+y^2=a^2$上移动，P点和P'点的横坐标相同，纵坐标的比等于$b:a\ (a>b>0)$，求P点的轨迹方程。



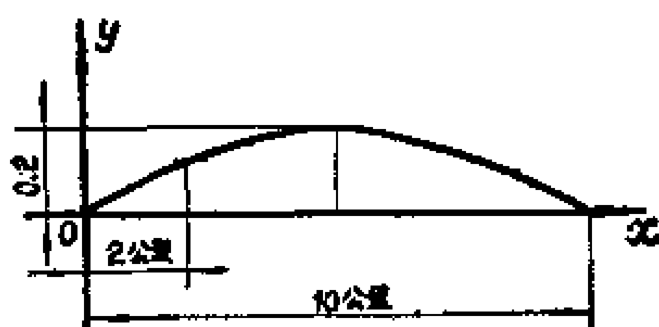
（第5题）

6. 某地要修建一座抛物形拱桥，桥的跨度是52米，高是6.5米。在建造时需要在跨度每隔一米竖一支柱，试计算离跨度中点13米处那根支柱的长。

7. 炮弹运行的轨道是一条抛物线，已知其最大射程是10公里，最大高度是200米。在给定的坐标系中，求炮弹的轨迹方程，并求距炮位2公里处炮弹的高度。



（第6题）



（第7题）

8. 求下列椭圆的方程，并画出它们的图形：

(1) 长半轴是4，焦点是$F_1(1,2)$和$F_2(5,2)$；

(2) 短半轴是2，焦点是$F_1(0,-2)$和$F_2(0,4)$。

9. 求下列抛物线的方程，并画出它们的图形：

(1) 顶点是$(3,4)$，准线是y轴；

(2) 焦点是$(3,-3)$，准线的方程是$y=1$。

10. 平移坐标轴，把下列二元二次方程化为标准方程，并画出它们的图形：

(1) $x^2+y^2-4x+6y-3=0$；　(2) $9x^2+16y^2+54x-64y+1=0$；

(3) $x^2-10x-8y+49=0$；　(4) $4x^2-9y^2+16x-54y-29=0$。

第十五章　参数方程和极坐标

第一节　参数方程

一、曲线的参数方程

我们知道，在直角坐标系中，曲线的方程就是曲线上动点的坐标 x 和 y 之间的关系式．但是，在某些实际问题中，直接建立这种关系式是比较困难的，这时往往借助于另一个变量 t，将动点坐标 x 和 y 各自表示为 t 的关系式．

例如：一飞机以 v_0 速度沿水平方向飞行，并在飞行时投下一件物资，试求空投物资的运动轨迹．

以空投物资开始下落时，飞机所在的位置为坐标原点；过原点的水平线为 x 轴，以飞机飞行的方向为 x 轴的正方向；过原点的铅垂线为 y 轴，正向向下（图15—1）．设经过时间 t 后，空投物资到达 $M(x, y)$ 点．

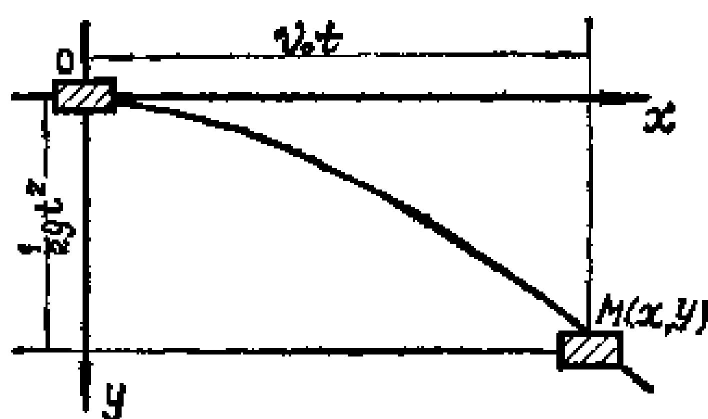


图15—1

这里，要直接建立 M 点的坐标 x 和 y 之间的关系式是比较困难的，但根据物理知识，x 和 y 各自与时间变量 t 的关系式是容易建立的．

事实上，如果忽略空气的阻力，空投物资离开飞机时的运动是由水平方向的等速运动和铅垂方向的自由落体运动合成的．在水平方向，空投物资作等速运动，其速度就是飞机的速度 v_0，因此经过时间 t，空投物资沿水平方向移动的距离为

$$x = v_0t;$$

在铅垂方向，由于重力的作用，空投物资作自由落体运动，经过时间 t，空投物资下落的距离为

$$y = \frac{1}{2}gt^2,$$

其中 g 是重力加速度，这样，就得到描写空投物资运动过程的方程（物理上称为运动方程）

$$\begin{cases} x = v_0t, \\ y = \frac{1}{2}gt^2. \end{cases} \qquad (1)$$

当时间 t 取某一数值时，方程组（1）就给出了空投物资在这一时刻所在位置 M 的坐标 x 和 y．让 t 从 0 起连续增加，$M(x, y)$ 就从原点起连续变动，这样，动点 $M(x, y)$ 就描绘出空投物资运动的轨迹．因此方程组（1）就给出了所求的轨迹．

方程组（1）叫做空投物资运动的参数方程，t称为参数.

一般地，在直角坐标系中，如果曲线c上动点M的坐标x和y都可表示为另一个变量t的函数

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t). \end{cases} \quad (a\leqslant t\leqslant b) \qquad (2)$$

并且对于t的每一个值（$a\leqslant t\leqslant b$），由方程组（2）确定的点$M(x, y)$都在曲线c上，那末这个方程组（2）叫做曲线c的参数方程，t叫做参数.

在参数方程中消去参数t，所得到的仅含x和y的方程便是曲线的直角坐标方程.

例如：空投物资运动方程（1）消去参数t，便得

$$y=-\frac{g}{2v_0^2}x^2.$$

这就是空投物资运动轨迹的直角坐标方程.由这个方程可知，空投物资的轨迹是抛物线.

一般地，在用参数方程表示曲线时，选用的参数不一定是时间，应当根据问题的具体条件来选定.

例1 求圆心在原点、半径为r的圆的参数方程.

解： 设$M(x, y)$是圆上任意一点，取$\angle AOM=t$作参数（图15—2），则

$$\boxed{\begin{cases} x=r\cos t \\ y=r\sin t \end{cases}} \quad (0\leqslant t<2\pi)$$

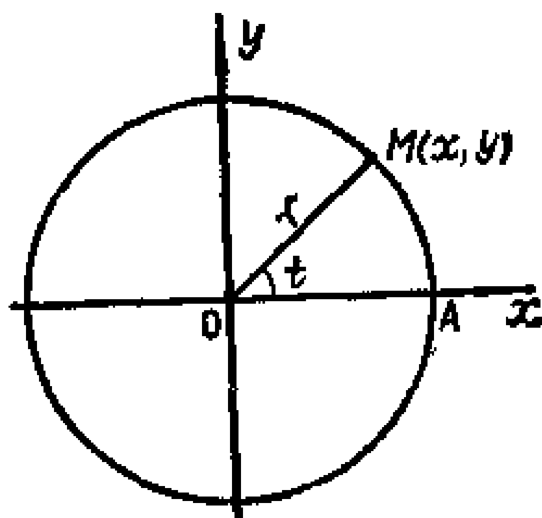


图15—2

这就是这个圆的参数方程.

容易验证，消去参数t，即得到圆的直角坐标方程

$$x^2+y^2=r^2.$$

例2 求椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$的参数方程.

解： 以原点O为圆心，分别以a, b为半径作两个同心圆（图15—3）.过圆心O任意引一条射线OR，它与两圆分别交于P、Q.过P引平行于x轴的直线，过Q引平行于y轴的直线，两直线相交于M点.让射线OR自x轴的正半轴开始按逆时针方向绕O点转动，那末M点便成为动点.我们来研究当OR转动一周，动点M的运动轨迹.

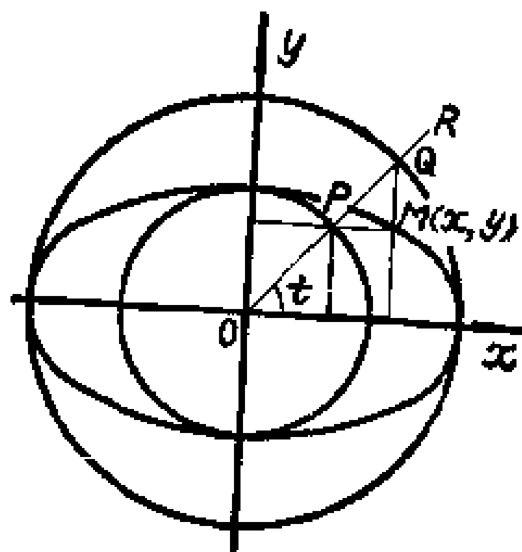


图15—3

因为在OR转动的过程中，动点M的横坐标与Q点的横坐标一样，动点M的纵坐标与P点的纵坐标一样，所以当动射线转过的角度为t时，M点的坐标为

$$\begin{cases}x=a\cos t,\\y=b\sin t.\end{cases}$$

当 t 变动时，上式所确定的动点 (x, y) 当然就是 M 点，因而该动点的轨迹就是 M 点的运动轨迹，上式也就是M点运动轨迹的参数方程。

我们来证明，M点的轨迹是椭圆。

事实上，由

$$\frac{x}{a}=\cos t, \qquad \frac{y}{b}=\sin t.$$

可得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

由此可知，椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的参数方程是

$$\boxed{\begin{cases}x=a\cos t\\y=b\sin t\end{cases}} \quad (0\leqslant t<2\pi)$$

其中参数 t 叫做椭圆上 M点的离心角．必须指出，**离心角不是OM和x轴的夹角。**

二、渐开线和摆线

齿轮是机械传动中应用最广泛的传动机构之一。齿轮的齿廓曲线（图15—4），多数采用渐开线，渐开线齿轮的优点是传动平稳。在钟表和精密仪表中，齿廓曲线往往采用摆线，摆线齿轮的优点是耐磨性强。

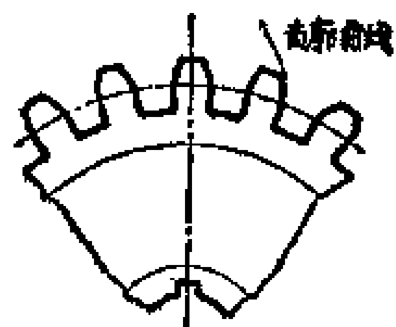


图15—4

下面分别介绍渐开线和摆线。

1.渐开线及其参数方程

什么叫做渐开线呢？我们做如下的实验。

把一根没有伸缩性的细绳绕在圆盘的圆周上，绳头的一端拴一支笔，拉紧细绳，并保持绳子与圆周相切，逐渐展开，笔尖在平面上画出的轨迹叫做渐开线，也叫做圆的渐伸线（图15—5），而这个圆周叫做渐开线的基圆．

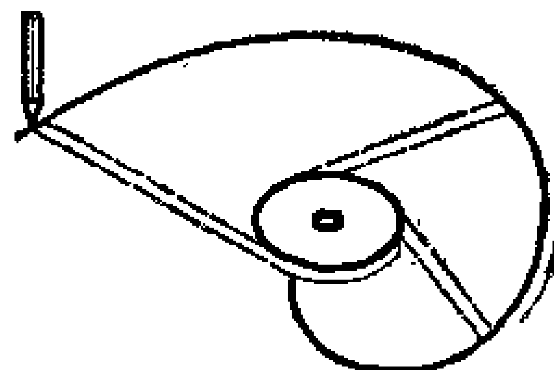


图15—5

现在推导渐开线的参数方程．设基圆的半径为 r．渐开线的起点为A．取基圆的圆心为坐标原点 O，通过 O和A的直线为 x 轴，建立直角坐标系（图15—6）．

设$M(x, y)$是渐开线上的任意一点，过M点作基圆的切线MN，N是切点，联结ON．取$\angle AON=t$（弧度单位）作参数．由渐开线的形成知道

$$MN=\overset{\frown}{AN}=rt.$$

作$MC\perp x$轴，$NB\perp x$轴，$MD\perp NB$，因而$\angle MND=\angle AON=t$，于是有

$$x=OC=OB+BC=OB+DM$$
$$=r\cos t+rt\sin t,$$
$$y=CM=BD=BN-DN=r\sin t-rt\cos t.$$

所以渐开线的参数方程是

$$\begin{cases}x=r(\cos t+t\sin t)\\y=r(\sin t-t\cos t)\end{cases}$$

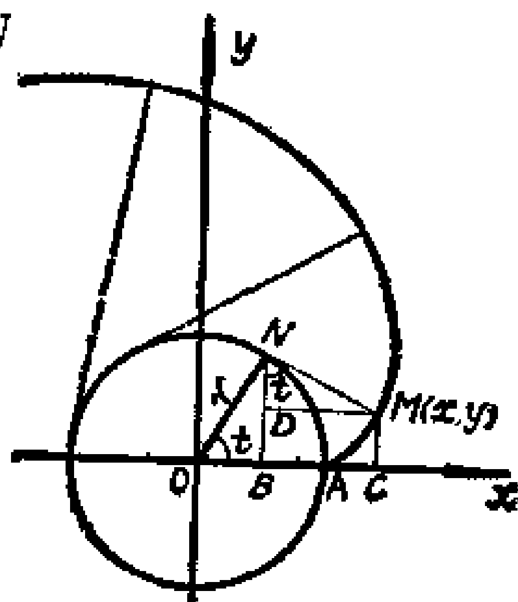


图15—6

2.摆线及其参数方程

一个圆在一条定直线上作无滑动的滚动时，圆周上一定点运动的轨迹叫做摆线（图15—7）.

例如，车辆沿直线行驶时，轮周上任一点的轨迹都是摆线，所以摆线也叫做旋轮线.

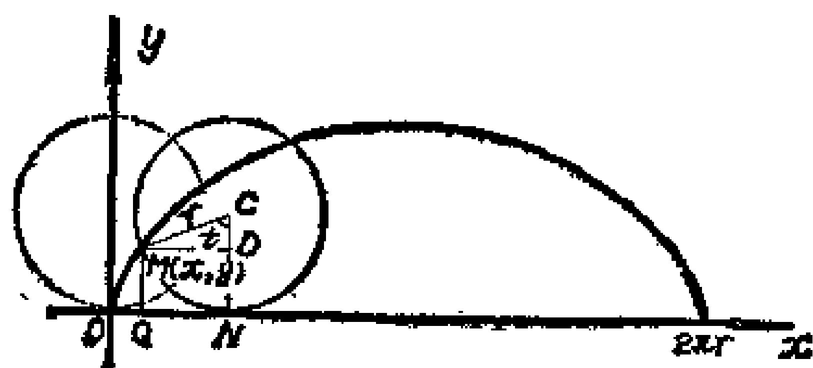


图15—7

下面推导摆线的参数方程．设动圆的半径为r，取定直线为x轴，圆滚动的方向为x轴的正向；圆在开始滚动时，圆周上的定点取作坐标原点，建立直角坐标系（图15—7）.

如图15—7所示，当圆上的定点从原点运动到点$M(x,y)$时，该圆与x轴相切于点N，取圆的滚动角$\angle MCN=t$（弧度单位）作参数.由摆线的形成知道

$$ON=\overset{\frown}{MN}=rt.$$

作$MD\perp CN$，$MQ\perp x$轴，于是有

$$x=OQ=ON-QN=ON-MD=rt-r\sin t,$$
$$y=QM=NC-DC=r-r\cos t.$$

所以摆线的参数方程是

$$\begin{cases}x=r(t-\sin t)\\y=r(1-\cos t)\end{cases}$$

当圆滚动一圈，即t从0变到2π时，M点就描出了摆线的第一拱，圆继续向前再滚动时，M点就描出了摆线的第二拱，第三拱…，可见摆线具有周期性.

由摆线的参数方程画出它的图形，一般采用描点法.

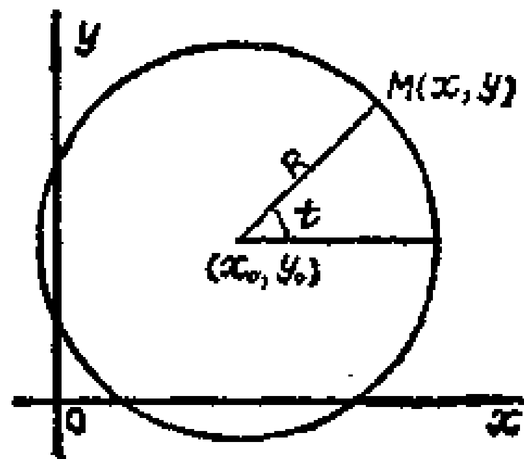
列表（设$r=1$）

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$	2π
x	0	0.08	0.57	1.65	3.14	4.63	5.71	6.20	6.28
y	0	0.29	1	1.71	2	1.71	1	0.29	0

以表格中每一组 (x,y) 作为点的坐标，描点，然后把各点连成光滑曲线.便画出了摆线第一拱的图形.

习　题

1.求半径为R，圆心在(x_0,y_0)的圆的参数方程.（提示：以图中之t为参数.）



（第1题）

2.把下列各参数方程化为直角坐标方程：

（1）$\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\sin t;\end{cases}$　　（2）$\begin{cases}x=at,\\ y=at^2;\end{cases}$

（3）$\begin{cases}x=x_0+at,\\ y=y_0+3at;\end{cases}$　　（4）$\begin{cases}x=5\cos t+2,\\ y=5\sin t-3;\end{cases}$

（5）$\begin{cases}x=a\cos t+3,\\ y=b\sin t-5.\end{cases}$

3.已知动点轨迹的参数方程为$\begin{cases}x=3-12t\\ y=-2+5t,\end{cases}$将其化为直角坐标方程，并求从时间$t=0$到$t=5$，动点所经过的路程.

4.动点M作直线运动，它在x轴和y轴方向的分速度分别为9和12（两个方向都是匀速的），并设$t=0$时，动点位于$(1,1)$，求动点运动的轨迹方程.

5.描出$\begin{cases}x=2t^2\\ y=3t-t^3\end{cases}$的图形.

第二节　极　坐　标

用两个数确定平面上一点位置的方法，除直角坐标之外，常用的另一种方法是极坐标法.在有些场合，极坐标法，能使问题研究起来更为方便.

一、极坐标系

在平面上取定一点O，从O点出发引一条射线Ox，并取定一个长度单位和计算角度的正向（通常取逆时针方向），这样就构成了一个极坐标系(图15—8). O点叫做极点，射线Ox叫做极轴.

在极坐标系中，平面上任意一点M（不在极点）的位置，可以用OM的长度ρ和让Ox按逆时针方向旋转，第一次转到OM位置时转过的角θ来确定(图15—8). ρ叫做M点极径，θ叫做M点的极角，ρ和θ叫做M点的极坐标，记作$M(\rho,\theta)$.

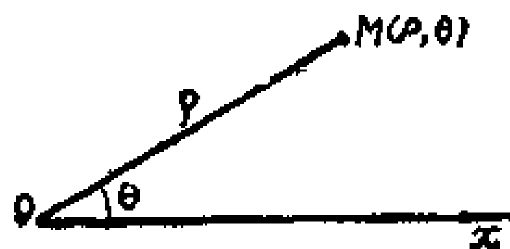


图15—8

根据上述规定，平面上任意一点M（不在极点）的极坐标ρ、θ满足：

$$\rho>0,\ 0\leqslant\theta<2\pi.$$

除了极点O之外，平面上任意一个点其极坐标是唯一确定的.至于极点，其极径$\rho=0$，其极角则可任意取值.

反之，每给一对数（ρ，θ）在平面上也可找到唯一的一个点.

因此，我们就在平面上的点（除极点外）与数对（ρ，θ）之间建立了一一对应关系：

$$\text{点}\rightleftharpoons(\rho,\ \theta),$$

其中$\rho>0$，$0\leqslant\theta<2\pi$.

在图15—9中，描出了$P_1\left(2,\ \dfrac{\pi}{6}\right)$、$P_2\left(1,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$、$P_3\left(2.5,\dfrac{3}{4}\pi\right)$各点.

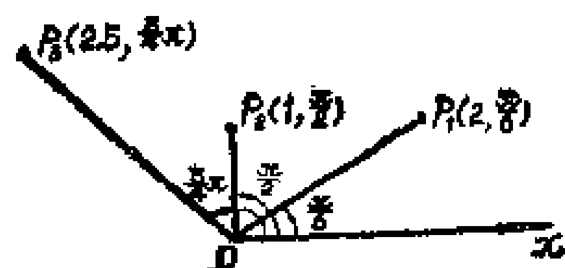


图15—9

如果取消$\rho>0$，$0\leqslant\theta<2\pi$的限制，便得到推广了的极坐标. 我们通过例子说明根据推广了的极坐标（ρ，θ）描点的方法.

例 在同一极坐标系内描出$P_1\left(5,\ \dfrac{13}{6}\pi\right)$、$P_2\left(3,\ -\dfrac{7}{6}\pi\right)$、$P_3\left(-5,\ \dfrac{\pi}{3}\right)$和$P_4\left(-4,\ -\dfrac{\pi}{2}\right)$各点.

解：（图15—10）.

（1）让Ox按逆时针方向绕O点旋转$\dfrac{13}{6}\pi$，在所转角的终边上取一点P_1，使$OP_1=5$，P_1点就是极坐标为$\left(5,\ \dfrac{13}{6}\pi\right)$的点；

（2）让Ox按顺时针方向绕O点旋转$\dfrac{7}{6}\pi$，在所转角的终边上取一点P_2，使$OP_2=3$，P_2点就是极坐标为$\left(3,\ -\dfrac{7}{6}\pi\right)$的点；

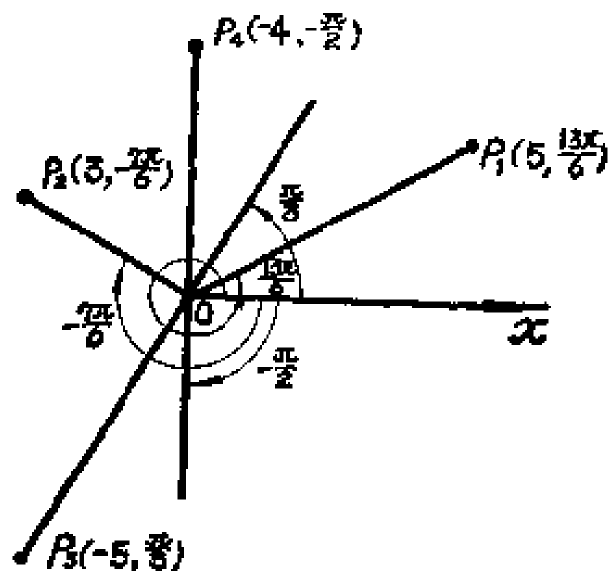


图15—10

（3）让Ox按逆时针方向绕O点旋转$\dfrac{\pi}{3}$，在所转角的终边的反向延长线上取一点P_3，使$OP_3=5$，P_3点就是极坐标为$\left(-5,\ \dfrac{\pi}{3}\right)$的点；

（4）让Ox按顺时针方向绕O点旋转$\dfrac{\pi}{2}$，在所转角的终边的反向延长线上取一点P_4，使$OP_4=4$，P_4点就是极坐标为$\left(-4,\ -\dfrac{\pi}{2}\right)$的点.

二、曲线的极坐标方程

和在直角坐标系中类似，在极坐标系中，平面上一条曲线可以用含有极坐标ρ和θ的方程来表示，这种方程叫做曲线的极坐标方程. 反过来，含有ρ和θ的方程在极坐标系中也表示一条曲线.下面讨论由曲线建立极坐标方程和由极坐标方程画出曲线的问题.

1.极坐标方程的建立

例1 求圆心在极点，半径为R的圆的极坐标方程（图15—11）.

解：设圆上动点M的极坐标为(ρ,θ). 这个圆的特征是，不论θ取什么数值，总有$\rho=R$，所以这个圆的极坐标方程是

$$\boxed{\rho=R}$$

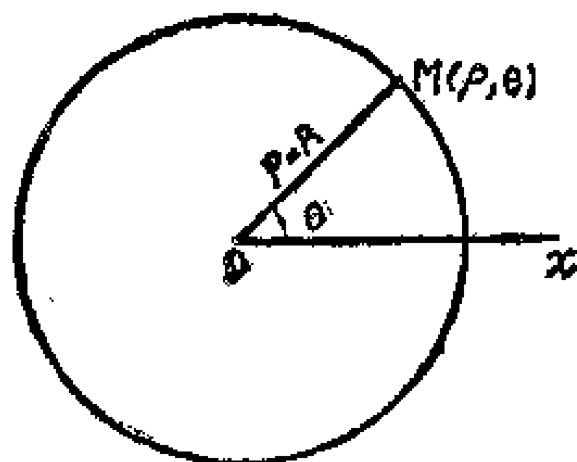


图15—11

例 2 求圆心在极轴上，半径为 R，并且经过极点的圆的极坐标方程（图15—12）.

解：设圆上动点M的极坐标为(ρ,θ)，圆和极轴交于A点，连结OM和MA.因为不论M点在圆周上什么位置，$\triangle AOM$总是直角三角形，所以有

$$\frac{OM}{OA}=\cos\theta.$$

已知 $OM=\rho$，$OA=2R$，因此得

$$\boxed{\rho=2R\cos\theta}$$

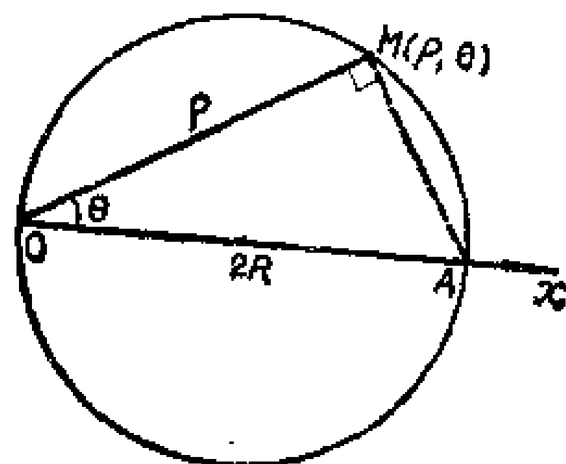


图15—12

这就是这个圆的极坐标方程.

2.极坐标方程的图形

和直角坐标系中画曲线图形的方法类似，已知曲线的极坐标方程，要画出它的图形，通常采用描点法.

例 3 画出极坐标方程$\rho=2(1+\cos\theta)$的图形.

解：如果(ρ,θ)满足这个方程，那末$(\rho,-\theta)$也必满足这个方程.这说明若点(ρ,θ)在曲线上，则点$(\rho,-\theta)$也在曲线上，但点(ρ,θ)与点$(\rho,-\theta)$是对称极轴的.所以该曲线对称于极轴.

列表：

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	π
ρ	4	3.7	3.4	3	2	1	0

以表格中每一组(ρ,θ)作为点的极坐标，描点，再把各点连成光滑曲线，就画出在极轴上方的图形（图15—13）.根据图形对称于极轴，可画出极轴下方的另一半图形，这样就得到$\rho=2(1+\cos\theta)$的图形.这条曲线叫做心形线，常用它作凸轮的轮廓线.

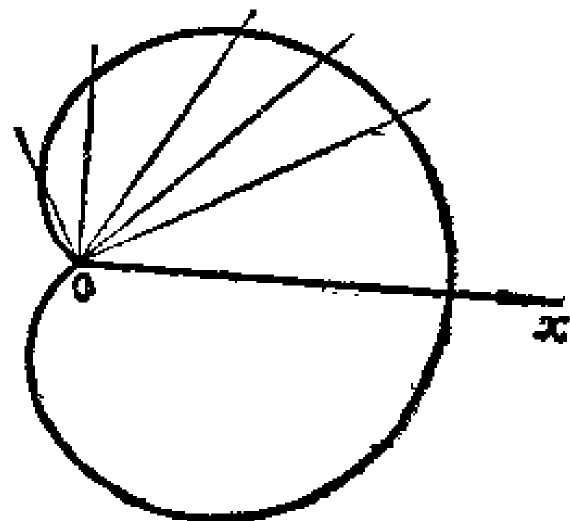


图15—13

三、等速螺线和凸轮

在机械传动机构中，常常利用凸轮把旋转运动变成直线运动．如图15—14，当凸轮绕定轴转动时，推动从动杆上下作往复直线运动．不同形状的凸轮，可以使从动杆上下作各种不同的往复直线运动．根据对从动杆运动的不同要求，需要对凸轮的轮廓线作不同的设计，这就要求出轮廓线的方程.

由图15—14可知，旋转中心 O到凸轮轮廓线的距离ρ 随着转角 θ 的变化而变化，我们把 ρ 叫做凸轮的向径．以O为圆心，最小向径$\rho=r$ 为半径所作的圆叫做凸轮的基圆．显然，当从动杆与凸轮的基圆那一段相接触时，它不作上下运动．

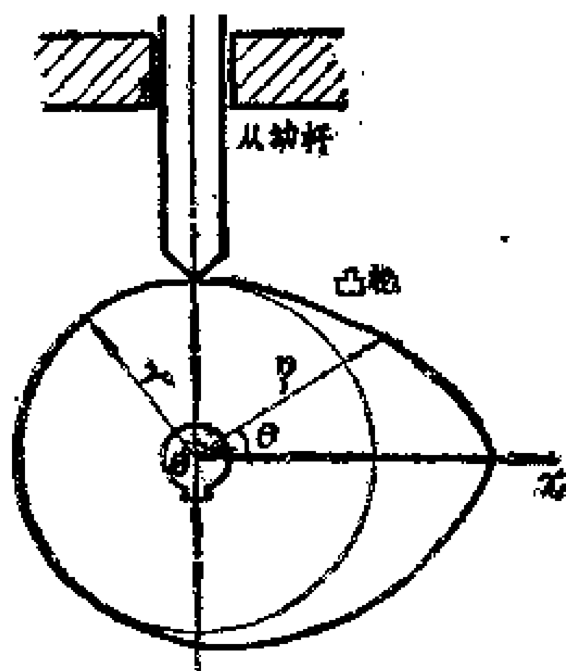


图15—14

机械传动中最常用的是等速凸轮，就是当凸轮作等角速旋转运动时，从动杆作等速直线运动，这种凸轮的工作部分的轮廓线叫做等速螺线，它的定义如下：

定义 设 l 是从 O 点出发的射线，动点M沿 l 作等速运动，而 l 又绕O 点作等角速转动，则M点的轨迹叫做等速螺线（或阿基米德螺线）．

现在来建立等速螺线的极坐标方程．取 O点为极点，以l的初始位置为极轴，建立极坐标系(图15—15)．

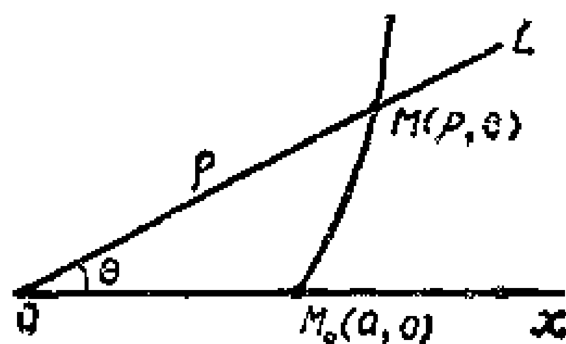


图15—15

设$M_0(a,0)$ 是动点M的初始位置，M在 l 上运动的速度为v，l 绕O点转动的角速度为ω，经时刻 t 后，l转过角度 θ，而动点到达位置$M(\rho,\theta)$．根据等速螺线的定义可知

$$\rho-a=vt,$$
$$\theta=\omega t.$$

在上面两式中消去t，得到

$$\rho-a=\frac{v}{\omega}\theta.$$

记$\frac{v}{\omega}=b$，得

$$\boxed{\rho=a+b\theta}\quad (a,b\text{是常数})$$

这就是等速螺线的极坐标方程．

为什么当凸轮的轮廓线采用等速螺线时，能把等角速转动变为等速直线运动呢？这是因为动点M从M_0出发沿等速螺线运动时（图15—15），它的极径的增加量与极角的增加量成正比，于是，只要凸轮以等角速转动，就能使从动杆作等速直线运动．

车床夹具三爪卡盘中，利用等速螺线可以使卡盘的三个爪同时伸缩，保证加工零件的中心始终位于卡盘的中心线上．

例1 在某种型号的缝纫机上，用桃形凸轮（图15—16）控制机件上下运动．这个凸轮一半推出，另一半缩回，且推出与缩回都是匀速的．已知基圆半径是16毫米，推程（最大推出距离）是30毫米，求桃形凸轮轮廓线的极坐标方程．

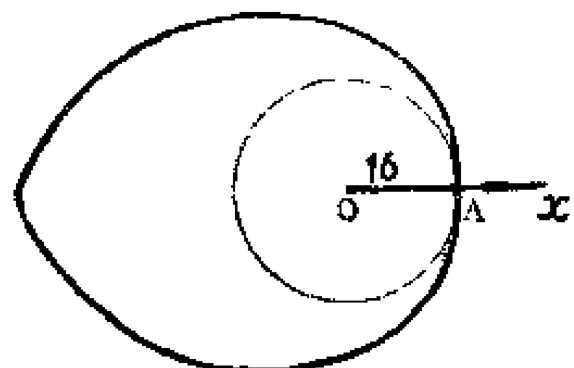


图15—16

解： 取基圆中心O为极点，过极点和起始点 A 的

射线为极轴，建立极坐标系（图15—16）.

因凸轮一半推出，一半缩回，而且推出与缩回都是匀速的，所以凸轮的轮廓线是两段等速螺线. 现在分别建立它们的极坐标方程.

设所求的等速螺线的极坐标方程是

$$\rho=a+b\theta.$$

(1) $0\leqslant\theta\leqslant\pi$一段为推出，且当$\theta=0$时，$\rho=16$；当$\theta=\pi$时，$\rho=16+30=46$. 代入方程，得

$$\begin{cases}16=a+b\cdot 0,\\ 46=a+b\cdot\pi.\end{cases}$$

解得 $$a=16,\quad b=\frac{30}{\pi},$$

$$\therefore\quad \rho=16+\frac{30}{\pi}\theta\ \ (0\leqslant\theta\leqslant\pi).$$

(2) $\pi\leqslant\theta\leqslant 2\pi$一段为缩回，且当$\theta=\pi$时，$\rho=46$；当$\theta=2\pi$时，$\rho=16$.代入方程，得

$$\begin{cases}46=a+b\cdot\pi,\\ 16=a+b\cdot 2\pi.\end{cases}$$

解得 $$a=76,\qquad b=-\frac{30}{\pi},$$

$$\therefore\quad \rho=76-\frac{30}{\pi}\theta\ \ (\pi\leqslant\theta\leqslant 2\pi).$$

例 2 作出等速螺线$\rho=10+2\theta$的图形.

解:

列表

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π	$\frac{5}{2}\pi$	3π
ρ	10	11.04	12.09	13.14	14.18	15.24	16.28	19.42	22.56	25.78	28.84

以表格中每一组(ρ,θ)作为点坐标，描点，再把各点连成光滑曲线，即为所求作的等速螺线（图15—17）.

四、极坐标和直角坐标间的关系

因为极坐标和直角坐标都是用以确定点的位置的，因此它们之间是互相联系的. 下面，我们来建立这两种坐标间的关系公式，并讨论曲线的极坐标方程和直角坐标方程的互化.

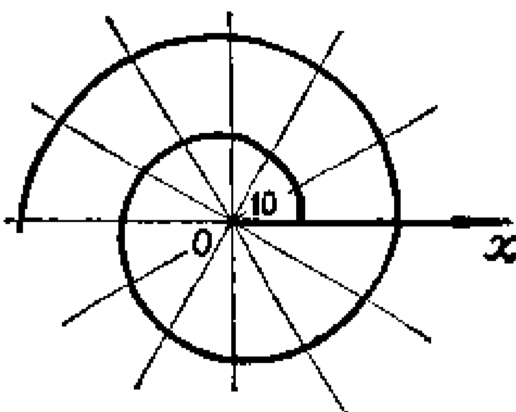


图15—17

如图15—18所示，在平面上同时建立直角坐标系和极坐标系，使直角坐标系的原点与极坐标系的极点相合，使x轴的正半轴与极轴Ox重合，并且规定面坐

标系有相同的单位长.如果在 $\rho>0$ ，$0\leqslant\theta<2\pi$ 的限制下，显然平面上任一点 M 的直角坐标 (x, y) 与极坐标 (ρ, θ) 间有下述两组关系：

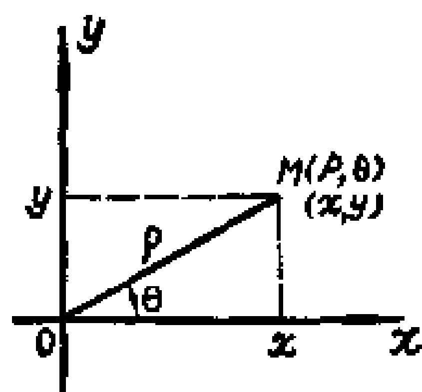


图15—18

$$x=\rho\cos\theta, \qquad y=\rho\sin\theta.$$

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}, \qquad \operatorname{tg}\theta=\frac{y}{x}.$$

根据第一组关系，我们可由点的极坐标算出其直角坐标；根据第二组关系，我们可由点的直角坐标算出其极坐标.

例1 已知 M_1、M_2 的极坐标分别为 $\left(2,\frac{\pi}{6}\right)$、$\left(4,\frac{5}{3}\pi\right)$（图15—19），试求出它们的直角坐标.

图15—19

解：（1）M_1 的直角坐标为

$$x=2\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}, \qquad y=2\sin\frac{\pi}{6}=1,$$

即 M_1 的直角坐标为 $(\sqrt{3},1)$.

（2）M_2 的直角坐标为

$$x=4\cos\frac{5}{3}\pi=2,$$

$$y=4\sin\frac{5}{3}\pi=-2\sqrt{3},$$

即 M_2 的直角坐标为 $(2,-2\sqrt{3})$.

例2 已知 M_1、M_2 的直角坐标分别为 $(1,\sqrt{3})$、$(-2,-2)$（见图15—20），试求出它们的极坐标.

解：（1）M_1 的极径 $\rho=\sqrt{1^2+\sqrt{3}^2}=\sqrt{4}=2$；$M_1$ 的极角满足 $\operatorname{tg}\theta=\frac{\sqrt{3}}{1}=\sqrt{3}$，从而得 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{4}{3}\pi$，但因 M_1 在第一象限内，故应取 $\theta=\frac{\pi}{3}$. 这样便得 M_1 的极坐标为 $\left(2,\frac{\pi}{3}\right)$.

（2）M_2 的极径 $\rho=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$；$M_2$ 的极角满足 $\operatorname{tg}\theta=\frac{-2}{-2}=1$，从而得 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{5}{4}\pi$，但因 M_2 在第三象限内，所以应取 $\theta=\frac{5}{4}\pi$. 这样便得到 M_2 的极坐标为 $\left(2\sqrt{2},\frac{5}{4}\pi\right)$.

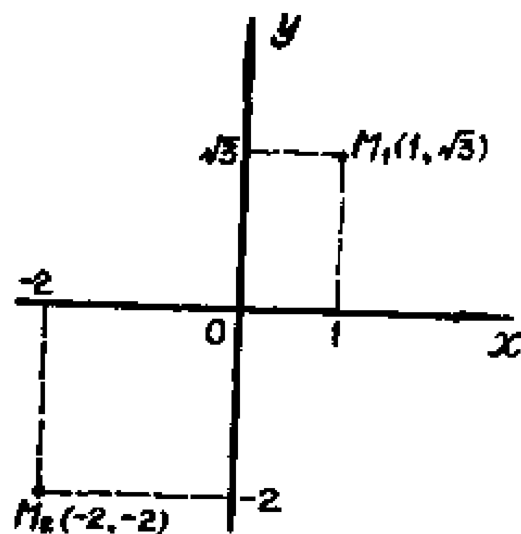


图15—20

例3 将圆心在点 $C(0,R)$，半径为 R 的圆的直角坐标方程化为极坐标方程（图15—21）.

解：这个圆的直角坐标方程是

$$x^2+(y-R)^2=R^2,$$

$$x^2+y^2-2Ry=0.$$

把 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$代入上式，得

$$\rho^2-2R\rho\sin\theta=0,$$

两端同除 ρ 并移项，得

$$\rho=2R\sin\theta.$$

这就是这个圆的极坐标方程。

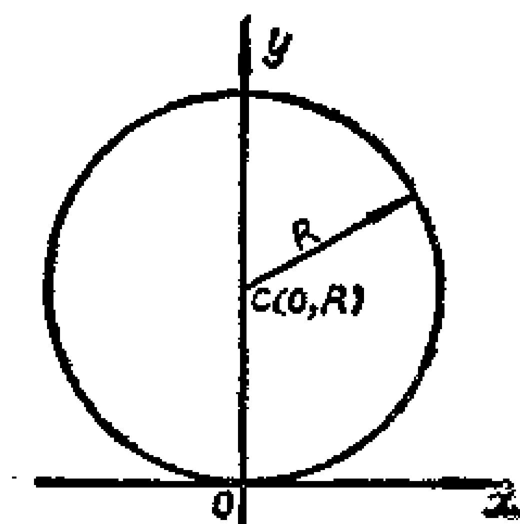


图15—21

例 4 将曲线的极坐标方程 $\rho=\dfrac{1}{1-\cos\theta}$ 化为直角坐标方程，并作图。

解：方程可化为

$$\rho-\rho\cos\theta=1.$$

把 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$， $\rho\cos\theta=x$ 代入上式，得

$$\sqrt{x^2+y^2}-x=1,$$

$$\sqrt{x^2+y^2}=1+x.$$

两端平方并化简，得

$$y^2=2\left(x+\frac{1}{2}\right).$$

这是一条抛物线，它的顶点在$\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$，对称轴是 x 轴（图15—22）。

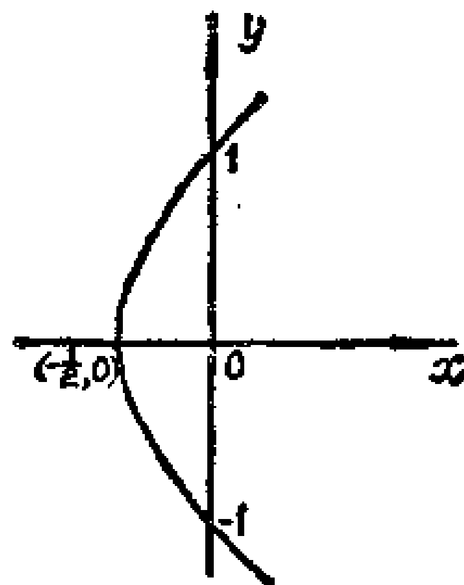


图15—22

例 5 求基圆半径为 r 的渐开线的极坐标方程。

解：如图15—23，以基圆的圆心 O 为极点，射线 OA（其中A 点是渐开线的起点）为极轴建立极坐标系。

设渐开线上任意一点M的极坐标为 (ρ,θ)。过 M 点作基圆的切线MN，N是切点。连结ON。取$\angle MON=\alpha$(弧度单位）为参数。由直角三角形OMN知道

$$\cos\alpha=\frac{ON}{OM}=\frac{r}{\rho},$$

$$\therefore\quad \rho=\frac{r}{\cos\alpha}.$$

由渐开线的形成知道

$$MN=\overset{\frown}{AN}=r(\alpha+\theta),$$

而在直角三角形OMN中，有

$$MN=r\operatorname{tg}\alpha,$$

$$\therefore\quad r\operatorname{tg}\alpha=r(\alpha+\theta),$$

即

$$\theta=\operatorname{tg}\alpha-\alpha.$$

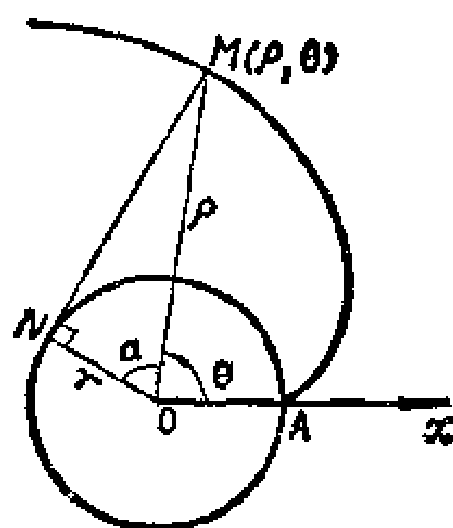


图15—23

于是得到渐开线的极坐标参数方程是

$$\begin{cases}\rho=\dfrac{r}{\cos\alpha}\\ \theta=\mathrm{tg}\alpha-\alpha\end{cases}\quad \left(0\leqslant\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$$

其中参数 α 叫做压力角，θ 叫做渐开角。

从上述方程组的第二个式子中看出，渐开角θ是压力角α的函数，这个函数叫做渐开线函数，记作$\mathrm{Inv}\alpha$，即

$$\mathrm{Inv}\alpha=\mathrm{tg}\alpha-\alpha.$$

渐开线函做在设计渐开线齿轮，及设计渐开线齿轮用的铣刀中，占有重要的地位。有专门的渐开线函数表供设计时查用。

习　题

1. 在同一极坐标系中描出下列各点：

$$P_1\left(2,\frac{\pi}{4}\right)、P_2\left(3,\frac{\pi}{3}\right)、P_3\left(4,\frac{\pi}{2}\right),\ P_4(1,0),P_5(3,\pi),P_6\left(3,\frac{5}{3}\pi\right).$$

2. 在同一极坐标系中描出下列各点：

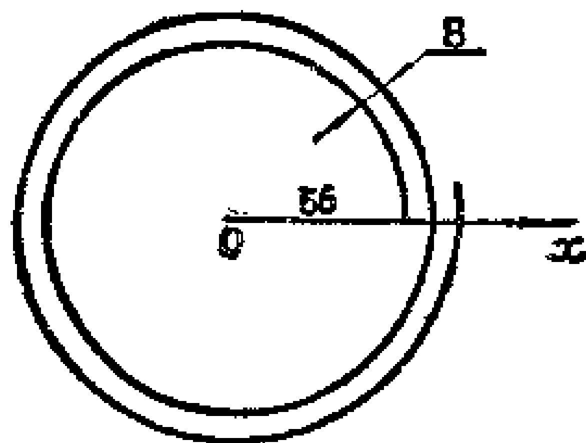
$$P_1\left(2,\frac{7}{3}\pi\right),P_2\left(-3,\frac{5}{6}\pi\right),P_3\left(2,-\frac{5}{6}\pi\right),P_4\left(-3,-\frac{9}{4}\pi\right).$$

3. 求圆心在点 $C\left(R,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，半径为$R$的圆的极坐标方程。

4. 画出下列极坐标方程的图形：

(1) $\rho=2\theta$;　　(2) $\rho=1-\cos\theta$.

5. 三爪卡盘上螺纹是等速螺线，如果螺纹上距中心最近的点到中心的距离是56毫米，两圈螺纹间的距离是8毫米。如按图形中所示，建立极坐标系，试写出这条螺纹的极坐标方程。



（第5题）

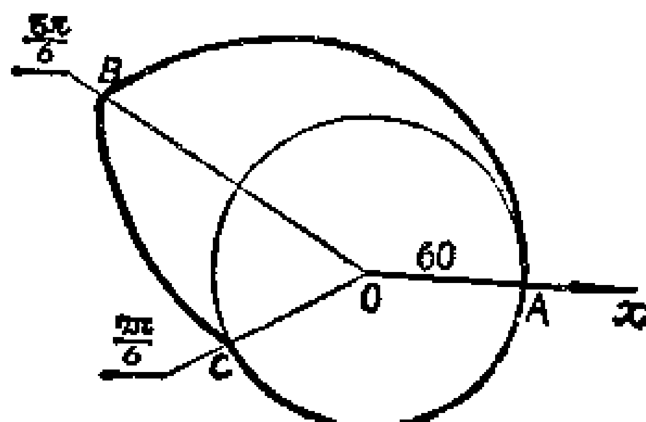
6. 设计一个基圆半径是60毫米的平面凸轮，提出如下的要求：

(1) 当凸轮转角θ从0增加到$\dfrac{5\pi}{6}$时，从动杆匀速推出60毫米；

(2) 当凸轮转角θ从$\dfrac{5\pi}{6}$增加到$\dfrac{7\pi}{6}$时，从动杆匀速缩回60毫米；

(3) 当凸轮转角θ从$\dfrac{7\pi}{6}$增加到2π时，从动杆保持在原始位置。

如按图形中所示，建立极坐标系，试求出曲线弧$\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{BC}$和$\overset{\frown}{CA}$的极坐标方程。



（第6题）

7.在平面上同时建立直角坐标系和极坐标系，使原点和极点相合，x轴的正半轴与极轴重合，并且选定相同的单位长．

（1）试根据下列各点的极坐标，求出其直角坐标：

$$P_1\left(2,\frac{\pi}{4}\right),\ P_2(3,\ \pi),\ P_3\left(5,\frac{4}{3}\pi\right),P_4\left(6,\frac{11}{6}\pi\right).$$

（2）试根据下列各点的直角坐标，求出其极坐标：

$$A(1,\sqrt{3}),\ B(-1,-\sqrt{3}),\ C(\sqrt{2},\ \sqrt{2}),\ D(1,-\sqrt{3}).$$

8.如前题，在平面上同时建立直角坐标系和极坐标系．

（1）试将下列曲线的极坐标方程化为直角坐标方程：

$$\rho=4,\ \rho=12\sin\theta,\ \rho\sin\theta=8,\ \rho\cos\theta=5\ ,\ \rho=\frac{1}{1-\cos\theta},$$

$$\rho=\frac{12}{2+\cos\theta},\ \rho=\cos\theta-\sin\theta,\ \rho=2\cos\theta+3\sin\theta,$$

$$\rho^2\sin2\theta=1,\qquad \theta=\frac{\pi}{4}.$$

（2）试将下列曲线的直角坐标方程化为极坐标方程：

$y=4,\ x^2+y^2=a^2,\ x^2+y^2=4x,\ x^2+y^2+2y=0,\ x-y=3,$

$x^2-y^2=4,\ \ y=x^2,\ \ x=y^2,\ \ y^2=4ax,\ \ x^2-x+y^2+y=0$．

9.已知渐开线的极坐标参数方程是

$$\begin{cases}\rho=\dfrac{10}{\cos\alpha},\\ \theta=\operatorname{tg}\alpha-\alpha.\end{cases}$$

求曲线上对应于$\alpha=0$，$\frac{\pi}{15}$，$\frac{2}{15}\pi$，$\frac{\pi}{5}$，$\frac{4}{15}\pi$，$\frac{\pi}{3}$的点的极坐标，并利用这些点描出渐开线的部分图形．

复　习　题

1.设炮弹从O点射出，射出时，其水平方向的初速为a，铅垂方向的初速为b，试求炮弹的运动轨迹．

2.设一质点运动时，其位置与时间t的关系为

$$x=a\cos^2Kt,\qquad y=b\sin^2Kt.$$

试求该质点运动轨迹的直角坐标方程，并作图．

3.一动点运动时，其位置与时间t的关系为

$$x=3+4\cos t,\qquad y=3\sin t.$$

试求其轨迹的直角坐标方程，并作图．

4.设在平面上同时建立了直角坐标系与极坐标系，且原点与极点重合，x轴之正半轴与极轴重合，两坐标系有相同的单位长度．

(1) 试将下列各曲线的直角坐标方程化为极坐标方程：

$x^2-y^2=20$, $4x^2+y^2=4$, $xy=7$, $(x^2+y^2)^2=4(x^2-y^2)$;

(2) 试将下列各曲线的极坐标方程化为直角坐标方程：

$\rho(5+3\cos\theta)=16$, $\rho^2\cos2\theta=-1$, $\rho(\sin\theta+2\cos\theta)=6$,

$\rho=4\sin2\theta$.

5. 求两曲线的交点：

(1) $\rho=2$与$\rho=4\sin\theta$; (2) $\rho=4(1+\cos\theta)$与$\rho(1+\cos\theta)=9$.

第五篇　微积分初步

第十六章　导数和微分

在介绍导数和微分之前，我们先介绍下什么是微积分，以及微积分所要解决的问题.

毛主席教导我们：**“一切真知都是从直接经验发源的。”**微积分是由于十七世纪初机械工业和其他生产的发展，人们在实践中需要研究变量而产生的一种数学方法．它在生产和科学技术中有广泛的应用.那末，什么是微积分呢？我们先来考虑往水池中放水的过程(图16—1)：当往水池中放水时，水一层一层地增多，水面不断升高，最后放满一池水．水池中的一层水和一池水有什么关系呢？一池水是一层一层水积累起来的．一层水是局部的量，一池水是整体量，而整体量正是局部量积累的结果.

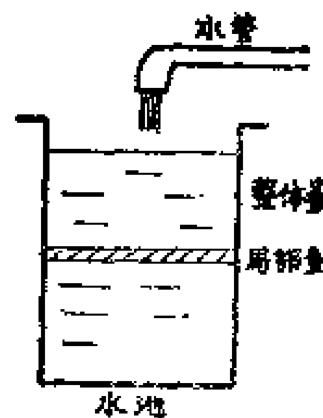
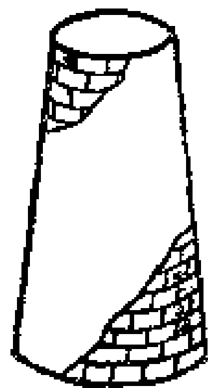


图16—1

在客观世界中，任何事物都是局部与整体的对立的统一．例如，工人师傅在砌烟囱时，总是一层一层地往上砌的，一层砖是个局部，整个烟囱便是个整体（图16—2）.


图16—2

微分就是数学上用来反映局部量的，而积分则是数学上用来反映整体量的．恩格斯曾用这样通俗的例子生动地说明过微积分：**“如果一杯水的最上面一层分子蒸发了，那末水层的高度 x 就减少了 dx，这样一层分子又一层分子地继续蒸发，事实上就是一个连续不断的微分。如果热的水蒸气在一个容器中由于压力和冷却又凝结成水，而且分子一层又一层地累积起来（在这里，我们必须把那些使过程变得不纯粹的附带情况撇开不谈），直到容器满了为止，那末这里就真正进行了一种积分”.**

从上述微积分的含意可以看出，微分是一个“化整为零”的过程，而积分则是“积零为整”的过程．微分使整体转化为局部，而积分则使局部转化为整体.

毛主席教导说：**“人类的历史，就是一个不断地从必然王国向自由王国发展的历史。”**人们对于自然界的认识，是一步又一步地由低级向高级发展的，即由浅入深，由片面到更多的方面.例如，人们认识几何图形，先是认识直线以及由直线构成的图形，如矩形、三角形等等，以后才逐步地认识曲线以及由曲线构成的图形，如圆、椭圆等等．同样，人们在量方面的认识，先是认识常量，如等速运动的速度，以后才逐步地扩大到认识变

量，如变速运动的速度．下面我们来说明，由直线到曲线和由常量到变量的变化带来了什么新问题，并由此指出微积分所要解决的问题．

1．由"直"到"曲"产生的新问题

例 1　计算斜面的斜率．

若斜面是"直"的（图16—3），则由三角知道，斜面上任一点 A 处的斜率可用公式

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{h}{l}$$

来表示．

如果斜面是"曲"的（图16—4），那么斜面上各点的斜率都不相同，因此点 A 处的斜率不能用上面的公式计算．怎样计算在点A处的斜率呢？它是研究"曲斜面"的局部性态问题，也就是微分所要解决的问题，通常叫做求曲线在A点的切线斜率．

例 2　平面图形的面积．

我们知道，如图16—5所示的矩形，它的面积可用公式

$$A=h\cdot l$$

表示．

如图16—6所示的图形叫做曲边梯形．曲边梯形的高是随底上点的变化而变化的，因此它的面积不能用矩形的面积公式计算．如何计算曲边梯形的面积呢？这是一个求整体量的问题，也就是积分所要解决的问题．

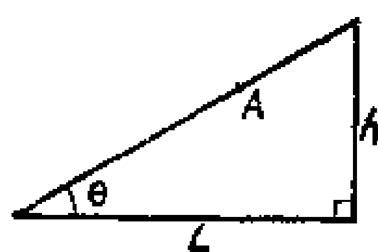


图16—3



图16—4

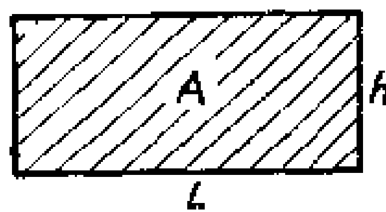


图16—5

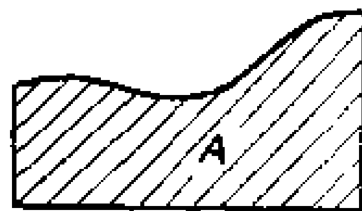


图16—6

2．由"常"到"变"产生的新问题

例 3　物体运动的速度．

在物理中学过，若一物体作等速运动，并已知在一段时间 t 内，它所经过的路程为 S，那么它的速度 v 可用公式

$$v=\frac{S}{t}$$

求得．

如果物体运动是变速运动，由于速度随时间变化而变化，因此不能套用求等速运动的速度公式来计算变速运动的速度．如何求变速运动在某一瞬时的速度呢？这是研究运动物体的局部性态问题，也就是微分所要解决的问题．

例4　物体运动的路程．

若一物体作等速运动，并已知速度为v，那么它在一段时间t内所经过的路程 S 可用

公式

$$S=v\cdot t$$

求得.

如果是变速运动，就不能照搬求等速运动的路程公式.如何计算变速运动在一段时间内经过的路程呢？这是一个计算整体的（即过程的）量的问题，也就是积分所要解决的问题.

毛主席指出：“**不同质的矛盾，只有用不同质的方法才能解决。**”上面所说的“直”与“曲”、“常”与“变”都是不同质的问题，“直”的和“常”的问题可以用初等数学的方法计算，而“曲”的和“变”的问题就不能用初等数学的方法来计算，微积分就是为了解决这类“直与曲”、“常与变”的矛盾而产生的数学方法.

正如上面所述，微积分的基本问题有两类：一类是微分问题，一类是积分问题．例1和例3中所提出的，求曲线在一点的切线斜率和求变速运动的速度是微分问题；例2和例4中所提出的，求曲边梯形的面积和求变速运动的路程是积分问题.

本章先介绍极限的概念，并说明极限是解决近似与精确这对矛盾的一种数学方法．接着，从实例出发阐明导数和微分这两个重要概念，并讨论微分法则．最后讲解导数在求函数的最大（小）值问题和近似计算中的应用.

第一节　极限和连续

一、极限的概念

毛主席教导我们：“**认识开始于经验——这就是认识论的唯物论。**”人们对于极限概念的认识，和对于其它事物的认识一样，都是在实践中认识的.

1.实例

钳工师傅用平锉加工圆形工件时，总是先粗锉成一个近似于圆的多边形，再用细锉把角锉去，锉的次数越多，工件形状随着多边形的边数增加而不断变化，并越来越趋向于圆（图16—7）．人们就是用实践中产生的这种方法，解决了求圆的周长和圆的面积问题.

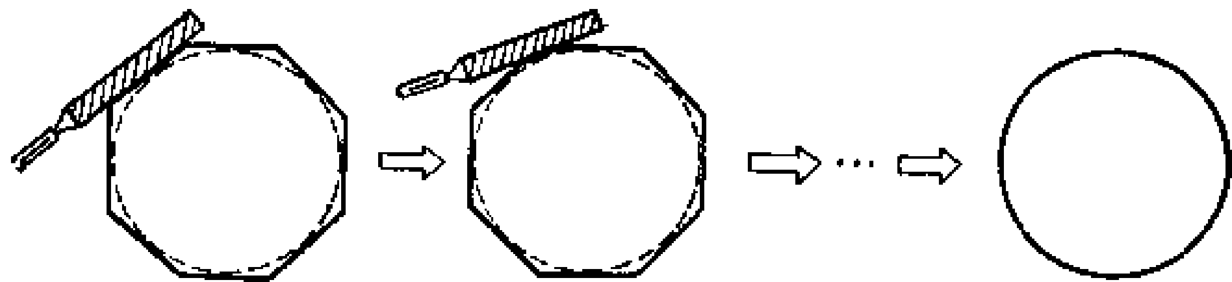


图16—7

下面我们从圆和圆的外切正多边形的关系入手，阐明极限的概念.

我们知道，半径为R的圆的面积等于πR^2．容易看出，当圆的外切正多边形的边数越多时，它的面积便越接近于圆的面积．如果以S_4表示圆的外切正方形的面积，S_5表示圆的外切正五边形的面积，一般地，以S_n表示圆的外切正n边形的面积，那末当n越

大时，S_n便越接近于圆的面积πR^2.但无论n是一个多么大的整数，S_n只是圆面积πR^2的近似值.即用S_n代替πR^2时总有误差.只有当n无限增大时，误差才能无限接近并最终消失为零，这时S_n便无限接近并最终等于常数πR^2.当n无限增大时，S_n无限接近并最终等于πR^2这一事实，我们叫做当n趋向正无限大时，S_n的极限是πR^2，或叫做当n趋向正无限大时，S_n趋向于πR^2，记作

$$\lim_{n\to+\infty} S_n=\pi R^2, \text{ 或 } \quad \text{当} n\to+\infty \text{时} \quad S_n\to\pi R^2.$$

式中"lim"为极限符号，读作"力米特".

圆的外切正n边形是由线段围成的直边图形，而圆是曲边图形.当边数n取定值时，圆的外切正n边形的面积S_n只能是圆面积的近似值，只有当$n\to+\infty$时，S_n才转化为圆面积的精确值πR^2. 这说明：极限方法是使"直"转化为"曲"；近似转化为精确的一种数学方法.

又如，设正弦电流的频率为f，线圈的电感为L，由电工学知：感抗$X_L=2\pi fL$，它有阻止电流通过线圈的作用. 从感抗X_L与频率f的关系可以看出，当频率f无限接近并且最终消失为零时，感抗X_L也就无限接近并且最终消失为零. 这时我们叫做当f趋向于零时，X_L的极限为零，或叫做当f趋向于零时，X_L趋向于零.记作

$$\lim_{f\to0} X_L=\lim_{f\to0} 2\pi fL=0,$$

或当$f\to0$时，$X_L\to0$.

我们知道，直流的频率等于零.所以，上式说明：直流通过线圈时没有感抗，即线圈对于直流来说是短路的.

2.函数的极限

从函数的观点来看，上述第一个实例中，S_n随着n的变化而变化，即S_n是n的函数. 当自变量n趋向正无限大时，函数S_n的极限是πR^2.在第二个实例中，感抗X_L是频率f的函数.当自变量f趋向于零时，函数X_L的极限是零.这两个实例虽然具有不同的内容，但它们却有一个共同的本质：当自变量按一定的变化趋势变化（越向于定数或趋向无限大）时，函数便趋于某个定数.

通过上述分析，我们可以概括出函数极限的定义：

定义 设函数$y=f(x)$，如果当自变量x趋向于定数x_0（或x趋向无限大）时，函数$f(x)$趋向于一个确定的常数A,那末A叫做函数$y=f(x)$当x趋向于x_0（或x趋向无限大）时的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A, \quad (\text{或} \lim_{x\to\infty} f(x)=A).$$

x趋向无限大有三种情况：x趋向正无限大记作$x\to+\infty$；x趋向负无限大，记作$x\to-\infty$；x趋向正、负无限大，记作$x\to\infty$.

例如 由第十章反正切函数的图象（图11—7）可知：

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x=\frac{\pi}{2}; \quad \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x=-\frac{\pi}{2}.$$

又如 $$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)=1,$$

这是因为当 $x\to\infty$（无论是正无限大还是负无限大）时，$\frac{1}{x^2}$无限接近并转化为零，所以这时$1+\frac{1}{x^2}$的极限是1。

3.无穷大量和无穷小量

无穷大量和无穷小量是函数变化趋势的两种特殊形式.

当x趋向于定数x_0（或x趋向无限大）时，如果函数$y=f(x)$趋向无限大，这时$f(x)$叫做无穷大量；如果函数$y=f(x)$趋向于零，这时$f(x)$叫做无穷小量.

例如：因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}=+\infty;\quad \lim_{x\to 0}\operatorname{ctg}x=\infty;\ \lim_{x\to 0}\ln|x|=-\infty,$$ 所以，当$x\to 0$时，$\frac{1}{x^2}$、$\operatorname{ctg}x$和$\ln|x|$都是无穷大量。

又如：因为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+x}=0;\quad \lim_{x\to+\infty}e^{-x}=0,$$

所以，当 $x\to\infty$时，$\frac{1}{1+x}$是无穷小量；当$x\to+\infty$时，e^{-x}是无穷小量。

必须指出：研究函数的变化趋势总是在自变量的一定的变化趋势下进行的．同一个函数，由于自变量的变化趋势不同，可以是无穷大量，也可以是无穷小量，或者以某个常数为极限.例如：

$$\lim_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty;\ \lim_{x\to+\infty}e^{-x}=0;\ \lim_{x\to 0}e^{-x}=1.$$

二、极限的运算法则

同数的运算一样，极限的运算也具有它的规律性.

设有两个函数$u(x)$和$v(x)$，在自变量x的一定变化趋势下，它们都有极限，即$\lim u(x)$和$\lim v(x)$都存在，那末有下述运算法则：

1. $$\boxed{\lim[u(x)\pm v(x)]=\lim u(x)\pm\lim v(x)}$$

即，和（或差）的极限等于极限的和（或差）.

2. $$\boxed{\lim[u(x)\cdot v(x)]=\lim u(x)\cdot\lim v(x)}$$

即，积的极限等于极限的积.

特别，当$u(x)=K$（常数）时，有

$$\lim[Kv(x)]=\lim K\cdot\lim v(x)=K\lim v(x)$$

这说明，常数因子可以提到极限号外面来.

3. $$\boxed{\lim\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{\lim u(x)}{\lim v(x)}\ (\text{当}\lim v(x)\neq 0\text{时})}$$

即，商的极限等于极限的商（当分母的极限不为零时）.

例1 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+\frac{1}{1+x}\right)$.

解: $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2+\frac{1}{1+x}\right)=\lim\limits_{x\to 0}x^2+\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1+x}=0+1=1$.

例2 求 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+1}{x+2}$.

解: ∵ 当$x\to 2$时，$x^2+1\to 5$，$x+2\to 4\neq 0$，

$$\therefore \quad \lim_{x\to 2}\frac{x^2+1}{x+2}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^2+1)}{\lim\limits_{x\to 2}(x+2)}=\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}.$$

例3 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-x}{x^2+1}$.

解: 当 $x\to\infty$时，分式中分子和分母都趋向无限大，它们的极限都不存在，所以不能直接应用商的极限运算法则.要计算这个极限，先用x^2同除分子和分母，得等式

$$\frac{3x^2-x}{x^2+1}=\frac{3-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}},$$

于是

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-x}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\frac{1}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$$

$$=\frac{3}{1}=3.$$

三、函数的连续性

客观世界中，许多运动和变化都是连续不断的.例如，气温是随时间的变化而连续变化的；又如，作自由落体运动的物体，在到达地面前，其下落的距离和速度是随时间的变化而连续变化的.这些现象在数学中的反映，就是函数的连续性.而连续性又与函数的增量有关.下面我们先介绍函数的增量.

1.函数的增量

例1 有一半径为30毫米的圆盘，加热后半径变为30.1毫米（图16—8），问圆盘的面积增加了多少?

解: 圆面积A是半径r的函数，即

$$A=\pi r^2.$$

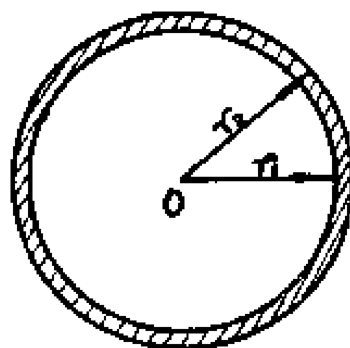


图16—8

半径r从$r_1=30$毫米增加到$r_2=30.1$毫米，差值r_2-r_1叫做半径r的增量，记作Δr（读作“德耳塔r”），即

$$\Delta r=r_2-r_1=30.1-30=0.1(\text{毫米}).$$

相应地，圆面积从$A_1=\pi r_1^2=\pi(30)^2$增加到$A_2=\pi r_2^2=\pi(30.1)^2$，差值 A_2-A_1叫做面积A的增量，记作ΔA，即

$$\Delta A = A_2 - A_1 = \pi r_2^2 - \pi r_1^2 = \pi(30.1)^2 - \pi(30)^2$$
$$= 6\pi = 18.8 \text{（平方毫米）}.$$

一般地，当半径从r变到$r+\Delta r$时，相应地圆面积的增量

$$\Delta A = \pi(r+\Delta r)^2 - \pi r^2 = \pi(r^2 + 2r\Delta r + \Delta r^2) - \pi r^2$$
$$= 2\pi r\Delta r + \pi\Delta r^2.$$

应当指出：增量可以是正的，也可以是负的．例如在上例中，当$\Delta r > 0$时，表示半径增大了，从而ΔA为正；当$\Delta r < 0$时，表示半径减小了，从而ΔA为负．

例 2 由物理学知：自由落体的运动规律为

$$S = \frac{1}{2}gt^2,$$

其中S表示下落的路程，t表示下落的时间，$g = 9.8$米/秒²表示重力加速度．试求时间t从$t_1 = 2$秒增加到$t_2 = 2.01$秒时，路程的增量.并求时间从t增加到$t+\Delta t$时，路程的增量．

解：时间t从$t_1 = 2$秒增加到$t_2 = 2.01$秒时的增量为

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 0.01 \text{（秒）},$$

相应地路程S的增量为

$$\Delta S = \frac{1}{2}gt_2^2 - \frac{1}{2}gt_1^2 = \frac{1}{2}g(2.01)^2 - \frac{1}{2}g2^2$$
$$= 21.6 - 19.6 = 2(\text{米}).$$

而当时间从t变到$t+\Delta t$时，相应地路程的增量

$$\Delta S = \frac{1}{2}g(t+\Delta t)^2 - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}g(t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2) - \frac{1}{2}gt^2$$
$$= gt\Delta t + \frac{1}{2}g\Delta t^2.$$

一般地，对于函数$y = f(x)$，当自变量从x变到$x+\Delta x$时，相应地函数从$f(x)$变到$f(x+\Delta x)$.我们把Δx叫做自变量的增量，把$f(x+\Delta x) - f(x)$叫做函数的增量，记为Δy，即

$$\boxed{\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)}$$

自变量的增量Δx和函数的增量Δy的几何图象如图16—9所示．

2.函数的连续性

由图16—9看出，如果函数$y = f(x)$的图象是一条连续不断的曲线.那末在任意取定一点x处，当Δx很小时，Δy也很小；当$\Delta x \to 0$时，Δy也趋向于零．这便是函数在一点处连续的实质．

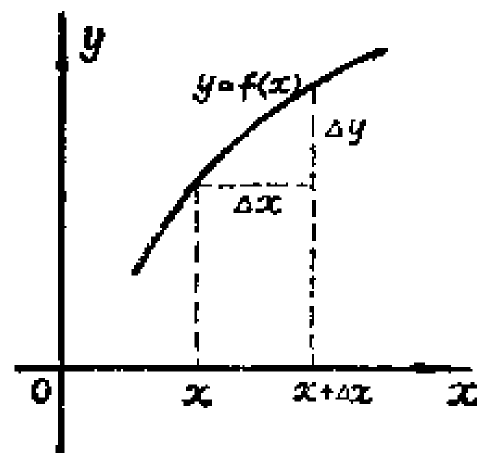


图16—9

定义 设函数$y = f(x)$在点x处，当自变量的增量Δx趋向于零时，函数的增量Δy也趋向于零，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}[f(x+\Delta x) - f(x)] = 0$$

那末就说函数$y = f(x)$在点x处是连续的．

例 证明函数$y=x^2$在点x处是连续的．

证明：当自变量的增量为Δx时，函数的增量为

$$\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2,$$

从而
$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}[2x\Delta x+(\Delta x)^2]=0.$$

所以，函数$y=x^2$在点x处是连续的．

如果函数$y=f(x)$在区间(a,b)内每一点都连续，就称这个函数在区间(a,b)内连续．可以证明：基本初等函数在其定义域内都是连续的．

如果函数$y=f(x)$所表示的曲线在某一点x_0处是断开的，我们就说函数$y=f(x)$在$x=x_0$处间断，x_0称为函数$y=f(x)$的间断点．

例如　函数$y=\frac{1}{x^2}$的图象如图16—10所示．当$x\to 0$时，$\frac{1}{x^2}$趋向无限大．从图上可以看出在$x=0$处，曲线断开了，所以$x=0$是间断点．

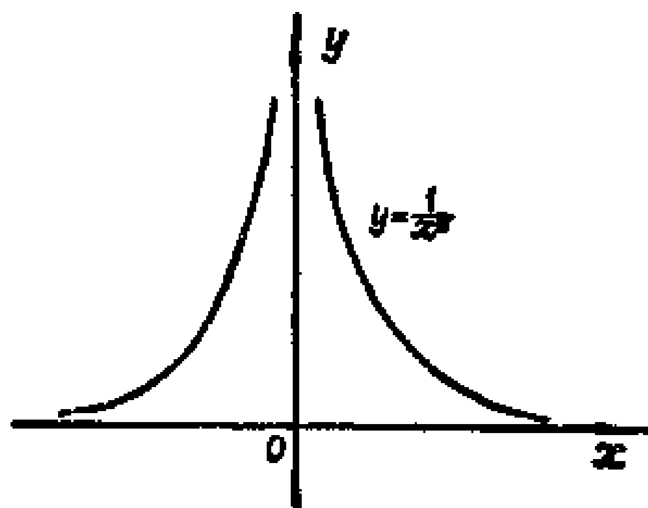


图16—10

习　题

1．仿照实例1叙述半径为R的圆的内接正多边形面积与圆面积πR^2之间的关系．

2．由电工学知：容抗$X_C=\frac{1}{2\pi fc}$，其中c是电容量．f是电流的频率．问对于直流电容抗如何？其物理意义是什么？

3．按照观察变化趋势的方法，指出下列极限值：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x^2}\right)$;　(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}$;　(3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+x}{3}$.

4．按照极限运算法则，求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\left(2x+\frac{1-x}{2}\right)$;　(2) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(\frac{3+x}{2}\right)\left(\frac{2-x}{3}\right)\right]$;

(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{2x^2-1}$;　(4) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{5x-1}{2x+3}$.

5．当$x\to 0$时，下列函数中那些是无穷大量？那些是无穷小量？

(1) $2x^2$;　(2) $\frac{x^2}{3}$;　(3) $\frac{1}{2x^2}$;　(4) $\frac{3}{x^2}$.

6. 设自变量 x 从 $x_1=1$ 变化到 $x_2=1.01$，求函数 $y=f(x)=2x^2-x$ 的增量。

7. 一物体作等速直线运动，它的路程 S 与时间 t 的函数关系是 $S(t)=2t+3$。

（1）计算时间 t 由 1 秒变化到 2 秒时，路程 S 的增量；

（2）当时间从 t 变到 $t+\Delta t$ 时，写出路程增量 ΔS 的表达式。

第二节　导数和微分的概念

一、导数的实例

1. 变速直线运动的速度

例 1　已知重物在地面附近自由下落的过程中，路程 S（米）与时间 t（秒）的函数关系是

$$S=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中 $g=9.8$ 米/秒^2 是重力加速度。求 t 时刻的瞬时速度 v。

解：（1）分析矛盾

我们知道，当物体作等速直线运动时，它的速度是不变的，我们可以按公式

$$\text{速度}=\frac{\text{路程}}{\text{时间}}$$

求出物体在任一时刻的速度。

但是，重物在自由下落的过程中，它的速度随着时间的变化而变化，因此不能直接按上述公式求 t 时刻的瞬时速度。这里我们遇到了速度"变"与"不变"的矛盾。

（2）解决矛盾

为了求 t 时刻的瞬时速度，先让 t 变到 t_1，即时间增量 $\Delta t=t_1-t$，相应的路程增量

$$\Delta S=\frac{1}{2}gt_1^2-\frac{1}{2}gt^2=\frac{1}{2}g(t+\Delta t)^2-\frac{1}{2}gt^2$$
$$=gt\Delta t+\frac{1}{2}g(\Delta t)^2.$$

当 Δt 很小时，在 t 到 t_1 这段时间内速度变化也很小，我们可以把它近似地看成是不变的，因此用 $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ 作为 t 时刻瞬时速度的近似值。$\frac{\Delta S}{\Delta t}$ 叫做 t 到 t_1 这段时间内的平均速度。当 Δt 越小时，即 t_1 越接近 t 时，$\frac{\Delta S}{\Delta t}$ 越接近于瞬时速度 v。但是，无论 t_1 怎样接近 t，只要 $\Delta t\neq 0$，$\frac{\Delta S}{\Delta t}$ 总是平均速度，而不会是瞬时速度的精确值。这样，便出现了近似与精确的矛盾。

如同第一节所述，上述矛盾可以通过取极限的方法来解决。为此，让 t_1 重新变回到 t，即 $\Delta t\to 0$，这时平均速度 $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ 便转化为瞬时速度 v，于是得

$$v=\lim_{t_1\to t}\frac{\Delta S}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{gt\Delta t+\frac{1}{2}g(\Delta t)^2}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\left(gt+\frac{1}{2}g\Delta t\right)=gt.$$

当 t_1 重新变回到 t 时，Δt 和 ΔS 都消失为零，这样一来，分式 $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ 变成了 $\frac{0}{0}$. 注意，这里分子消失为零始终依赖于分母消失为零，在消失为零的过程中，它们的比值最终被保留下来了，这就是

$$\frac{0}{0}=gt.$$

所以这里的 $\frac{0}{0}$ 有完全确定的含意.

如果将消失为零的 Δt 记作 dt，消失为零的 ΔS 记作 dS，那末有

$$\boxed{\frac{dS}{dt}=gt}$$

dS 叫做路程 S 的微分，dt 叫做时间 t 的微分. 路程微分 dS 与时间微分 dt 之商 gt 叫做路程对时间的导数，即速度就是路程对时间的导数.

2.交流电路中的电流强度

例 2　设有交流电流通过导线，从 0 到 t 这段时间内通过导线横截面的电量为

$$q=q(t).$$

求导线中 t 时刻的电流强度（简称电流）i.

解:（1）分析矛盾

我们知道，若导线中通过的是直流电流（恒定电流），则它的电流强度是不变的，我们可以按公式

$$\text{电流强度}=\frac{\text{电量}}{\text{时间}}$$

求出导线在任一时刻的电流强度.

现在，导线中通过的是交流电流，它的电流强度随着时间的变化而变化，因此不能直接按上述公式求 t 时刻的电流强度. 这里我们又遇到电流"变"与"不变"的矛盾.

（2）解决矛盾

为了求 t 时刻的电流强度. 先让 t 变到 t_1，即时间增量 $\Delta t=t_1-t$，相应的电量增量

$$\Delta q=q(t_1)-q(t)=q(t+\Delta t)-q(t).$$

当 Δt 很小时，在 t 到 t_1 这段时间内电流强度变化也很小，我们可以把它近似地看成是不变的. 因此可用 t 到 t_1 这段时间内的平均电流强度 $\frac{\Delta q}{\Delta t}$ 作为 t 时刻电流强度的近似

值.并且当Δt越小时，$\frac{\Delta q}{\Delta t}$越接近于$t$时刻的电流强度$i$. 但是，只要$\Delta t\neq 0$，$\frac{\Delta q}{\Delta t}$总是平均电流强度，而不会是$t$时刻的电流强度的精确值. 这里又出现了近似与精确的矛盾.

上述矛盾可以通过取极限的方法来解决. 为此，让t_1重新变回到t，即$\Delta t\to 0$，这时平均电流强度$\frac{\Delta q}{\Delta t}$便转化为$t$时刻的电流强度$i$，于是得

$$i=\lim_{t_1\to t}\frac{\Delta q}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta t}.$$

当t_1重新变回到t时，Δt和Δq都消失为零. 如果将消失为零的Δt记作dt，将消失为零的Δq记作dq，于是得

$$i=\frac{dq}{dt}$$

这里dq叫做电量的微分，电量的微分dq与时间的微分dt之商叫做电量对时间的导数. 上式表明，电流强度就是电量对时间的导数.

二、导数和微分的定义

毛主席教导我们："**人们总是首先认识了许多不同事物的特殊的本质，然后才有可能更进一步地进行概括工作，认识诸种事物的共同的本质。**"上面两个例子虽然实际意义不同，但是，从数量关系的角度来看，却有一个共同的本质：它们都是函数的增量与自变量的增量之比，当自变量增量趋向于零时的极限.

根据上述分析，我们可以概括出函数的导数（或变化率）的一般定义：

定义 设有函数$y=f(x)$. 让自变量从x变到x_1，即自变量的增量为$\Delta x=x_1-x$. 相应地函数的增量为

$$\Delta y=f(x_1)-f(x).$$

作函数增量与自变量增量之比

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}.$$

再让x_1变回到x，即$\Delta x\to 0$，$\frac{\Delta y}{\Delta x}$的极限叫做函数$y=f(x)$在$x$处的导数，记作$y'$或$f'(x)$，即

$$y'=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{x_1\to x}\frac{f(x_1)-f(x)}{x_1-x}$$

这时，我们也说函数$f(x)$在x处可导.

当x_1变回到x时，Δx和Δy都消失为零．这样一来，分式$\frac{\Delta y}{\Delta x}$变成了$\frac{0}{0}$．注意，这里分子消失为零始终依赖于分母消失为零，在消失为零的过程中，它们的比值最终被保留下来了，这就是

$$\frac{0}{0}=f'(x).$$

所以这里的$\frac{0}{0}$有完全确定的含意．

如果把消失为零的Δx记作dx，消失为零的Δy记作dy，那末就有

$$\frac{dy}{dx}=f'(x),$$

或
$$dy=f'(x)dx.$$

定义 设有函数$y=f(x)$，则$f'(x)dx$叫做函数的微分，记作dy或$df(x)$，即

$$\boxed{dy=f'(x)dx}\text{，或}\boxed{df(x)=f'(x)dx}$$

由微分的定义：$dy=f'(x)dx$可知，$f'_x(x)=\frac{dy}{dx}$，即导数等于函数的微分与自变量的微分之商，因此导数也叫做微商．

三、求导数举例

由导数的定义可知，求函数$y=f(x)$的导数y'或$f'(x)$，可以分以下三步：

（1）求增量：$\Delta y=f(x_1)-f(x)=f(x+\Delta x)-f(x)$；

（2）算比值：$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$；

（3）取极限：$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

例1 求函数$y=x^2$的导数．

解：（1）求增量：$\because\ f(x)=x^2,\quad \therefore\ f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)^2,$

$\therefore\ \Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2.$

（2）算比值：$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=2x+\Delta x.$

（3）取极限：$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x.$

即
$$(x^2)'=2x.$$

例2 求函数$y=\frac{1}{x}$的导数．

解：（1）求增量：$\because\ f(x)=\frac{1}{x}\qquad \therefore\ f(x+\Delta x)=\frac{1}{x+\Delta x},$

$$\therefore \quad \Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x - x - \Delta x}{x(x+\Delta x)} = -\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}.$$

（2）算比值：$\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \left(-\dfrac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}\right)\cdot\dfrac{1}{\Delta x} = -\dfrac{1}{x(x+\Delta x)}$.

（3）取极限：$y' = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[-\dfrac{1}{x(x+\Delta x)}\right] = -\dfrac{1}{x^2}$.

即

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

从例 2 的结果看到，对于不同的 x 值，求出的导数 $-\dfrac{1}{x^2}$ 也不相同，因此 $y' = -\dfrac{1}{x^2}$ 仍然是 x 的函数.一般地，函数 $y = f(x)$ 的导数 $y' = f'(x)$ 仍然是 x 的一个函数.我们把 $f'(x)$ 叫做 $f(x)$ 的导函数.

当 x 取某一确定的值 x_0 时，导函数也随着取一确定的值，这个值叫做函数 $f(x)$ 在 x_0 处的导数值（或叫做函数 $f(x)$ 在 x_0 处的导数），记作

$$f'(x_0) \text{或} \quad y'|_{x=x_0}.$$

例 3　设 $y = \dfrac{1}{x}$，求 $y'|_{x=2}$；$y'|_{x=-\frac{1}{2}}$.

解：由例 2 知　$y' = -\dfrac{1}{x^2}$，所以

$$y'|_{x=2} = -\frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4}; \qquad y'|_{x=-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = -4.$$

习　　题

1.当物体的温度高于周围介质的温度时，物体就不断冷却. 若物体的温度 T 与时间 t 的函数关系为 $T = T(t)$，怎样确定该物体在 t 时刻的冷却速度呢？

2.求函数 $y = x^3$ 的导数.

3.设 $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$，求 $f'(1)$.

第三节　微　分　法

由微分的定义可知，只要求出函数的导数，微分也就可写出来了. 所以求导数的法则叫做微分法.

下面讨论求导数的法则.

一、基本初等函数的导数

根据求导数的三个步骤，可以直接求出各基本初等函数的导数和微分.

1.常数的导数和微分

例1 求 $y=C$（常数）的导数。

解:（1）求增量：$\because\ f(x)=C$，$\quad\therefore\ f(x+\Delta x)=C$，

$\therefore\ \Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=0$。

（2）算比值：$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{0}{\Delta x}=0$。

（3）取极限：$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=0$。

即

$$\boxed{C'=0 \quad 或 \quad dC=0\cdot dx=0}$$

2.幂函数的导数和微分

例2 求 $y=\sqrt{x}$ 的导数.

解:（1）求增量：$\because\ f(x)=\sqrt{x}$，$\quad\therefore\ f(x+\Delta x)=\sqrt{x+\Delta x}$，

$\therefore\ \Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}$。

（2）算比值：$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\dfrac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}$（分子分母同乘 $\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}$）。

（3）取极限：$y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

即

$$\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}.$$

上一节我们已经计算过函数 x^2、x^3 和 $\dfrac{1}{x}$（即 x^{-1}）的导数，其结果分别是：

$$(x^2)'=2x;\ (x^3)'=3x^2;\ (x^{-1})'=-1x^{-2}.$$

一般地，对幂函数 $y=x^\alpha$，有

$$\boxed{(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1} 或 dx^\alpha=\alpha x^{\alpha-1}dx}$$

例如：

$$(x^5)'=5x^{5-1}=5x^4;$$

$$\left(\frac{1}{x^3}\right)'=\left(x^{-3}\right)'=-3x^{-3-1}=-3x^{-4}=-\frac{3}{x^4};$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x^3}}\right)'=\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)'=-\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}-1}=-\frac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}=-\frac{3}{2\sqrt{x^5}}.$$

以下的几个导数公式，仅写出结果，不加证明.

3.指数、对数函数的导数和微分

$$\boxed{\begin{array}{l}(e^x)'=e^x \text{ 或 } d(e^x)=e^x dx\\[2mm] (\ln x)'=\dfrac{1}{x} \text{ 或 } d(\ln x)=\dfrac{1}{x}dx\end{array}}$$

由此看出：指数函数e^x的导数等于它本身.

4.正弦、余弦函数的导数和微分

$$(\sin x)'=\cos x \qquad 或 d(\sin x)=\cos x dx$$

$$(\cos x)'=-\sin x \qquad 或 d(\cos x)=-\sin x dx$$

5.反三角函数的导数和微分

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad 或 d(\arcsin x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad 或 d(\arccos x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$(\mathrm{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2} \qquad 或 d(\mathrm{arctg} x)=\frac{1}{1+x^2}dx$$

$(\mathrm{arcctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$ 或 $d(\mathrm{arcctg} x)=-\frac{1}{1+x^2}dx$

二、导数的四则运算法则

1.函数和、差的导数

如果两个函数$u=u(x)$和$v=v(x)$都在x处可导，那末

$$(u\pm v)'=u'\pm v'$$

证明：设$y=u\pm v$.

（1）求增量：当自变量从x变到$x+\Delta x$时，u从u变到$u+\Delta u$，v从v变到$v+\Delta v$，因而y从$u\pm v$变到$(u+\Delta u)\pm(v+\Delta v)$．于是$y$的增量

$$\Delta y=[(u+\Delta u)\pm(v+\Delta v)]-(u\pm v)=\Delta u\pm\Delta v.$$

（2）算比值：

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}\pm\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

（3）取极限：

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\pm\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\pm\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=u'\pm v'$$

即 $$(u\pm v)'=u'\pm v'.$$

这个公式还可以推广到两个以上的函数的和、差中去.例如

$$(u\pm v\pm w)'=u'\pm v'\pm w'.$$

例1 求下列函数的导数：

（1）$y=\sin x+x^2$；（2）$y=\cos x-x+\ln x$；（3）$x=e^t-t^3-\ln 2$.

解：（1）$y'=(\sin x+x^2)'=(\sin x)'+(x^2)'=\cos x+2x$；

（2）$y'=(\cos x-x+\ln x)'=(\cos x)'-x'+(\ln x)'$

$$= -\sin x - 1 + \frac{1}{x};$$

(3) $x' = (e^t - t^3 - \ln 2)' = (e^t)' - (t^3)' - (\ln 2)'$

$= e^t - 3t^2 - 0 = e^t - 3t^2.$

2.函数乘积的导数

如果两个函数$u = u(x)$和$v = v(x)$都在x处可导，那末

$$(uv)' = u'v + uv'$$

证明从略.

特别是，当$u = C$（常数）时，上面的公式就简化为

$$(Cv)' = Cv'$$

这说明：求导数时常数因子可以提到导数记号外面去.

例 2 求下列函数的导数：

(1) $y = x\ln x$; (2) $y = e^x\cos x$;

(3) $x = 3te^t$; (4) $u = t\arcsin t$.

解：(1) $y' = (x\ln x)' = x'\ln x + x(\ln x)' = \ln x + 1$;

(2) $y' = (e^x\cos x)' = (e^x)'\cos x + e^x(\cos x)' = e^x(\cos x - \sin x)$;

(3) $x' = 3(te^t)' = 3[t'e^t + t(e^t)'] = 3e^t(1+t)$;

(4) $u' = (t\arcsin t)' = t'\arcsin t + t(\arcsin t)'$

$$= \arcsin t + \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}.$$

3.函数商的导数

如果两个函数$u = u(x)$和$v = v(x)$都在x处可导，那末

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}, \quad (v \neq 0)$$

证明从略.

特别是，当$u = 1$时，上式简化为

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}. \quad (v \neq 0)$$

例 3 求下列函数的导数：

(1) $y = \frac{e^x}{x}$; (2) $y = \operatorname{tg} t$; (3) $f(x) = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$,

并求 $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $f'(0)$.

解：(1) $y'=\left(\frac{e^x}{x}\right)'=\frac{(e^x)'x-e^xx'}{x^2}=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$；

(2) $\frac{dy}{dt}=(\text{tg}t)'=\left(\frac{\sin t}{\cos t}\right)'=\frac{(\sin t)'\cos t-\sin t(\cos t)'}{\cos^2 t}$

$$=\frac{\cos^2 t+\sin^2 t}{\cos^2 t}=\frac{1}{\cos^2 t};$$

(3) $f'(x)=\left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)'=\frac{(1-\cos x)'(1+\cos x)-(1-\cos x)(1+\cos x)'}{(1+\cos x)^2}$

$$=\frac{\sin x(1+\cos x)+(1-\cos x)\sin x}{(1+\cos x)^2}=\frac{2\sin x}{(1+\cos x)^2},$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2\sin\frac{\pi}{2}}{\left(1+\cos\frac{\pi}{2}\right)^2}=2,\qquad f'(0)=\frac{2\sin 0}{(1+\cos 0)^2}=0.$$

根据导数的四则运算法则，可以推导出微分的四则运算法则：

$$\boxed{\begin{aligned}&d(u\pm v)=du\pm dv,\\&d(uv)=vdu+udv,\\&d\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{vdu-udv}{v^2}.(v\neq 0)\end{aligned}}$$

例如，根据微分定义和两个函数乘积的导数公式可知

$$\begin{aligned}d(uv)&=(uv)'dx=(u'v+uv')dx\\&=vu'dx+uv'dx=vdu+udv.\end{aligned}$$

例 4　求$y=x+x^2\cos x$的微分。

解：∵　$y'=x'+(x^2\cos x)'=1+2x\cos x-x^2\sin x$，

∴　$dy=(1+2x\cos x-x^2\sin x)dx$

另解：由微分的四则运算法则，得

$$\begin{aligned}dy&=d(x+x^2\cos x)=dx+d(x^2\cos x)\\&=dx+\cos x d(x^2)+x^2d(\cos x)\\&=dx+2x\cos xdx-x^2\sin xdx\\&=(1+2x\cos x-x^2\sin x)dx.\end{aligned}$$

三、复合函数的求导法则

1.复合函数

函数 $y=\sin 2x$ 可以看成是把 $u=2x$ 代入函数 $y=\sin u$ 而得到的。$y=\sin 2x$ 叫做 $y=\sin u$和$u=2x$的复合函数，其中u叫做中间变量。

一般地，若$y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，则$y=f[\varphi(x)]$叫做$y=f(u)$和$u=\varphi(x)$的复合函数，u叫做中间变量.

例如　$y=\ln\sin x$可看成$y=\ln u$和$u=\sin x$的复合函数.

又如　$y=\sin^2(x^2+1)$可看成$y=u^2$，$u=\sin v$，$v=x^2+1$的复合函数.

2.复合函数的导数

如果函数$u=\varphi(x)$在点x处的导数是u'_x，且函数$y=f(u)$在对应点$u=\varphi(x)$处的导数是y'_u，那末复合函数$y=f[\varphi(x)]$在点x处的导数.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}\qquad \text{或}\ y'_x=y'_u\cdot u'_x$$

证明：当自变量x有增量Δx时，引起函数u有增量Δu，从而函数y有增量Δy.

由于
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x},$$

并且当$\Delta x\to 0$时，$\Delta u\to 0$，所以

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

例 1　求$y=\sin 2x$的导数.

解：函数$y=\sin 2x$可看成$y=\sin u$和$u=2x$的复合函数，于是

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=(\sin u)'_u\cdot(2x)'_x=\cos u\cdot 2=2\cos 2x.$$

例 2　求 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的导数，并求$y'|_{x=0}$.

解：函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 可看成 $y=u^{\frac{1}{2}}$，$u=1-x^2$的复合函数，于是

$$y'=(u^{\frac{1}{2}})'_u\cdot(1-x^2)'_x=\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$y'|_{x=0}=-\frac{0}{\sqrt{1-0^2}}=0.$$

在复合函数求导法则掌握得比较熟练以后，可以不必再写出中间变量，而直接求出复合函数的导数.

例 3　求下列函数的导数：

(1) $y=\operatorname{arctg}x^2$；　(2) $y=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$；　(3) $x=\sin^2\omega t$.

解: (1) $y'=\frac{1}{1+(x^2)^2}\cdot(x^2)'=\frac{2x}{1+x^4}$;

(2) $y'=-\frac{1}{2}(a^2-x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(a^2-x^2)'=\frac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$;

(3) $x'_t=2\sin\omega t(\sin\omega t)'=2\sin\omega t\cdot\cos\omega t\cdot(\omega t)'$
$=2\omega\sin\omega t\cos\omega t=\omega\sin2\omega t$.

有时我们还会遇到更为复杂的函数，它是由基本初等函数经过四则运算和复合步骤而成的.求这种函数的导数可综合运用各种求导法则.

例 4 求$y=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$的导数.

解:

$$y'=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}(x+\sqrt{x^2+a^2})'$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+a^2}+x}{\sqrt{x^2+a^2}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}.$$

习　　题

1.求下列函数的导数和微分:

(1) $y=x^7$;　(2) $y=\sqrt{x}$;　(3) $y=\left(\frac{1}{x}\right)^6$;

(4) $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$;　(5) $y=\cos\frac{\pi}{6}$;　(6) $s=\sin t$.

2.求下列函数的导数:

(1) $y=e^x-\sin x-\sqrt{3}$;　(2) $y=\frac{x^2-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$;

(3) $y=\cos t+t$;　(4) $s=\arcsin t-\frac{1}{t}+\ln3$.

3.设有三个函数$u=u(x)$、$v=v(x)$、$w=w(x)$，试证明

$$(uvw)'=u'vw+uv'w+uvw'.$$

4.求下列函数的导数:

(1) $y=\frac{x}{3}\arcsin x$;　(2) $y=x^2e^x$;

(3) $S=(1-t)\cos t$;　(4) $\rho=\sqrt{\theta}\sin\theta$.

5. 求下列函数的导数：

(1) $y=\frac{x^2+1}{x+1}$；　　(2) $y=\frac{\ln x}{x}$；

(3) $y=\frac{3}{1+x^2}$；　　(4) $x=\frac{\sin t}{\sin t+\cos t}$。

6. 求下列函数的导数值：

(1) $f(x)=x^2\sin x$，$f'(0)$及$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$；

(2) $s(t)=\frac{3}{5-t}+\frac{t^2}{5}$，$s'(0)$及$s'(4)$。

7. 求下列函数的导数：

(1) $y=\sqrt{4-x^2}$；　　(2) $y=\ln(1+x^2)$；

(3) $y=(2x+1)^3$；　　(4) $s=\sin^2(\omega t+\varphi)$ (ω、φ为常数)。

8. 求下列函数的导数：

(1) $y=e^{-2t}\cos 3t$；　　(2) $y=2e^{-\frac{t}{2}}+\ln\cos t$；

(3) $s=\ln(1-t^2)-e^{-t}+\frac{1}{1-t}$.

9. 一质点的运动规律是：$x=A\sin\omega t$，其中 t 表示时间，x 表示位移，A、ω是常数，求 $t=0$及 $t=\frac{\pi}{2\omega}$时的速度。

第四节　导数的应用

前边已讲过，导数可用来求变速直线运动的速度和交变电流的电流强度，下面再指出几点应用.

一、物理应用

例1　图16—11是一个纯电容电路，电容器极板上的电量 $q=Cu_C$，其中C为电容，u_C为极板间的电压. 设$u_C=U_m\sin\omega t$，求电路中的电流强度。

解：由导数概念知，电流强度

$$i=\frac{dq}{dt}=(CU_m\sin\omega t)'=CU_m\omega\cos\omega t=CU_m\omega\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right).$$

从上述结果看出：当 $t=0$ 时，电流的相位角为$\frac{\pi}{2}$，而电压的相位角为零. 这说明：纯电容电路中电流的相位角领先电压$\frac{\pi}{2}$弧度.

例2　曲柄连杆机构如图 16—12 所示. 当曲柄OC 绕 O 点以等角速度 ω 旋转时，连杆BC在OS轴上下摆动，求连杆摆动的角速度。

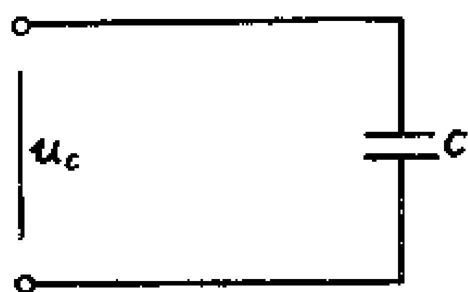


图16—11

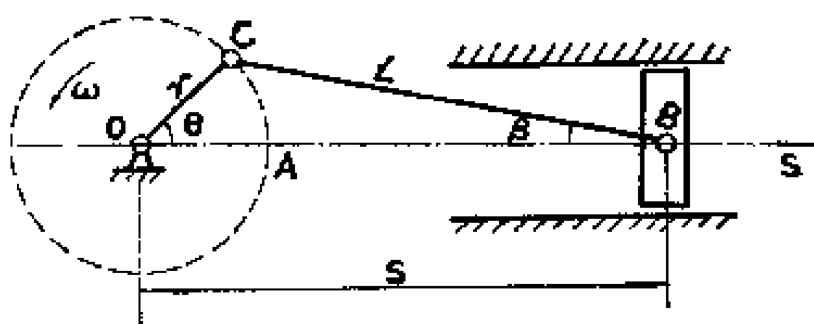


图16—12

解：设连杆与OS轴的夹角（称为摆角）为β，摆动的角速度就是$\frac{d\beta}{dt}$．因此，首先应该建立β和时间t的函数关系．

在三角形OBC中，运用正弦定理可得

$$\frac{r}{\sin\beta}=\frac{l}{\sin\theta},$$

从而得 $$\sin\beta=\frac{r}{l}\sin\theta.$$

令 $\lambda=\frac{r}{l}$，于是

$$\beta=\arcsin(\lambda\sin\theta).$$

由于$\theta=\omega t$，所以

$$\beta=\arcsin(\lambda\sin\omega t).$$

根据复合函数求导法则，可得连杆摆动的角速度

$$\omega_l=\frac{d\beta}{dt}=\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\omega t}}(\lambda\sin\omega t)'$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\omega t}}\lambda\omega\cos\omega t.$$

二、几何应用

图16—13中l是一条直线，其方程为

$$y=Kx+b.$$

由于y对x的导数为$\frac{dy}{dx}=(Kx+b)'=K=\text{tg}\alpha$.

由此可见，导数在几何上表示直线l的斜率．

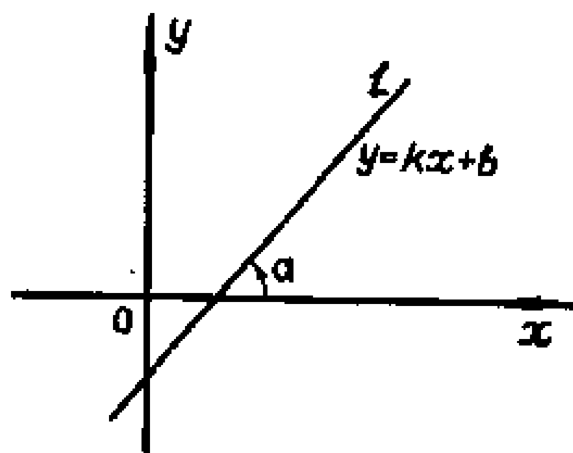


图16—13

我们知道，函数$y=f(x)$的几何意义是直角坐标系中的一条曲线（图16—14），那末在x_0处的导数$f'(x_0)$几何上表示什么呢？

在图16—14中，AT是曲线$y=f(x)$在点$A[x_0, f(x_0)]$处的切线，AB是曲线上通过A、B两点的割线．

∵ $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=CB$,

∴ $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{CB}{AC}=\mathrm{tg}\beta$.

即$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$表示割线$AB$的斜率.

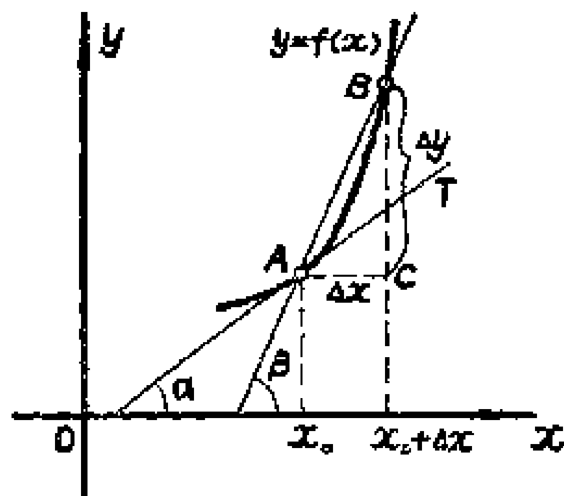


图16—14

由图16—14看出，当$\Delta x\to 0$时，B点沿曲线$y=f(x)$趋向于A点，这时割线AB转化为切线AT. 所以割线AB的斜率$\mathrm{tg}\beta$转化为切线AT的斜率$\mathrm{tg}\alpha$，即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\mathrm{tg}\alpha.$$

这说明，导数$f'(x_0)$在几何上表示曲线$y=f(x)$在点$A(x_0,f(x_0))$处的切线的斜率.

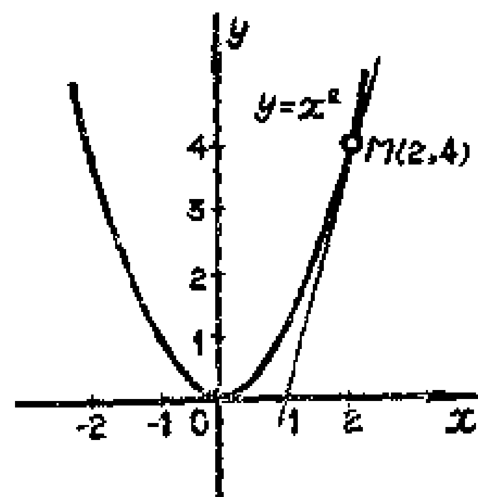


图16—15

根据直线的点斜式方程，可知曲线$y=f(x)$在点$A(x_0, f(x_0))$处的切线方程为

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$$

例1 求抛物线$y=x^2$在点$M(2,4)$处的切线方程(图16—15).

解： 因为$y'=2x$，$y'|_{x=2}=2\times 2=4$，所以，切线方程为

$$y-4=4(x-2),$$

即
$$y=4x-4.$$

设函数$y=f(x)$的图象如图16—16所示，从图16—16看出：在曲线上升的一段弧$\overset{\frown}{AB}$上，每一点处(不包括A点和B点)切线的倾角α都是锐角，因而切线的斜率

$$\mathrm{tg}\alpha=f'(x)>0,$$

其中x是区间(a, b)内任一点；在曲线下降的一段弧$\overset{\frown}{BC}$上，每一点处(不包括B点和C点)切线的倾角β都是钝角，因而切线的斜率

$$\mathrm{tg}\beta=f'(x)<0,$$

其中x是区间(b, c)内任一点.

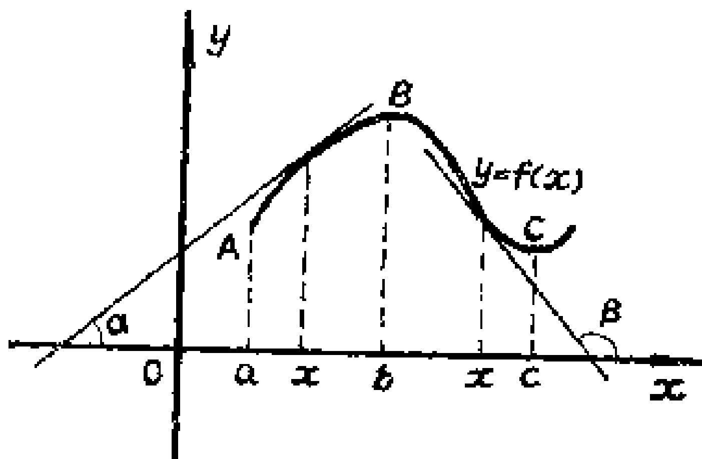


图16—16

反之，我们还可以运用导数的正负号来判定曲线的上升或下降，即函数的增减性：

(1) 在$f'(x)>0$的区间内，$y=f(x)$是增函数；

(2) 在$f'(x)<0$的区间内，$y=f(x)$是减函数.

例2 判定函数$y=e^{-x^2}$的增减性，并画出草图.

解： 因为导数

$$y'=e^{-x^2}(-2x)=-2xe^{-x^2},$$

因此，当$x<0$时，$y'>0$，所以函数$y=e^{-x^2}$在区间（$-\infty$，0）内是增加的；当$x>0$时，$y'<0$，所以函数$y=e^{-x^2}$在区间（0，$+\infty$）内是减小的.

由于对任一x，$y=e^{-x^2}>0$、$y|_{x=0}=1$、并且$y=e^{-x^2}$是偶函数，所以函数$y=e^{-x^2}$的图象在x轴的上方、通过$M(0,1)$、并且对称于y轴.

又因 $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x^2}=0$，所以当$|x|$愈来愈大时，函数$y=e^{-x^2}$的图象愈接近$x$轴.

这样，便可以画出函数$y=e^{-x^2}$的草图（图16—17）.

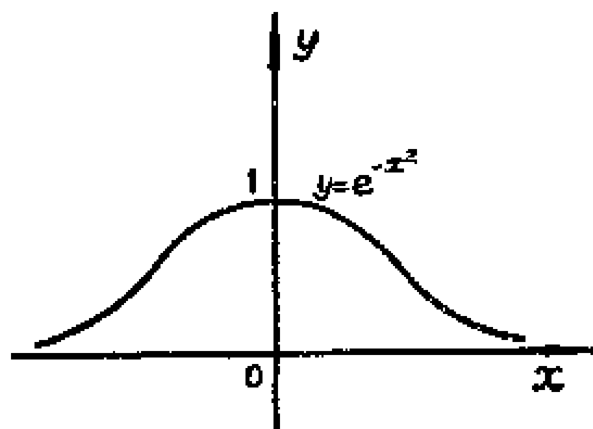


图16—17

三、最大值、最小值问题

在生产实践中，常常会遇到在一定的条件下，怎样使“材料最省”、“成本最低”、“效率最高”等问题.它们往往归结为求函数的最大值、最小值的问题.

怎样求函数的最大值、最小值呢？

设函数$y=f(x)$的图象如图16—18所示，由图可见，在区间$[a、b]$上，函数$y=f(x)$在点x_0处取最大值$f(x_0)$.在点x_0处，曲线的切线平行于x轴，所以$f'(x_0)=0$.

同样，由图16—19看出，在区间$[a,b]$上，函数$y=f(x)$在点x_0处取最小值$f(x_0)$.在点x_0处，曲线的切线平行于x轴，所以$f'(x_0)=0$.

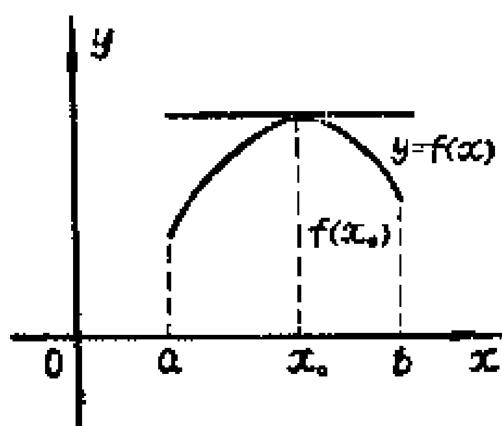


图16—18

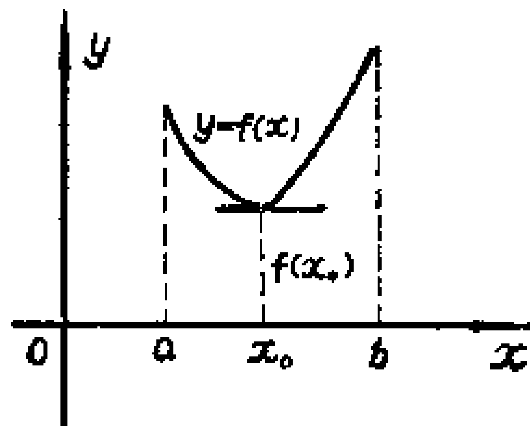


图16—19

因此，求函数的最大值、最小值，只要求出导数为零的点（叫做驻点）就可以了.

根据以上分析，求最大值、最小值的问题，可分以下两步：

（1）分析实际问题，建立函数关系$y=f(x)$；

（2）求出函数$y=f(x)$的导数$f'(x)$，并令$f'(x)=0$，解此方程，求出驻点x_0.那末$f(x_0)$就是最大值或最小值.

例1 设有一块正方形铝板，边长为48厘米，从四个角各截去一个相等的小正方形，做成一个无盖铝盒（图16—20）.问截去的小正方形的边长为多少时，做成的铝盒容积最大？

解：（1）建立函数关系.

根据题意，应建立铝盒的容积与截出的小正方形边长之间的函数关系.

设截去的小正方形的边长为x厘米，那末铝盒的底是边长为$48-2x$的正方形，高为

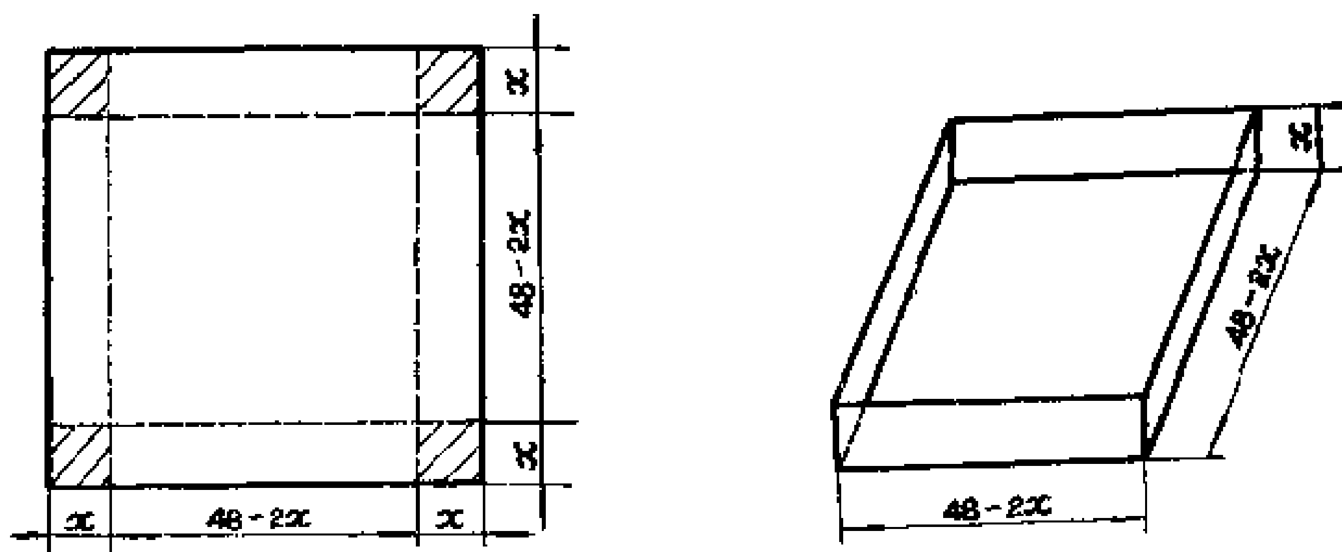


图16—20

x，铝盒的容积

$$V=x(48-2x)^2,\ (0<x<24).$$

（2）求驻点．

因为 $\frac{dV}{dx}=(48-2x)^2-4x(48-2x)$

$$=(48-2x)(48-2x-4x)$$

$$=(48-2x)(48-6x),$$

令 $\frac{dV}{dx}=0$，即 $(48-2x)(48-6x)=0$，解得驻点 $x=8$；$x=24$．$x=24$ 不合题意，应舍去，因此当 $x=8$ 时，V 取最大值．

答： 当截去的小正方形边长为8厘米时，铝盒的容积最大．

例 2 在图16—21所示的电路中，设直流电源的电动势为 E，内阻为 r，问当负载电阻 R 等于多少时，负载所获得的功率最大？

解：（1）建立函数关系．

根据题意，应建立负载所获得的功率 P 与负载电阻 R 之间的函数关系．

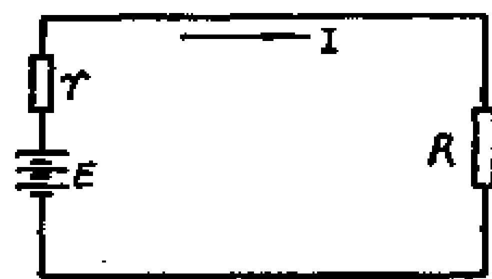


图16—21

设电路的电流为 I，由电学知识可知

$$P=I^2R.$$

又根据闭合回路的欧姆定律，得

$$I=\frac{E}{R+r}.$$

于是就得到功率 P 与电阻 R 的函数关系：

$$P=\left(\frac{E}{R+r}\right)^2R.$$

（2）求驻点．

因为 $$\frac{dP}{dR}=E^2\left[\frac{R}{(R+r)^2}\right]'=E^2\left[\frac{(R+r)^2-2R(R+r)}{(R+r)^4}\right]$$

$$=E^2\cdot\frac{r-R}{(R+r)^3}.$$

令 $\frac{dP}{dR}=0$，即 $\frac{E^2}{(R+r)^3}(r-R)=0$，从而解得驻点 $R=r$。

答：当负载电阻 R 等于电源内阻 r 时，负载获得的功率最大。

当 $R=r$ 时，这叫做阻抗匹配．根据这种阻抗匹配的原理，在收音机中必须使喇叭的电阻 R 等于电路的内阻 r，这时才能使喇叭有最大的响声。

四、近似公式与近似计算．

由导数的定义知道：函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

如果去掉极限号，则有近似等式，

$$f'(x_0)\approx\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

即 $$f(x)-f(x_0)\approx f'(x_0)(x-x_0),$$

或 $$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

当 x 越接近 x_0 时，近似程度越好．

特别是，当 $x_0=0$ 时，则得

$$\boxed{f(x)\approx f(0)+f'(0)x}$$

其中 $|x|$ 要很小．

根据上面的一般公式，当 $|x|$ 很小时，可推出下面几个常用的近似公式：

$\sin x\approx x$（x 用弧度单位）；$\mathrm{tg}\,x\approx x$（x 用弧度单位）；

$\ln(1+x)\approx x$；$e^x\approx 1+x$；$\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{1}{2}x$.

现在以 $\sin x\approx x$ 为例说明推导出这些近似公式的方法。

设 $f(x)=\sin x$，则 $f'(x)=\cos x$．因为

$$f(0)=\sin 0=0、f'(0)=\cos 0=1,$$

代入一般公式，即得

$$\sin x\approx 0+1\cdot x=x.$$

上面五个近似公式尽管具体内容不同，但都有共同点，那就是：公式的左端是复杂的函数，而公式的右端均为简单的线性函数．因此，近似公式的几何意义是：当 $|x|$ 很小时，可以用直线代替曲线，从图16—22看出，当 $|x|$ 很小时，确实可以用 $y=x$ 代替 $y=\sin x$.

图形还告诉我们，运用公式$\sin x\approx x$时，$|x|$很小的条件是必要的. 这种在局部上用直线代替曲线的作法，常常会使复杂的问题得到简化. 这叫做局部线性化.

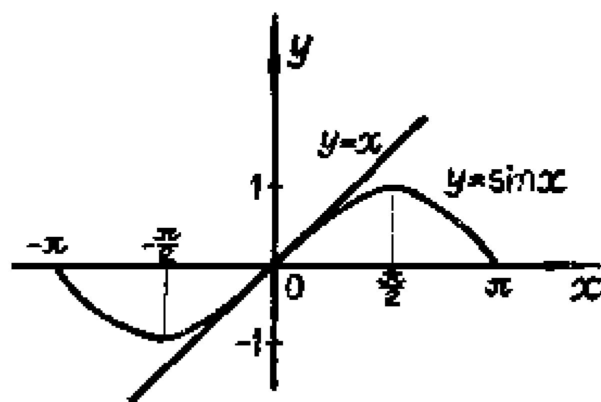


图16—22

根据五个近似公式，可以进行一些数值的近似计算.

例 1 求$\sin 3°$、$e^{0.01}$的近似值.

解： 因为$3°=3\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{3.14}{60}=0.0523$(弧度)，应用近似公式$\sin x\approx x$，得

$$\sin 3°=\sin 0.0523\approx 0.0523.$$

在近似公式$e^x\approx 1+x$中选取$x=0.01$，即得

$$e^{0.01}\approx 1+0.01=1.01.$$

例 2 求$\sqrt{82}$的近似值.

解： 因为$\sqrt{82}=\sqrt{81+1}=\sqrt{81\left(1+\frac{1}{81}\right)}=9\sqrt{1+\frac{1}{81}}$，选取$x=\frac{1}{81}$，应用近似公式：$\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{1}{2}x$，得

$$\sqrt{82}=9\sqrt{1+\frac{1}{81}}\approx 9\left(1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{81}\right)=9+\frac{1}{18}=9.055.$$

例 3 车工师傅在加工锥形工件时，要计算斜角α(图16—23). 当α很小时，常用公式

$$\alpha\approx 28.6°\frac{D-d}{l}$$

来计算，试证明这个近似公式.

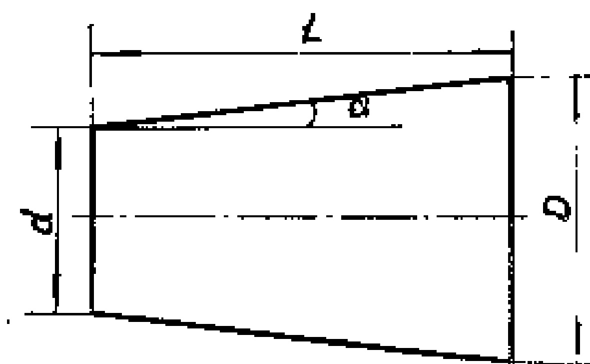


图16—23

证明：由图16—23可知，当α很小时，有

$$\alpha\approx \operatorname{tg}\alpha=\frac{D-d}{2l}\text{（弧度）}.$$

因为 1弧度$=\frac{180°}{\pi}=57.3°$，所以

$$\alpha\approx 57.3°\frac{D-d}{2l}\approx 28.6°\frac{D-d}{l}.$$

例 4 在电阻电容串联电路（图16—24）中，当开关K合上时，直流电源对电容器充电. 电容器上电压的变化规律为

$$u_C(t)=E\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right),$$

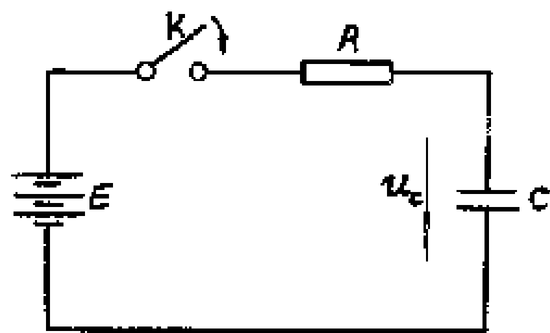


图16—24

证明当电阻R与电容C的乘积很大而时间t不大时，$u_C(t)$可以用时间t的线性函数近似表示，即

$$u_C(t)\approx \frac{E}{RC}t.$$

证明：根据公式

$$e^x\approx 1+x,$$

取 $x=-\frac{t}{RC}$，由于 $|x|=\frac{t}{RC}$ 很小，所以

$$e^{-\frac{t}{RC}}\approx 1+\left(-\frac{t}{RC}\right)=1-\frac{t}{RC},$$

从而，得

$$u_C(t)=E\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right)\approx E\left[1-\left(1-\frac{t}{RC}\right)\right]$$

$$=\frac{E}{RC}t.$$

习　题

1. 将一物体自地面用初速度v_0竖直向上抛，则物体开始上升，求上升过程中的速度和上升的最大高度。

2. 若物体作直线运动时的路程 S 随时间 t 变化而变化的规律为$S=S(t)$，根据导数的概念怎样求加速度？若运动规律为 $S=2t^2-3t$(S的单位为米，t 的单位为秒)．求 $t=1$ 秒时的速度和加速度。

3. 有一电动机的转动规律为 $\varphi=\varphi_0+\frac{\omega_0}{K}(t-e^{-kt})$，其中 φ 表示转动的角度、t 表示时间，而初始角φ_0、初始角速度ω_0、K均为常数，求电动机的角速度。

4. 本节四例 4 指出充电过程中电容的电压：$u_C(t)=E(1-e^{-\frac{t}{RC}})$．充电的快慢可用充电速度 $\frac{du_c}{dt}$ 来反映，试求 $t=0$ 时的充电速度。

5. 验证方程：

(1) $i=i_0e^{-\frac{t}{RC}}$满足方程$\frac{i}{C}+R\frac{di}{dt}=0$；

(2) $i=\frac{E}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}t})$ 满足方程 $L\frac{di}{dt}+iR=E$。

6. 滑轮旋转的角度 θ与时间 t 的关系为 $\theta=t^2+3t-5$ (θ的单位是弧度，t 的单位是秒)，试求$t=5$秒时的角速度和角加速度。

7. 求抛物线$y=x^2$上点$A(1,1)$和点$B(-2,4)$处的切线方程。

8. 求曲线$y=3x^3-2x+1$，在点 $(0,1)$ 处的切线方程。

9. 正弦曲线$y=\sin x$，在区间 $0\leqslant x\leqslant\pi$上哪一点的切线：

(1) 平行于 x 轴？

(2) 与 x 轴交成45°角？

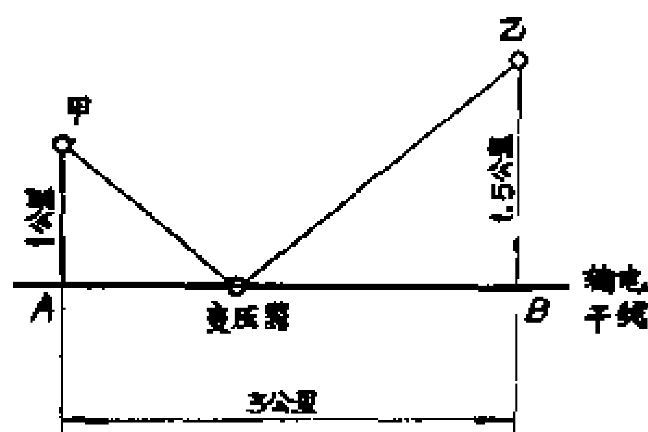
(3) 与$A(-2,0)$、$B(0,1)$的连线平行？

10.求垂直于直线$2x-6y+1=0$且与曲线$y=x^3+3x^2-5$相切的直线方程。

11.讨论函数 $y=\frac{x^3}{3}-x^2+2$的增减性。

12.某工厂要修建一间面积是18米²的矩形仓库，一面借用原有的墙，三面砌新墙，问长宽各取几米时用砖最省？

13.甲乙两生产队合用一台变压器（如图）.问变压器设在输电干线上何处时耗用输电线最省？

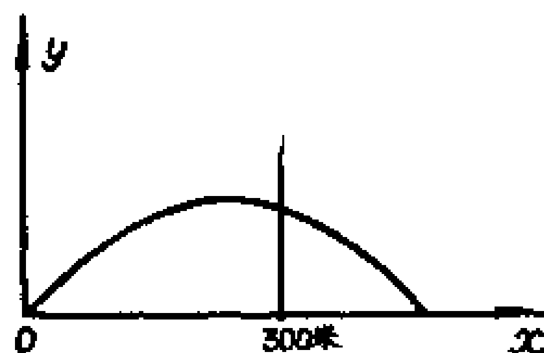


（第13题）

14.若不计空气阻力，炮弹的弹道曲线方程为：$y=mx-\frac{m^2+1}{800}x^2$，如图所示，坐标原点是炮弹的发射点，$m$ 为弹道曲线在坐标原点处的切线斜率：

(1) 如果要炮弹的水平射程最大，m 的值应为多少？

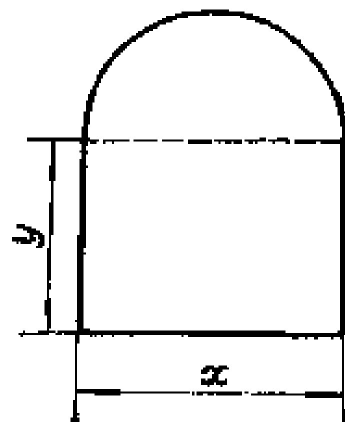
(2) 如果要炮弹击中 300 米远处一直立墙壁上的高度最大，m 的值应为多少？



（第14题）

15.在生产实际中，经常要做容积 V 一定的带盖的圆柱形容器．问底半径 r 和高 h 等于多少时，才能使表面积最小？这时底直径与高的比是多少？

16.挖一条隧道，截面拟建成矩形加半圆(如图)．如果截面的面积为 5 平方米，问底宽 x 为多少时，从而使建造时所用的材料最省？



（第16题）

17.试推导出下列近似公式：

$$e^x\approx 1+x;\sqrt{1+x}\approx 1+\frac{1}{2}x.\text{(其中 }|x|\text{ 很小)}$$

18.求近似值：$\sqrt{60}$；$\sqrt{48}$；$\ln 1.01$；$\operatorname{tg}4°$。

复 习 题

1.分析下列变量变化趋势的特点，指出哪些有极限？哪些没有极限？哪些是无穷大量？哪些是无穷小量？

(1) $u_n=\frac{1000}{n}$，$(n\to\infty)$；　　(2) $u_n=n-(-1)^n$，$(n\to\infty)$；

(3) $u_n=(-1)^n\frac{1}{n}$，$(n\to\infty)$；　　(4) $u_n=(-1)^n n$，$(n\to\infty)$；

(5) $u_n=1+(-1)^n$, $(n\to\infty)$; (6) $y=\frac{1}{x^2}$, $(x\to 0)$;

(7) $y=\frac{1}{x^2}$, $(x\to\infty)$; (8) $y=\sin x$, $(x\to\frac{\pi}{2})$;

(9) $y=\sin x$, $(x\to\infty)$; (10) $y=\operatorname{arctg}x$, $(x\to+\infty)$.

2. $f(x)=\frac{x^2-1}{x^3}$，说明何时$f(x)$是无穷小量？何时$f(x)$是无穷大量？

3. 求下列极限:

(1) $\lim\limits_{x\to 0}x^2\cos x$; (2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^3+x}{x^2+3}$;

(3) $\lim\limits_{x\to 3}(1-\frac{1}{x})(3+\frac{2}{x})$; (4) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{3}{x^2})$;

(5) $\lim\limits_{x\to e}(x\ln x+2x)$; (6) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n^2+1}$;

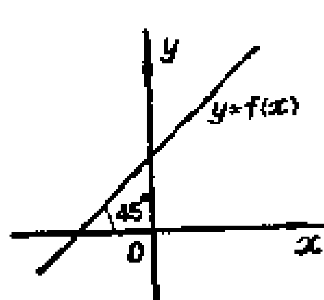
(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2+4x-1}{5x+1}$; (8) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+4x-1}{4x^2-2x+8}$.

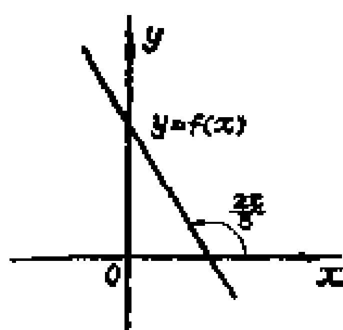
4. 若电流 i 与时间 t 的关系为

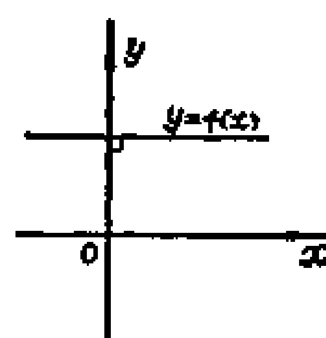
$$i=\frac{E}{R}(1-e^{-\frac{R}{L}t})$$

其中 R、E、L 均为正常数，问在时间 t 无限增大的过程中，电流 i 的变化趋势如何？

5. 已知函数$y=f(x)$的图形如下图，试在图上注明函数的导数.







（第5题）

6. 求下列函数的导数:

(1) $y=(3x^2+2x-1)\sin x$; (2) $y=\frac{x\ln x}{1+x}$;

(3) $y=\frac{\sin x}{1+\operatorname{tg}x}$; (4) $y=\ln(1-x^2)$;

(5) $y=(1-\frac{1}{x})^2$; (6) $y=\ln\frac{1-x}{1+x}$;

(7) $y=\sqrt{1-\sin 2x}$; (8) $y=x^2\operatorname{arctg}\sqrt{x}$;

(9) $y=(a+bx)^{100}$;　　(10) $y=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$;

(11) $y=\sqrt{1-t}\sin\frac{t}{2}$;　　(12) $y=(t+1)\sin^2 3t$;

(13) $y=x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}$;　　(14) $y=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$.

7.已知物体作直线运动的运动规律由下列方程给出,试求该物体在指定时刻的速度

(1) $S=t^3+2t^2$,　$t=2$;

(2) $S=4t^2-6t$,　$t=2$;

(3) $x=a\cos(\frac{2\pi}{T}t)$,　$t=\frac{T}{8}$.

8.单摆绕固定轴摆动的运动规律是,

$$\varphi=\varphi_0\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right),$$

求 $t=0$ 时摆动的角速度.

9.求下列曲线在已知点处的切线方程:

(1) $y=x^3-3x$,在$x=2$处;

(2) $y=\frac{1}{x^2}$,在$x=1$处;

(3) $y=\frac{2x+1}{3-x}$,在$x=2$处.

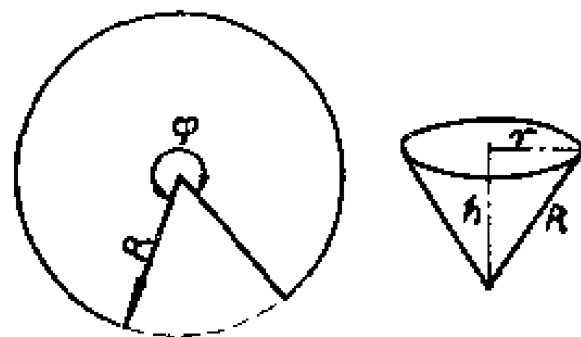
10.求下列微分:

(1) $d(3-\frac{1}{2}x)$;　　(2) $d\sqrt{x}$;

(3) $d\ln(ax+b)$;　　(4) $d\cos(\frac{2\pi}{T}t+\frac{\pi}{4})$;

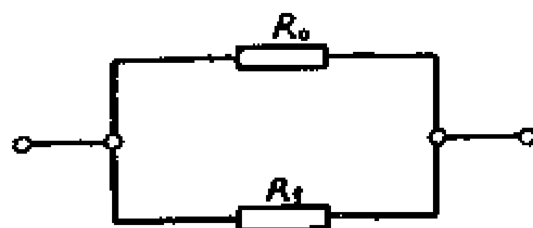
(5) $d\arcsin 3\sqrt{x}$;　　(6) $d\operatorname{arctg}(1-x^2)$.

11. 用一块半径为R的圆形铁片,剪去一个小扇形做成一个漏斗(如图).要使漏斗的容积最大,这时φ角应为多少?(提示:圆锥体体积$=\frac{1}{3}\pi r^2 h$,圆锥口周长$=R\varphi$).



(第11题)

12.在如图所示的并联电路中,设电阻R_0给定,总电流固定.R_1多大时,在电阻R_1上可以达到最大的功率?



(第12题)

第十七章　积　　分

毛主席教导说:“**分析的方法就是辩证的方法。所谓分析，就是分析事物的矛盾。**”

我们知道，微积分是解决客观事物局部与整体这对矛盾的一种数学方法．在上一章中，我们详细地分析了微分这个侧面，本章将着重研究积分这个侧面及其与微分的联系，并通过积分的应用进一步揭露微积分这对矛盾的实质．

第一节　定积分的概念

一、定积分的实例

1.曲边梯形的面积

如果平面图形的各边都是直线，那末用初等数学的方法就可以求出它们的面积来．例如

矩形的面积＝底×高;

三角形的面积＝$\frac{1}{2}$底×高．

但是，在实际问题中，有些图形除了有直边之外，还有曲边．这种有曲边的图形叫做曲边图形（图17—1）．

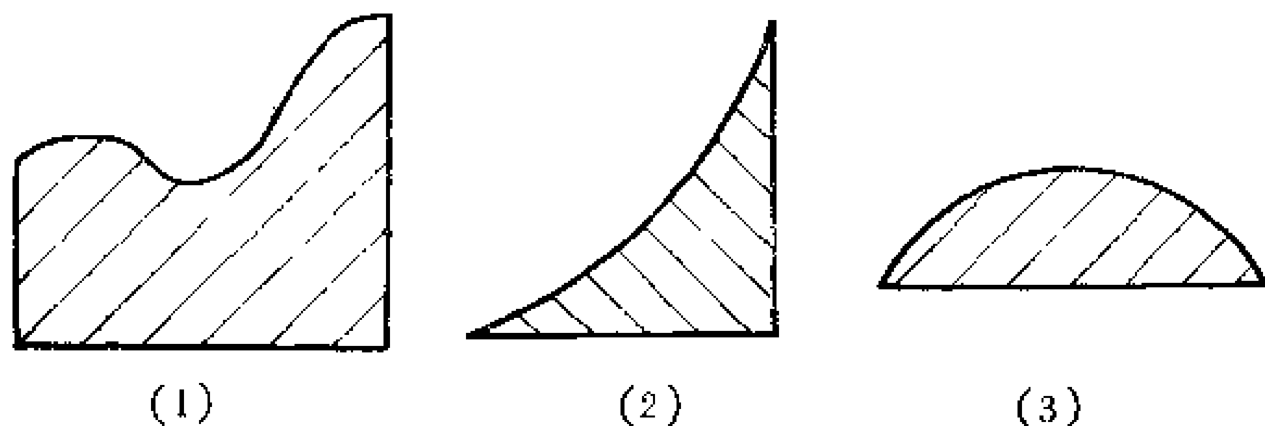


图17—1

怎样求曲边图形的面积呢？我们会求直边图形的面积，而现在遇到的却是求曲边图形面积的问题，这就存在着“直与曲”的矛盾．为了求出曲边图形的面积，就必须解决“直与曲”的矛盾．

毛主席教导说:“**人的正确思想，只能从社会实践中来，只能从社会的生产斗争、阶级斗争和科学实验这三项实践中来。**”劳动人民在长期的社会实践中，用各种办法解决了“直与曲”的矛盾，充分显示了劳动人民的聪明才智．例如，钳工师傅用平锉加工圆形工件时，平锉每锉一下都是直的，但不断改变锉的方向，就能锉出一个圆来（图17—2）．这就是说，从总体上看，工件的外形虽是曲的，但从工件极小的一段上看，却能认为是

直的. 又如，建筑工人用条石可以砌成半圆形的桥洞，从总体上看桥洞是曲的，但从一块条石看却是直的（图17—3）.

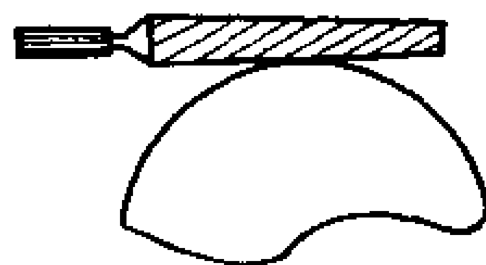


图17—2

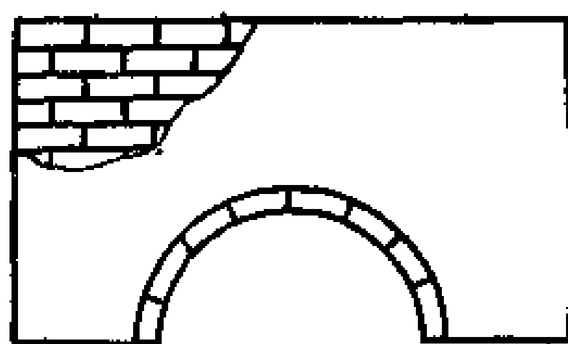
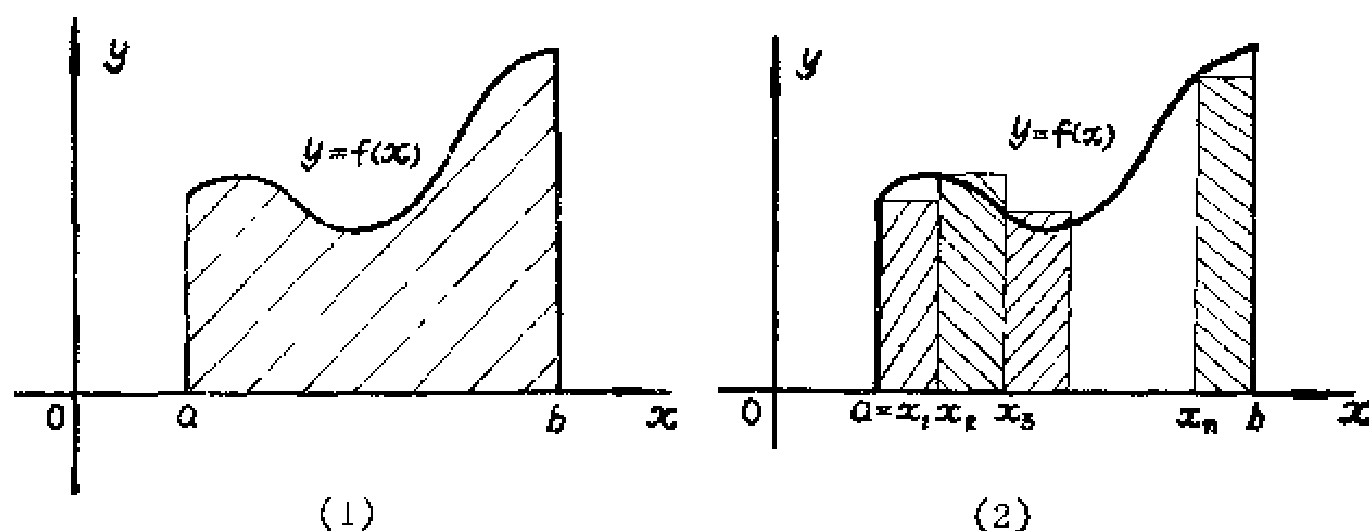


图17—3

上述两个例子表明："直与曲"这对矛盾，在一定条件下是可以互相转化的；从总体上看是曲的东西，在极短的小段上却可以看作是直的.正如恩格斯所说：**"高等数学的主要基础之一是这样一个矛盾：在一定条件下直线和曲线应当是一回事。"**曲边图形的面积正是运用这种辩证的观点才求出来的.

例1 求由曲线$y=f(x)(f(x)\geqslant 0)$，直线$x=a$、$x=b$及x轴围成的曲边图形（这种曲边图形叫做曲边梯形）的面积〔图17—4(1)〕.



(1) (2)

图17—4

解：（1）分析矛盾

我们知道，如果图形是由直边组成的，那末就可用初等数学的方法求面积. 但是现在所要求的是曲边梯形的面积，它不能直接用初等数学的方法来计算. 因此，为了求得曲边梯形的面积，就必须解决"直与曲"的矛盾.

（2）解决矛盾

前面已经指出，在相对于整体是很小的局部上，可以把曲线看成是直线. 于是，为了求如图17—4（1）所示曲边梯形的面积，可先用平行于y轴的直线把图形分成许多小曲边梯形〔图17—4（2）〕；并在每个小曲边梯形上用直边近似代替曲边，即通过"以直代曲"的办法，用小矩形的面积作为小曲边梯形面积的近似值；再把各个小矩形的面积加起来，就得到所求曲边梯形面积的近似值.而且，分得越细，近似程度越好.在无限细分的条件下，即通过取极限，近似值就转化为精确值，从而便得到曲边梯形的面积.

求曲边梯形面积的具体做法是：

①细分，在局部上"以直代曲"，得小曲边梯形面积的近似值.

将区间$[a,b]$分成n个长度相等的小区间，记作

$$[x_1,x_2],\ [x_2,x_3],\ [x_3,x_4],\ \cdots\cdots[x_n,\ x_{n+1}].$$

其中$x_1=a$、$x_{n+1}=b$. 相应地，曲边梯形被分成n个小曲边梯形，它们的面积依次记为

$$\Delta A_1,\ \Delta A_2,\ \Delta A_3,\ \cdots\cdots\Delta A_n.$$

显然，每个小区间的长度为$\Delta x=\frac{b-a}{n}$. 因为各小区间左端点的坐标分别是：

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots\cdots x_n.$$

所以在曲线$y=f(x)$上对应点的纵坐标分别是：

$$y_1=f(x_1),\ y_2=f(x_2),\ y_3=f(x_3),\ \cdots\cdots y_n=f(x_n).$$

在每个小区间上，作以Δx为底、左端点对应的纵坐标为高的小矩形，则小曲边梯形的面积就近似地等于对应的小矩形的面积，即

$$\Delta A_1\approx y_1\Delta x=f(x_1)\Delta x;$$

$$\Delta A_2\approx y_2\Delta x=f(x_2)\Delta x;$$

$$\Delta A_3\approx y_3\Delta x=f(x_3)\Delta x;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta A_n\approx y_n\Delta x=f(x_n)\Delta x.$$

②作和，得到曲边梯形面积的近似值.

将所有小矩形的面积加起来，就得到总的曲边梯形面积A的近似值，即

$$\begin{aligned}A&=\Delta A_1+\Delta A_2+\Delta A_3+\cdots\cdots+\Delta A_n\\&\approx f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x+f(x_3)\Delta x+\cdots\cdots+f(x_n)\Delta x.\end{aligned}$$

③取极限，得到曲边梯形面积的精确值.

由图17—4(2)可以看出，不论n取得多大，各个小矩形面积之和只是曲边梯形面积的近似值. 但是当分得越细，即n越大时，所得的近似值便越接近曲边梯形的面积. 因此，在将区间$[a,b]$无限细分的条件下，即当$n\to\infty$时，上式右端的极限值就是我们要求的曲边梯形的面积A，即

$$A=\lim_{n\to\infty}[f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x+f(x_3)\Delta x+\cdots\cdots+f(x_n)\Delta x].$$

上式右端的和式可以简记为$\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x$，即

$$\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x=f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x+f(x_3)\Delta x+\cdots\cdots+f(x_n)\Delta x.$$

其中“$\sum$”是求和的记号，叫做连加号，读作“西格玛”，整个记号$\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x$表示$f(x_i)\Delta x$的下标由1到$n$共$n$项的和. 因此曲边梯形的面积也可表示为

$$A=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x.$$

2.变速直线运动的路程

在上一章中已经讲过，已知物体作变速直线运动时路程随时间变化而变化的规律，那末，通过求导数便可以求得它的速度．现在我们提出相反的问题：已知变速直线运动的速度，如何求出运动的路程？下面用例子来说明求变速直线运动路程的分析方法．

例 2　已知自由落体的速度 $v=gt$，试求落体在 $t=0$ 到 $t=3$ 秒这段时间内下落的路程S．

解：（1）分析矛盾

我们知道，对于等速运动，它的路程等于速度乘以时间，即

路程＝速度×时间．

而落体运动的速度是随时间变化的，因此不能直接用等速运动的公式计算路程．要求落体运动的路程，必须解决等速与变速的矛盾，即必须解决“不变与变”的矛盾．

（2）解决矛盾

“不变”与“变”这对矛盾，在一定的条件下，也是可以互相转化的．对于落体运动来说，在极短的时间内，由于速度变化很小，变速可以近似地看成等速．落体运动的路程，正是运用这种辩证的观点求出来的．

求落体运动路程的具体步骤如下：

①细分，在局部上“不变代变”，得小段路程的近似值．

将时间区间[0，3]分成相等的 n 小段时间（图17—5），记作

$[t_1, t_2]$，$[t_2, t_3]$，$[t_3, t_4]$……$[t_n, 3]$其中 $t_1=0$．相应地，路程S被分成 n 小段．依次记为

ΔS_1，ΔS_2，ΔS_3，……ΔS_n．

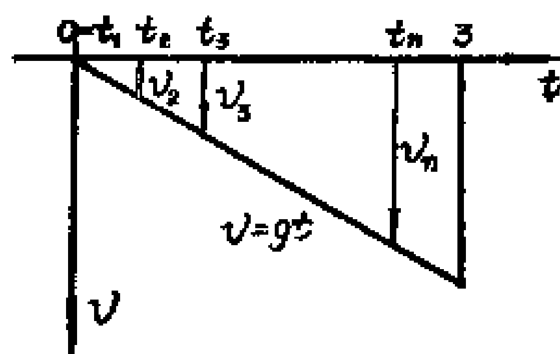


图17—5

显然，每一小段的时间为$\Delta t=\frac{3}{n}$．因为各小段时间的开始时刻分别为

$$t_1=0，\quad t_2=\frac{3}{n}，\quad t_3=2\cdot\frac{3}{n}，\quad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$t_n=(n-1)\frac{3}{n}．$$

所以，速度$v=gt$的对应值分别为

$$v_1=gt_1=0，\quad v_2=gt_2=g\frac{3}{n}，\quad v_3=gt_3=g\cdot2\cdot\frac{3}{n}，\quad \cdots\cdots，$$

$$v_n=gt_n=g\cdot(n-1)\cdot\frac{3}{n}．$$

在每一小段时间内，由于落体的速度变化不大，可以近似地看成是以每小段开始时刻的速度作等速运动．于是，可用等速运动求路程的公式，计算出各小段路程的近似值：

$$\Delta S_1\approx gt_1\Delta t=0；$$

$$\Delta S_2\approx gt_2\Delta t=g\cdot\frac{3}{n}\cdot\frac{3}{n}=g\left(\frac{3}{n}\right)^2；$$

$$\Delta S_3\approx gt_3\Delta t=g\cdot2\cdot\frac{3}{n}\cdot\frac{3}{n}=2g\left(\frac{3}{n}\right)^2；$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta S_n \approx g t_n \Delta t = g(n-1)\cdot\frac{3}{n}\cdot\frac{3}{n} = (n-1)\,g\left(\frac{3}{n}\right)^2.$$

②作和，得总路程 S 的近似值．

将 n 个小段路程的近似值加起来，就得到总路程 S 的近似值，即

$$S = \sum_{i=1}^{n}\Delta S_i \approx \sum_{i=1}^{n} g t_i \Delta t = g t_1 \Delta t + g t_2 \Delta t + g t_3 \Delta t + \cdots\cdots + g t_n \Delta t$$

$$= 0 + g\left(\frac{3}{n}\right)^2 + 2g\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \cdots\cdots + (n-1)\,g\left(\frac{3}{n}\right)^2$$

$$= g\left(\frac{3}{n}\right)^2\left[1+2+\cdots\cdots+(n-1)\right] = g\left(\frac{3}{n}\right)^2\cdot\frac{n(n-1)}{2}(*).$$

③取极限，得总路程的精确值．

可以看出，将区间 $[0,\ 3]$ 分得越细，也就是 n 越大，近似值就越接近所要求的路程．在无限细分的条件下，即当 $n\to\infty$ 时，上式右端的极限就是所求的路程 S，即

$$S = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} g t_i \Delta t = \lim_{n\to\infty} g\left(\frac{3}{n}\right)^2\frac{n(n-1)}{2}$$

$$= \frac{9}{2}g\lim_{n\to\infty}\frac{n(n-1)}{n^2} = \frac{9}{2}g = 44.1\ (米).$$

这就是物体在时间 $[0,\ 3]$ 内下落的路程．

上述的分析方法也适用于求一般变速直线运动的路程．

二、定积分的定义

毛主席教导说：“**认识的感性阶段有待于发展到理性阶段——这就是认识论的辩证法。**”上面两个例子虽然有不同的具体内容，但是我们可以看到：

(1) 无论是求曲边梯形的面积，还是求变速运动的路程，它们都是和式的极限问题；

(2) 解决这两个问题的过程都是：先细分，在局部上采取“以直代曲”、“不变代变”的方法，求出局部量的近似值；然后作和，得到整体量的近似值；最后取极限，就得到整体量的精确值．

抓住这种共同的本质的东西，便抽象出积分的概念．

定义　设函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,\ b]$ 上连续．将区间 $[a,\ b]$ 分成 n 个长度相等的小区间，各小区间的左端点依次记为

$$a=x_1,\ x_2,\ x_3,\ \cdots\cdots,\ x_n.$$

作和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x,$$

(*) 这里利用公式 $1+2+3+\cdots\cdots+(n-1)=\dfrac{n(n-1)}{2}$．

其中Δx是小区间的长度，那末和式的极限

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x$$

叫做函数$y=f(x)$在区间〔a，b〕上的定积分（简称积分），记作$\int_a^b f(x)dx$，即

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x$$

其中x叫积分变量，$f(x)$叫做被积函数，$f(x)dx$叫做被积表达式，数a和b分别叫做积分的下限和上限，记号"$\int$"叫做"积分号"。

根据定积分的定义可知，例1中曲边梯形的面积是函数$f(x)$在〔a，b〕上的定积分，即

$$A=\int_a^b f(x)dx;$$

例2中物体在$t=0$到$t=3$秒这段时间内下落的路程是函数gt在〔0，3〕上的定积分，即

$$S=\int_0^3 gt\,dt=44.1\ （米）.$$

三、定积分的几何意义

由定积分的定义知道，如果在〔a，b〕上，函数$y=f(x)\geqslant 0$，那么定积分

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x$$

表示图17—6所示曲边梯形的面积A。

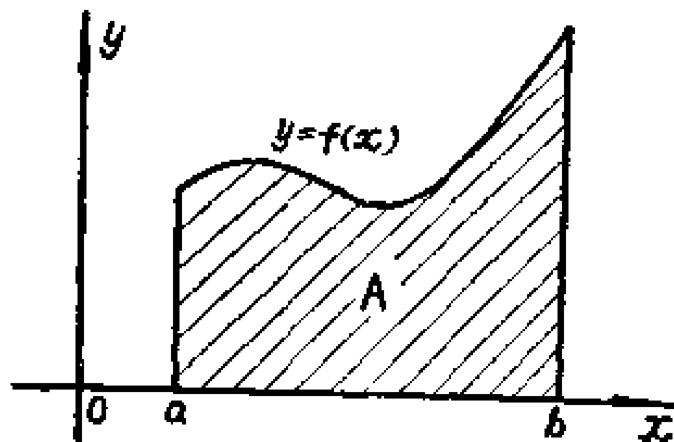


图17—6

如果在〔a，b〕上$f(x)\leqslant 0$（图17—7），由于$\Delta x>0$，从而积分和式中的每一项$f(x_i)\Delta x\leqslant 0$，所以$\int_a^b f(x)\,dx$的值是负的，从而有

$$\int_a^b f(x)\,dx=-（曲边梯形的面积）=-A.$$

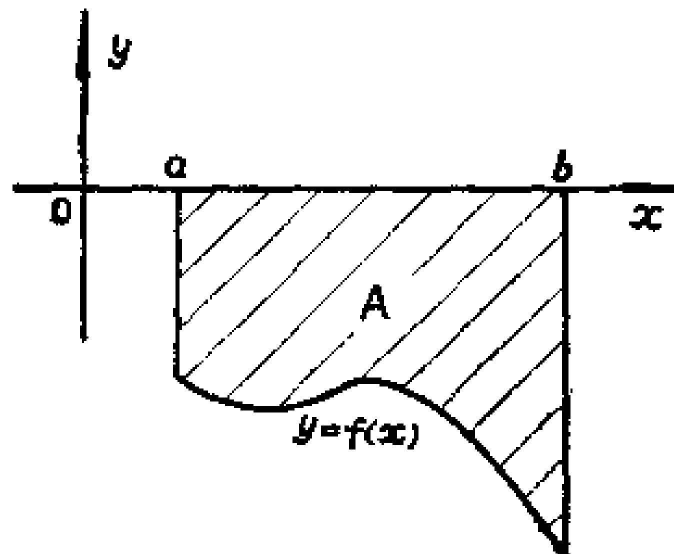


图17—7

利用定积分的几何意义，可以通过求图形的面积而得到某些定积分的值。

例 根据定积分的几何意义，指出下列定积分的值：

(1) $\int_1^2 x dx$;

(2) $\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$.

解：(1) $\int_1^2 xdx$的数值等于图17—8中阴影部分的面积．这块面积可用大三角形的面积$\frac{1}{2}\times 2^2$减去小三角形的面积$\frac{1}{2}\times 1^2$算出，所以有

$$\int_1^2 xdx=\frac{1}{2}\times 2^2-\frac{1}{2}\times 1^2=\frac{3}{2};$$

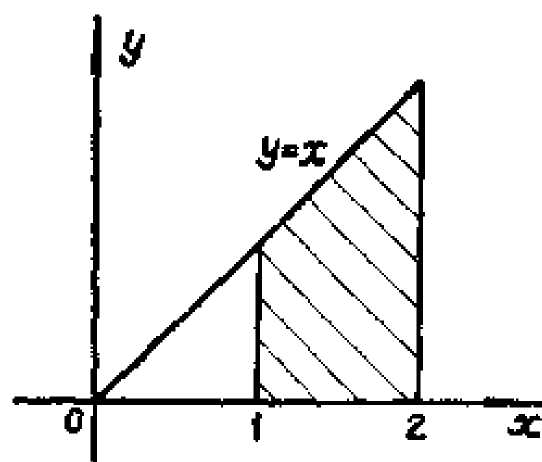


图17—8

(2) $\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$的数值等于图17—9所示的面积，这块面积是半径为2的圆面积的一半，所以有

$$\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\pi(2)^2=2\pi.$$

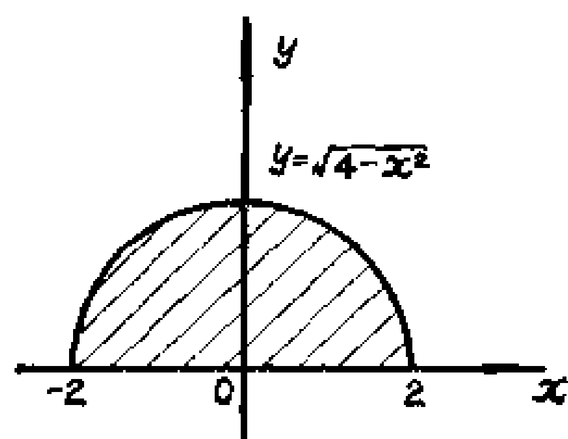


图17—9

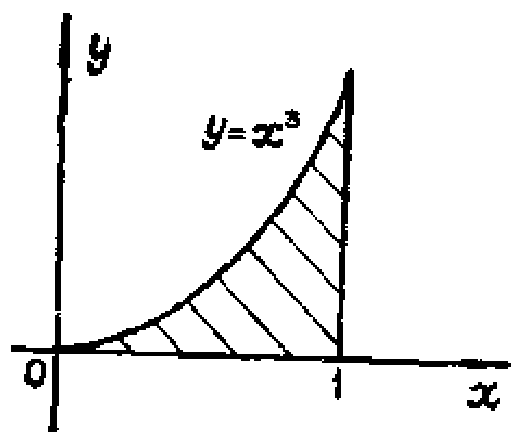
习　　题

1．已知自由落体的速度$v=gt$，试将时间区间[0，3]分成10等分，求物体从$t=0$到$t=3$秒下落路程的近似值；若将[0，3]分成30等分，下落路程的近似值是多少？

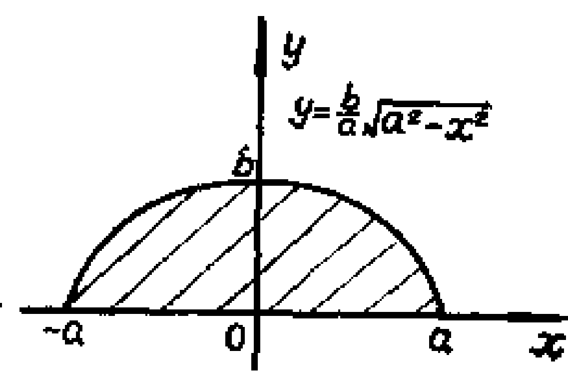
2．在一导体中流过的电流为$i=I_m\sin\omega t$，其中I_m、ω为常数，试用定积分表达从$t=0$到$t=5$秒内通过导体截面的电量．

3．定积分$\int_a^b f(x)dx$的大小与什么有关？ $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt$是否成立？

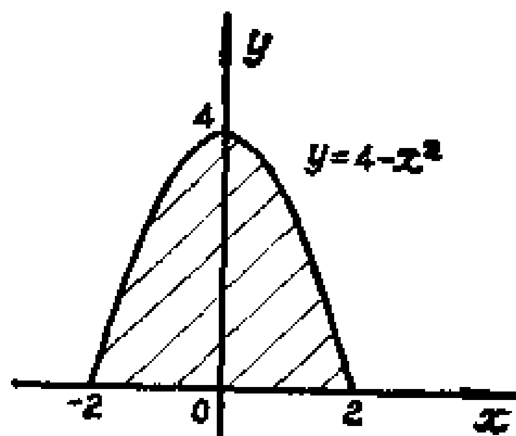
4．根据定积分的几何意义，将下列图形的面积用积分表示出来（不计算结果）．



(1)



(2)



(3)

（第4题）

5. 画出下列定积分所代表的图形面积，并指出积分值：

(1) $\int_0^2 x dx$;　　　(2) $\int_0^4 4dx$;　　　(3) $\int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-x^2}dx$.

第二节　微积分基本公式

由第一节例2看到，用定积分的定义（即用和式的极限）直接计算积分值是很麻烦的．因此，必须解决定积分的计算方法问题．

一、原函数的概念

我们知道，自由落体的路程 $S=\frac{1}{2}gt^2$ 与速度 $v=gt$ 之间有如下的关系：

$$\left(\frac{1}{2}gt^2\right)'=gt \qquad \text{或} ds=gtdt.$$

这时路程函数 $S=\frac{1}{2}gt^2$ 就叫做速度函数 $v=gt$ 的原函数．

一般地，如果函数 $F(x)$ 与 $f(x)$ 之间，满足如下关系：

$$F'(x)=f(x) \text{或} dF(x)=f(x)dx,$$

那末 $F(x)$ 就叫做 $f(x)$ 的原函数．

例如，∵ $(\sin x)'=\cos x$,　　∴ $\sin x$ 是 $\cos x$ 的原函数；

$(-e^{-t})'=e^{-t}$,　　$-e^{-t}$ 是 e^{-t} 的原函数；

$(-\cos x)'=\sin x$,　　$-\cos x$ 是 $\sin x$ 的原函数；

$(\ln x+5)'=\frac{1}{x}$,　　$\ln x+5$ 是 $\frac{1}{x}$ 的原函数；

$\left(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right)'=x^\alpha$,　　$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ 是 x^α 的原函数；

$(x^2+c)'=2x$,　　x^2+c 是 $2x$ 的原函数，

（其中，c 为任意常数）．

二、微积分基本公式

在第一节例2中，我们按照和式的极限求出了自由落体在时间 $t=0$ 到 $t=3$ 秒内下落的路程

$$S=\int_0^3 gtdt=44.1 \text{（米）}.$$

另一方面，我们也可直接利用速度 $v=gt$ 的原函数 $S=\frac{1}{2}gt^2$ 计算路程．在 $t=0$ 到 $t=3$ 秒内，物体下落的路程是

$$S=S(3)-S(0)=\frac{1}{2}g(3)^2-\frac{1}{2}g(0)^2=44.1 \text{（米）}.$$

为了书写方便，我们将路程增量 $S(3)-S(0)$ 记成 $S(t)\Big|_0^3$，于是有

$$\int_0^3 gt\,dt = S(t)\Big|_0^3,$$

其中 $S'(t)=\left[\frac{1}{2}gt^2\right]'=gt$.

同样，如果已知一物体作直线运动时的路程函数 $S=S(t)$ 和速度函数 $v=v(t)$，那末，物体由 $t=T_1$，到 $t=T_2$ 这段时间内所经过的路程 S，可用积分

$$S=\int_{T_1}^{T_2}v(t)dt$$

表示，也可用路程函数的增量来计算，即

$$S=S(T_2)-S(T_1)=S(t)\Big|_{T_1}^{T_2},$$

因此有

$$\int_{T_1}^{T_2}v(t)dt=S(t)\Big|_{T_1}^{T_2}$$

其中 $S'(t)=v(t)$.

上面得到的关系式，有着普遍的意义．在一般的情况下，我们有如下的结论：

定理 如果 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，即 $F'(x)=f(x)$ 或 $dF(x)=f(x)dx$，那末

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)}$$

上式叫做微积分基本公式，也叫做牛顿—莱布尼兹公式．

微积分基本公式建立了积分和导数（或微分）之间的相互关系，为计算定积分开辟了一条新的途径．根据这个公式，计算积分值的问题可归结为求被积函数的原函数的问题．

例 1 求 $\int_0^1 x^2dx$.

解：∵ $\left(\frac{1}{3}x^3\right)'=x^2$， 即 $\frac{1}{3}x^3$ 是 x^2 的原函数，

∴ 根据微积分基本公式有

$$\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{1}{3}\cdot 1^3-\frac{1}{3}0^3=\frac{1}{3}.$$

例 2 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt$.

解：∵ $(\sin t)'=\cos t$，即 $\sin t$ 是 $\cos t$ 的原函数，

∴ 根据微积分基本公式有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,dt=\sin t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0=1.$$

三、微分和积分的关系

微积分基本公式建立了积分和导数（或微分）之间的相互关系．

下面我们再以变速直线运动的路程S和速度v之间的关系为例，进一步说明微分和积分之间的关系.

如果物体作变速直线运动，速度$v=v(t)$，那末它在$T_1\to T_2$这段时间内所经的路程

$$S=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}v(t_i)\Delta t=\int_{T_1}^{T_2}v(t)dt.$$

因为和式$\sum_{i=1}^{n}v(t_i)\Delta t$中的每一项$v(t_i)\Delta t$，是物体在$t_i\to t_i+\Delta t$这一小段时间内所经路程$\Delta S_i$的近似值，即$\Delta S_i\approx v(t_i)\Delta t$，所以和式$\sum_{i=1}^{n}v(t_i)\Delta t$便是$T_1\to T_2$整段时间内物体所经路程$S$的近似值.$\Delta t$越小，$\Delta S_i\approx v(t_i)\Delta t$越精确，和式$\sum_{i=1}^{n}v(t_i)\Delta t$也就越接近$S$，所以有$S=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}v(t_i)\Delta t$.

我们知道，当物体作变速直线运动时，只要$\Delta t\neq 0$，和式$\sum_{i=1}^{n}v(t_i)\Delta t$总归只是$S$的近似值.但当$\Delta t$消失为零时，$\Delta S_i\approx v(t_i)\Delta t$就转化为精确的微分等式$dS=v(t)dt$，因而整个和式也就转化为$S$的精确值了.这说明上述和式的极限——积分——正是无数微分dS的积累.

因为微分等式$dS=v(t)dt$是由近似等式$\Delta S_i\approx v(t_i)\Delta t$当$\Delta t$消失为零时转化来的，所以路程的微分$dS=v(t)dt$，即被积表达式的具体意义就是当$\Delta t$消失为零时，物体所经过的路程，即瞬时路程。

上述分析说明:

(1) 定积分中的被积表达式是整体量的微分，它表示整体量微小的局部;

(2) 定积分是微分的无限积累，因而积分的结果就是积累局部的结果;

(3) 定积分表示的是一个整体量.

微分和积分的这种关系正是客观事物中的局部与整体这对矛盾在数学中的反映.

四、定积分的性质

定积分有如下的性质:

1.两个函数和（差）的定积分等于各个函数定积分的和（差），即

$$\int_a^b[f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx.$$

2.被积函数中的常数因子可以提到积分符号外面来，即

$$\int_a^b Kf(x)dx=K\int_a^b f(x)dx$$

3.交换定积分上、下限，定积分的绝对值相同，但符号相反，即

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$$

4. 对于任意一数 c，有

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

这四个性质都可以利用微积分基本公式直接导出. 这里仅证明性质 3 和性质 4 .

设 $f(x)$ 的原函数是 $F(x)$，则根据微积分基本公式有

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)=-[F(a)-F(b)]=-\int_b^a f(x)dx;$$

$$\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx=[F(c)-F(a)]+[F(b)-F(c)]$$

$$=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx.$$

例 计算下列定积分:

(1) $\int_0^1 (x+1)^2dx$; (2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\frac{x}{2}dx$.

解: (1) $\int_0^1 (x+1)^2\,dx=\int_0^1 (x^2+2x+1)\,dx=\int_0^1 x^2dx+\int_0^1 2xdx+\int_0^1 dx$

$$=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1+x^2\Big|_0^1+x\Big|_0^1=\frac{1}{3}+1+1=\frac{7}{3};$$

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\frac{x}{2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}(1-\cos x)\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos x)\,dx$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx=\frac{1}{2}x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$

习　　题

1. 根据求导数的公式，求下列函数的原函数:

(1) $x^{\frac{1}{2}}$; (2) $3e^x$; (3) $x^{-\frac{1}{2}}$;

(4) $e^x-\sin x$; (5) $\sin\omega t$; (6) $\cos\omega t$.

2. 计算下列定积分:

(1) $\int_{-1}^1 x^2dx$; (2) $\int_1^4 \sqrt{x}\,dx$; (3) $\int_1^e \frac{1}{x}dx$;

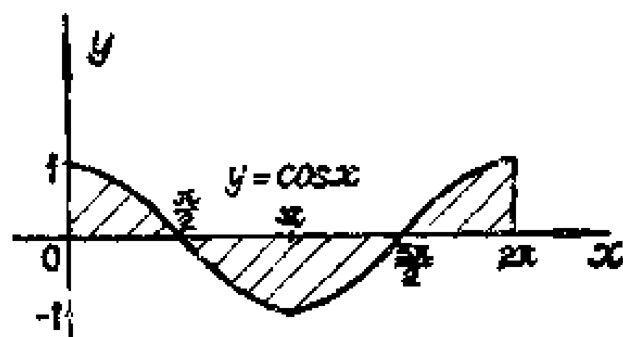
(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos xdx$; (5) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$;

(6) $\int_0^{\frac{\pi}{\omega}}\sin\omega tdt$; (7) $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

3. 一物体以速度 $v=1+3t$ 作直线运动，求在 [5，10] 一段时间内物体经过的路程.

4. 计算定积分 $\int_0^1 (x^2+1)dx$，并画出它所表示的曲边梯形的面积.

5. 求余弦曲线 $y=\cos x$ 在一个周期上与 x 轴所围成的图形的面积.



（第5题）

6. 下列函数哪些是$\cos x$的原函数？哪些不是？

$\sin x$; $\sin x+2$; $\sin x-2$; $\frac{1}{2}\sin x$; $\sin 2x$;

$\sin x+2x$; $\sin x+C$（C为任意常数）.

7. 用微积分基本公式计算定积分$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx$时，应该取$\cos x$的哪一个原函数？取$\sin x+C$是否可以？

8. 用微积分基本公式，证明本节第四段中定积分的性质1和性质2.

9. 若$f(x)\equiv 0$，定积分$\int_a^b f(x)dx=$？若$a=b$，定积分$\int_a^b f(x)dx=$？

10. 计算下列定积分：

(1) $\int_1^2 \frac{2x^3+3}{x^2}dx$;　　(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\sin t+b\cos t)dt$;

(3) $\int_1^3 \frac{2x+1}{\sqrt{x}}dx$;　　(4) $\int_0^1 \sqrt{x}(1+x)dx$;

(5) $\int_0^2 (4-\rho^2)d\rho$.

第三节 积　分　法

从上节看出，计算定积分的关键是找出被积函数的原函数. 求原函数的方法叫做积分法.

一、不定积分的概念

我们已知，函数$2x$的原函数除x^2外，还有x^2+1、$x^2-\frac{1}{3}$等等. 这些原函数都可以写成x^2+C的形式，其中C为任意常数. 这样，x^2+C是$2x$的全体原函数. 函数$2x$的全体原函数x^2+C叫做函数$2x$的不定积分，记为$\int 2xdx$，即

$$\int 2xdx=x^2+C.$$

一般地，有下述不定积分的定义：

定义　如果$F(x)$是$f(x)$的一个原函数，即$F'(x)=f(x)$或$dF(x)=f(x)dx$，那末函

数$f(x)$的全体原函数$F(x)+C$叫做函数$f(x)$的不定积分，记为$\int f(x)dx$，即

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

其中任意常数C叫做积分常数.

根据导数的基本公式表和不定积分的定义，可以得到如下基本积分公式表：

(1) $\int Kdx=Kx+C$,	$\because$ $(Kx)'=K$
(2) $\int x^{\alpha}dx=\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}+C(\alpha\neq-1)$	$\because$ $\left(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right)'=x^{\alpha}$
(3) $\int \sin xdx=-\cos x+C$	$\because$ $(-\cos x)'=\sin x$
(4) $\int \cos xdx=\sin x+C$	$\because$ $(\sin x)'=\cos x$
(5) $\int e^{x}dx=e^{x}+C$	$\because$ $(e^{x})'=e^{x}$
(6) $\int \frac{1}{x}dx=\ln\|x\|+C$	$\because$ $(\ln\|x\|)'=\frac{1}{x}$
(7) $\int \frac{1}{1+x^{2}}dx=\operatorname{arctg}x+C$	$\because$ $(\operatorname{arctg}x)'=\frac{1}{1+x^{2}}$
(8) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}dx=\arcsin x+C$	$\because$ $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}$
(9) $\int \frac{1}{\cos^{2}x}dx=\operatorname{tg}x+C$	$\because$ $(\operatorname{tg}x)'=\frac{1}{\cos^{2}x}$
(10) $\int \frac{1}{\sin^{2}x}dx=-\operatorname{ctg}x+C$	$\because$ $(-\operatorname{ctg}x)'=\frac{1}{\sin^{2}x}$

这个公式表是求不定积分的基础，必须熟记.

下面举例说明公式(2)的用法.

例 计算下列不定积分：

(1) $\int x^{2}dx$;　　(2) $\int \sqrt{x}\,dx$;

(3) $\int x\sqrt{x}\,dx$;　　(4) $\int \frac{1}{x^{2}}dx$.

解：(1) $\int x^{2}dx=\frac{1}{2+1}x^{2+1}+C=\frac{1}{3}x^{3}+C$;

(2) $\int \sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{\frac{1}{2}+1}x^{\frac{1}{2}+1}+C=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C$;

(3) $\int x\sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{1}{\frac{3}{2}+1}x^{\frac{3}{2}+1}+C=\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+C$;

(4) $\int\frac{1}{x^2}dx=\int x^{-2}\,dx=\frac{1}{-2+1}x^{-2+1}+C=-x^{-1}+C=-\frac{1}{x}+C$.

二、不定积分的性质

根据导数的运算法则，可以推导出如下不定积分的性质：

1.两个函数和（差）的不定积分等于这两个函数不定积分的和（差），即

$$\int[f(x)\pm g(x)]\,dx=\int f(x)\,dx\pm\int g(x)dx$$

2.被积函数中的常数因子可以提到积分符号外面来，即

$$\int Kf(x)dx=K\int f(x)dx$$

运用这两个性质，可以求出一些函数的不定积分.

例 求下列不定积分：

(1) $\int(2e^x+3)dx$;　　(2) $\int\left(\frac{\sin x}{a}-b\cos x\right)dx$;

(3) $\int\frac{t^2-t+1}{t}dt$;　　(4) $\int(1-x)^2dx$;

(5) $\int\cos^2\frac{x}{2}dx$.

解： (1) $\int(2e^x+3)\,dx=\int 2e^x\,dx+\int 3dx=2\int e^x dx+3\int dx$

$=2e^x+3x+C$;

(2) $\int\left(\frac{\sin x}{a}-b\cos x\right)dx=\frac{1}{a}\int\sin x\,dx-b\int\cos x dx$

$=-\frac{1}{a}\cos x-b\sin x+C$;

(3) $\int\frac{t^2-t+1}{t}dt=\int(t-1+\frac{1}{t})dt=\int tdt-\int dt+\int\frac{1}{t}dt$

$=\frac{1}{2}t^2-t+ln|t|+C$;

(4) $\int(1-x)^2\,dx=\int(1-2x+x^2)\,dx=\int dx-2\int xdx+\int x^2dx$

$=x-x^2+\frac{1}{3}x^3+C$;

(5) $\int\cos^2\frac{x}{2}dx=\int\frac{1+\cos x}{2}dx=\int\frac{1}{2}dx+\int\frac{1}{2}\cos xdx$

$$=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\sin x+C.$$

三、换元积分法

现在介绍不定积分的换元积分法.先考察下面的例子:

例1 求$\int 2e^{2x}dx$.

解: 由复合函数的求导法知道

$$(e^{2x})'=2e^{2x},$$

所以有

$$\int 2e^{2x}dx=e^{2x}+C.$$

在这个例子中，由于 $2e^{2x}dx=e^{2x}d(2x)$，所以$\int 2e^{2x}dx=\int e^{2x}d(2x)$，从而有

$$\int e^{2x}d(2x)=e^{2x}+C.$$

这说明在公式$\int e^x dx=e^x+C$中，把 x 统统换成$2x$，公式仍然成立.

同样，下面的式子也成立:

$$\int e^{3x}d(3x)=e^{3x}+C;$$

$$\int e^{x^2}d(x^2)=e^{x^2}+C;$$

$$\int e^{\sin x}d(\sin x)=e^{\sin x}+C.$$

一般地，如果 u 是 x 的函数$u=u(x)$，那末就有

$$\int e^{u(x)}du(x)=e^{u(x)}+C.$$

上面的运算规律具有一般性，即如果$\int f(x)dx=F(x)+C$，那末有

$$\boxed{\int f[u(x)]du(x)=F[u(x)]+C}$$

上面公式叫做不定积分的换元积分法公式.

这样一来，我们就可以把基本积分公式推广成如下的形式:

(1) $\int Kdu=Ku+C$;

(2) $\int u^\alpha du=\frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}+C$; $(\alpha\neq-1)$

(3) $\int\sin udu=-\cos u+C$;

(4) $\int\cos udu=\sin u+C$;

(5) $\int e^u du=e^u+C$;

(6) $\int\frac{1}{u}du=\ln|u|+C$;

(7) $\int \frac{1}{1+u^2} du = \text{arctg}u + C$;　　(8) $\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du = \arcsin u + C$;

(9) $\int \frac{1}{\cos^2 u} du = \text{tg}u + C$;　　(10) $\int \frac{1}{\sin^2 u} du = -\text{ctg}u + C$。

其中u是x的函数$u = u(x)$.

例 2　求$\int \cos 3x dx$.

解：由于$\int \cos u du = \sin u + C$，我们可以取$u = 3x$，则$du = 3dx$，或$dx = \frac{1}{3} du$，于是便得

$$\int \cos 3x dx = \frac{1}{3} \int \cos u du = \frac{1}{3} \sin u + C.$$

再把$u = 3x$代入上式，就得到

$$\int \cos 3x dx = \frac{1}{3} \sin 3x + C.$$

例 3　求$\int \frac{dx}{2x-3}$.

解：由于$\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$，我们可以取$u = 2x - 3$，则$du = 2dx$，或$dx = \frac{1}{2} du$，于是便得

$$\int \frac{dx}{2x-3} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln|u| + C = \frac{1}{2} \ln|2x-3| + C.$$

例 4　求$\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$.

解：由于$\int \frac{du}{1+u^2} = \text{arctg}u + C$，因此将原积分作如下的变形

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2}.$$

设　$u = \frac{x}{a}$，则$du = \frac{1}{a} dx$，$dx = a du$. 于是便得

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{a du}{1 + u^2} = \frac{1}{a} \int \frac{du}{1+u^2}$$

$$= \frac{1}{a} \text{arc tg}u + C = \frac{1}{a} \text{arc tg} \frac{x}{a} + C.$$

例 5　求$\int x\sqrt{1+x^2} dx$.

解：设 $u=1+x^2$，则$du=2xdx$，于是便得

$$\int x\sqrt{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}du=\frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}}+C=\frac{1}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}}+C$$

$$=\frac{1}{3}\sqrt{(1+x^2)^3}+C.$$

例 6 求$\int\sin^3x\cos xdx$.

解：设 $u=\sin x$，则$du=\cos xdx$，于是便得

$$\int\sin^3x\cos xdx=\int u^3du=\frac{1}{4}u^4+C=\frac{1}{4}\sin^4x+C.$$

当练习比较纯熟后，就可以不必把u写出来。

例 7 求下列不定积分：

(1) $\int\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right)dt$; (2) $\int\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx$.

解： (1) $\int\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right)dt=\frac{T}{2\pi}\int\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right)d\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right)$

$$=-\frac{T}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi\right)+C;$$

(2) $\int\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}dx=-\frac{1}{2}\int(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}d(a^2-x^2)=-\sqrt{a^2-x^2}+C.$

例 8 求定积分$\int_0^{\frac{7}{3}}\frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx$.

解：先求不定积分：

$$\int\frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx,$$

为此，设$u=\sqrt[3]{3x+1}$，则$x=\frac{u^3-1}{3}$，从而$dx=u^2du$，代入得

$$\int\frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx=\frac{1}{3}\int(u^4+2u)du=\frac{1}{3}\left(\frac{u^5}{5}+u^2\right)+C$$

$$=\frac{1}{15}(3x+1)^{\frac{5}{3}}+\frac{1}{3}(3x+1)^{\frac{2}{3}}+C.$$

再根据微积分基本公式，可知

$$\int_0^{\frac{7}{3}}\frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx=\left[\frac{1}{15}(3x+1)^{\frac{5}{3}}+\frac{1}{3}(3x+1)^{\frac{2}{3}}\right]\Bigg|_0^{\frac{7}{3}}$$

$$=\left(\frac{32}{15}+\frac{4}{3}\right)-\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{3}\right)=\frac{46}{15}.$$

四、积分表的使用法

前面我们利用基本积分公式和换元积分法，求出了一些函数的不定积分．为了求出更多类型函数的不定积分，我们常使用积分表（参考本书最后附录二）．

积分表是按照被积函数的类型排列的．在用积分表求积分时，只要根据被积函数的类型，到表中查相应的公式，再把结果写出来就可以了．

例1 查表求下列不定积分：

(1) $\int \frac{5x\,dx}{\sqrt{3+x}}$；　(2) $\int \frac{dx}{10+4x+4x^2}$；　(3) $\int \sin 4x \cos 2x\,dx$．

解：(1) 这个积分属于简单积分表中公式（11），取$a=3$，$b=1$，得

$$\int \frac{5x\,dx}{\sqrt{3+x}} = 5\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3+x}} = 5\cdot\frac{2(x-2\cdot 3)\sqrt{3+x}}{3\cdot 1^2}+C$$

$$=\frac{10(x-6)\sqrt{3+x}}{3}+C;$$

(2) 这个积分属于简单积分表中公式(53)，取$a=10, b=4, c=4$，这时$b^2<4ac$，于是得

$$\int \frac{dx}{10+4x+4x^2} = \frac{1}{\sqrt{4\cdot 10\cdot 4-4^2}}\text{arc tg}\frac{2\cdot 4x+4}{\sqrt{4\cdot 10\cdot 4-4^2}}+C$$

$$=\frac{2}{\sqrt{144}}\text{arc tg}\frac{8x+4}{\sqrt{144}}+C$$

$$=\frac{1}{6}\text{arc tg}\frac{2x+1}{3}+C;$$

(3) 这个积分属于简单积分表中公式（68），取$a=4$，$b=2$，这时$a\neq b$，于是得

$$\int \sin 4x\cos 2x\,dx = -\frac{\cos(4+2)x}{2(4+2)}-\frac{\cos(4-2)x}{2(4-2)}+C$$

$$=-\frac{1}{12}\cos 6x-\frac{1}{4}\cos 2x+C.$$

例2 查表求$\int \cos^5 x\,dx$．

解：这个积分属于简单积分表中公式（71），取$n=5$，得

$$\int \cos^5 x\,dx = \frac{1}{5}\cos^4 x\ \sin x+\frac{4}{5}\int \cos^3 x\,dx.$$

再利用公式(71)，得

$$\int \cos^3 x\,dx = \frac{1}{3}\cos^2 x\ \sin x+\frac{2}{3}\int \cos x\,dx$$

$$=\frac{1}{3}\cos^2 x\ \sin x+\frac{2}{3}\sin x+C_1,$$

所以

$$\int \cos^5 x dx = \frac{1}{5}\cos^4 x \sin x + \frac{4}{5}\left(\frac{1}{3}\cos^2 x \sin x + \frac{2}{3}\sin x + C_1\right)$$
$$= \frac{1}{5}\cos^4 x \sin x + \frac{4}{15}\cos^2 x \sin x + \frac{8}{15}\sin x + C.$$

习　　题

1.利用幂函数的积分公式，求下列不定积分：

(1) $\int x^6 dx$;　(2) $\int \frac{1}{x^5} dx$;　(3) $\int x^2 \sqrt{x} dx$;

(4) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^3}}$;　(5) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4}}$.

2.利用不定积分的性质，求下列不定积分：

(1) $\int (1-x)^2 dx$;　(2) $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$;　(3) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x} dx$;

(4) $\int \frac{dh}{\sqrt{2gh}}$;　(5) $\int \frac{t^2+t-5}{t} dt$;　(6) $\int \frac{2+\cos^2\theta}{\cos^2\theta} d\theta$;

(7) $\int \frac{x^2}{x^2+1} dx$;　(8) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$.

3.利用换元积分法，求下列不定积分：

(1) $\int (x-4)^{12} dx$;　(2) $\int \sqrt{2+3x}\, dx$;

(3) $\int \frac{dx}{\cos^2\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}$;　(4) $\int \frac{dt}{1-2t}$;

(5) $\int \frac{x}{1-x^2} dx$;　(6) $\int x\sqrt{1+2x^2}\, dx$;

(7) $\int \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}} dx$;　(8) $\int \frac{\cos x}{1+\sin x} dx$;

(9) $\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx$;　(10) $\int \operatorname{ctg} x\, dx$;

(11) $\int \frac{dt}{(2t-5)^4}$;　(12) $\int \frac{x^2}{1+x^3} dx$.

4.计算下列定积分：

(1) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x\, dx$;　(2) $\int_2^3 \sqrt{6x-9}\, dx$;

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{d\varphi}{\cos^2 2\varphi}$;　　(4) $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\theta^2} \sin \frac{1}{\theta} d\theta$;

(5) $\int_0^1 (e^x - 1)^4 e^x dx$;　　(6) $\int_0^{\frac{T}{2}} \sin \left(\frac{2\pi}{T} t + \varphi\right) dt$.

5. 利用简单积分表，求下列积分：

(1) $\int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}}$;　　(2) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 25}}$;

(3) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}$;　　(4) $\int \frac{dx}{4 - 9x^2}$;

(5) $\int \sin 5x \sin 3x dx$;　　(6) $\int x^2 \sin x dx$;

(7) $\int \cos^2(\omega t + \varphi) dt$;　　(8) $\int \frac{x dx}{x^2 - 2x + 5}$ 〔提示：利用公式(18)〕;

(9) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$;　　(10) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx$.

第四节　定积分的应用

毛主席教导我们说："**理论的基础是实践，又转过来为实践服务。**"前面几节讨论了定积分的概念和计算方法，本节通过例题，使学员进一步了解如何运用定积分去解决实际问题.

根据微分和积分的关系可知，运用定积分解决实际问题必须经历两个过程：

(1) 求出所求量的微分，即被积表达式. 这是一个化整为零的过程；

(2) 把微分无限积累，便得所求的量，这是一个积零为整的过程.

这种方法可概括为下面的形式：

整体量(未知) $\xrightarrow{\text{化整为零}}$ 局部量(即整体量的微分) $\xrightarrow{\text{积零为整}}$ 整体量(已知)

A　　　$dA = f(x)dx$　　　$A = \int_a^b f(x)dx$

例1　求椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的面积 A (图17—10).

解： 根据椭圆的对称性，只要计算椭圆在第一象限部分的面积，再四倍起来就可以了. 而上半椭圆的方程是：

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

把区间$[0,a]$无限细分，在区间$[x,x+dx]$上图中阴影部分的面积就是面积的微分，即

$$dA=ydx=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}dx.$$

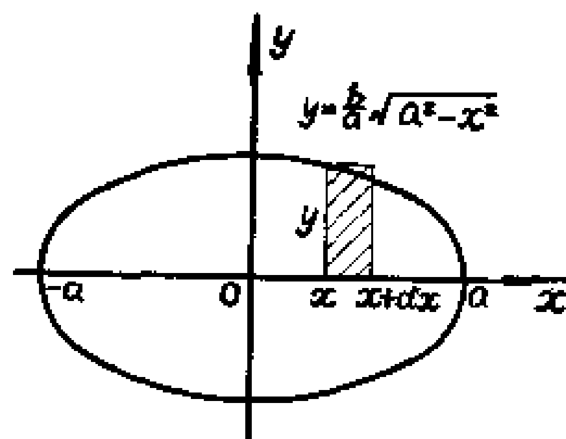


图17—10

在区间$[0,a]$上，把面积的微分无限积累，得椭圆在第一象限部分的面积

$$A_1=\int_0^a ydx=\int_0^a \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}dx$$

$$=\frac{b}{a}\left(\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}\right)\Big|_0^a$$

$$=\frac{b}{a}\cdot\frac{a^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}ab.$$

所以 $$A=4A_1=\pi ab.$$

例 2　求由两条抛物线$y^2=x$和$y=x^2$所围成的图形的面积A（图17—11）.

解：为了确定积分变量x的变化范围，先求出这两条抛物线的交点.为此,解方程组:

$$\begin{cases}y^2=x,\\ y=x^2,\end{cases}$$

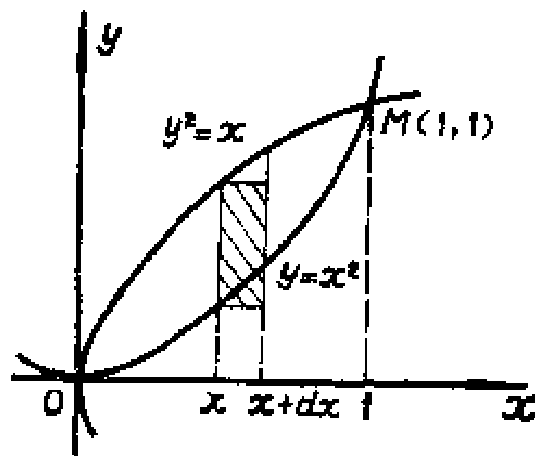


图17—11

得到两组解：$x=0$，$y=0$；$x=1$，$y=1$.

即这两条抛物线的交点为(0，0)及(1，1).从而知道积分变量x的变化范围是区间$[0,1]$.

把区间$[0,1]$无限细分，在区间$[x,x+dx]$上图中阴影部分的面积就是面积的微分,即

$$dA=(\sqrt{x}-x^2)dx.$$

在区间$[0,1]$上，把面积的微分无限积累，得

$$A=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}.$$

例 3　求半径为R的球体的体积V.

解：半径为R的球体，可以看作由上半个圆

$$y=\sqrt{R^2-x^2}$$

及x轴围成的图形，绕x轴旋转一周而成的立体（图17—12）.

把区间$[-R,R]$无限细分，在区间$[x,x+dx]$上，以半径为$y=\sqrt{R^2-x^2}$、高为dx的圆柱体的体积就是体积的微分，即

$$dV=\pi y^2dx=\pi(R^2-x^2)dx.$$

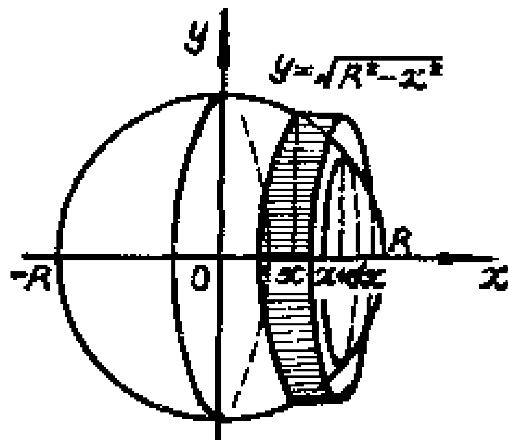


图17—12

在区间$[-R,R]$上,把体积的微分无限积累，得所求的体积

$$V=\int_{-R}^{R}\pi(R^2-x^2)dx=\pi\left(R^2x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-R}^{R}$$

$$=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

例 4　由实验知道，弹簧在拉伸过程中，所需外力的大小F（单位是公斤）与弹簧伸长量S（单位是厘米）成正比，即

$$F=KS \quad (K\text{是比例系数}).$$

如果把弹簧由原长拉伸 6 厘米，试求外力所作的功W（图17—13）．

解： 把区间[0,6]细分，在区间[S,S+dS]上变力F等同于常力，于是得功的微分

$$dW=FdS=KSdS.$$



图17—13

在区间[0,6]上，把功的微分无限积分，得所求的功

$$W=\int_0^6 KSdS=\frac{K}{2}S^2\Big|_0^6=18K\ (\text{公斤·厘米}).$$

例 5　把一个带$+q$电量的点电荷放在r轴上坐标原点O处，它的周围产生一个电场．这个电场对周围的电荷有作用力．由物理学知道，如果有一个单位正电荷放在这个电场中距离原点O为r的地方，那末电场对它的作用力的大小为

$$F=K\frac{q}{r^2}\quad (K\text{是常数}).$$

如图17—14，当这个单位正电荷在电场中从$r=a$处沿r轴移动到$r=b$ $(a<b)$处时，试求电场力F对它所作的功W.

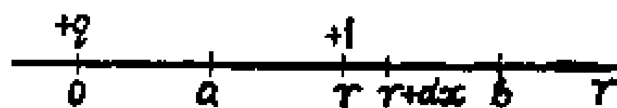


图17—14

解： 把区间[a,b]细分，在区间[$r,r+dr$]上变力等同于常力，于是得功的微分

$$dW=Fdr=K\cdot\frac{q}{r^2}dr.$$

在区间[a,b]上，把功的微分无限积累，得所求的功

$$W=\int_a^b K\frac{q}{r^2}dr=Kq\left(-\frac{1}{r}\right)\Big|_a^b=Kq\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right).$$

根据功的这个表达式，如果单位正电荷由a处移到无限远处，也就是说让b无限变大（即$b\to+\infty$），这时，电场力所作的功显然应该运用极限来计算，即

$$W=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b K\frac{q}{r^2}dr=\lim_{b\to+\infty}Kq\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=\frac{Kq}{a}.$$

在物理学中，单位正电荷在电场中由a处移到无限远处时，电场力所作的功叫做此电场在a处的电位．记作U．所以上述电场在a处的电位是

$$U=\frac{Kq}{a}.$$

这里我们遇到了求一个函数 $f(x)$ 的积分$\int_a^b f(x)dx$，当$b\to+\infty$时的极限，即

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx,$$

这个极限通常记作$\int_a^{+\infty} f(x)dx$，并叫做函数在无限区间$[a,+\infty]$上的积分．为了区别于以前的定积分，我们把这种积分叫做广义积分，即

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx=\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

习　　题

1.求由抛物线$y=x^2$和直线$y=2x+3$所围成的图形的面积．

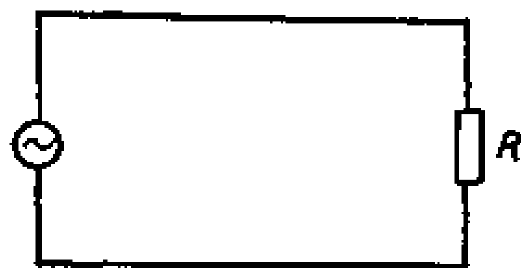
2.求由两条抛物线$y=-x^2+8$和$y=x^2$所围成的图形的面积．

3.求底半径为R、高为H的正圆锥体的体积．

4.物体按规律$x=ct^3$作直线运动，式中x为时间t内经过的距离，介质的阻力与运动速度的平方成正比（比例系数为K）．求物体由$x=0$处运动到$x=a$处时，克服阻力所作的功．

5.在放电过程中，已知放电电流$i=10^{-3}e^{-\frac{t}{10}}$($i$的单位是安培，$t$的单位是秒)，问$t$从2秒到6秒内共放出多少电量？

6.在纯电阻的电路中，已知电流$i=I_m\sin\omega t$，求t从0到$\frac{2\pi}{\omega}$这一周期内消耗在电阻R上的功．



（第6题）

7.如果1公斤的力能使弹簧伸长2厘米，试求将弹簧拉长8厘米所作的功．

复　习　题

1.如果将电容C和电阻R串联接于电压为U的直流电源两端，那末电容器就被充电．由电工学知：在充电过程中，电流

$$i=\frac{U}{R}e^{-\frac{t}{\tau}},$$

其中 $\tau=RC$ 为时间常数.试用定积分表示从$t=0$到$t=3\tau$时间内电容器极板上积累的电量Q.

2.若功率是时间 t 的函数$p(t)$，试用定积分表示从t_1到t_2时间内所作的功W.

3.若运动的速度为$v(t)=Kt$，其中K为常数，t 表示时间. 试用定积分表示从 $t=0$ 到 $t=3$ 时间内运动的路程S，并计算出该路程.

4.根据定积分的几何意义，画出下列积分所代表的图形的面积，并求出面积的值:

(1) $\int_0^2 xdx$;　　(2) $\int_2^3 xdx$;　　(3) $\int_2^5 4dx$;

(4) $\int_{-1}^1 4dx$;　　(5) $\int_0^1 (1-x)dx$;　　(6) $\int_{-1}^0 (1+x)dx$;

(7) $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$;　　(8) $\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$.

5.定积分$\int_0^1 xdx$和$\int_0^1 x^2dx$那一个值大呢？为什么？

6.用定积分的几何意义说明：若 $y=f(x)$为偶函数，则$\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$；若 $y=f(x)$为奇函数，则$\int_{-a}^a f(x)dx=0$，其中a为任意实数.

7.以初速$v_0=20$米/秒向上抛物体，若空气阻力忽略不计，t 秒钟的速度为$v=v_0-gt$. 求 2 秒钟内物体上抛的距离.

8.求下列不定积分:

(1) $\int\left(2-\frac{1}{\cos^2 x}\right)dx$;　　(2) $\int\left(\cos x-\frac{2}{1+x^2}+\frac{1}{4\sqrt{1-x^2}}\right)dx$;

(3) $\int\frac{dx}{7-5x}$;　　(4) $\int\frac{dx}{\sqrt{1-2x^2}}$;

(5) $\int\left(e^{\frac{t}{2}}+e^{-\frac{t}{2}}\right)dt$;　　(6) $\int\cos^7 x\sin x dx$;

(7) $\int\frac{\ln^2 x}{x}dx$;　　(8) $\int\frac{dx}{\sqrt{2-8x^2}}$;

(9) $\int\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$;　　(10) $\int\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx$;

(11) $\int\sqrt[3]{(1-2x)^2}\,dx$;　　(12) $\int x^2\sqrt{1-x^3}\,dx$;

(13) $\int\frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}dx$;　　(14) $\int\frac{dx}{25+4x^2}$.

9. 求下列定积分：

(1) $\int_0^{\frac{1}{3}}\frac{dx}{4-3x}$；　　(2) $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{3-2x}\,dx$；

(3) $\int_0^2 x^2\sqrt{1+x^3}\,dx$；　　(4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos^3 t\,dt$；

(5) $\int_1^2\frac{dy}{(2y-1)^2}$；　　(6) $\int_0^4 t(t+\sqrt{t})\,dt$.

10. 设 m、n 为正整数，求下列定积分：

(1) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cos nx\,dx$；　　(2) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx\,dx$，$(m\neq n)$；

(3) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 mx\,dx$；　　(4) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 mx\,dx$；

(5) $\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx\,dx$，$(m\neq n)$.

11. 求下列曲线所围成的图形的面积：

(1) 抛物线 $y=x^2$ 与直线 $y=x+2$；

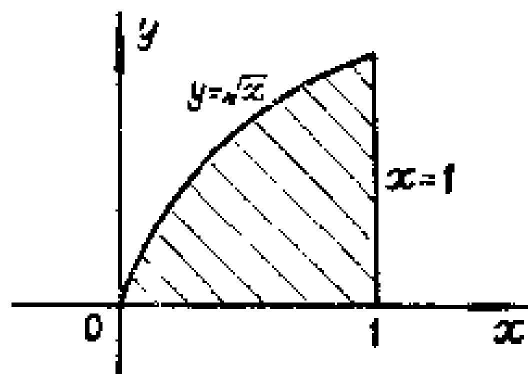
(2) 两条抛物线 $y=x^2$ 与 $y=1-x^2$；

(3) 双曲线 $y=\frac{1}{x}$ 与直线 $y=x$ 及 $x=2$；

(4) 抛物线 $y=\frac{1}{2}x^2$ 分割圆 $x^2+y^2=8$ 为两部分.

12. 求由抛物线 $y=\sqrt{x}$，直线 $x=1$ 和 x 轴所围成的图形，绕 x 轴旋转一周所得的立体的体积.

13. 根据万有引力定律知：发射火箭时，地球对火箭的引力 $F=mg\frac{R^2}{r^2}$，其中 $R=6371$（公里）为地球的半径，m 为火箭的质量，r 为地球中心到火箭的距离，g 为重力加速度. 如果火箭垂直发射到地球引力圈以外去，需作多少功？火箭所需的初速度为多少？



（第12题）

附　录：

一、几何图形的面积和体积

1.简单平面图形的面积公式：

名　称	图　形	面　积　公　式
正方形		$A=$ 边长 $\times$ 边长 $=a^2$
矩　形		$A=$ 长 $\times$ 宽 $=a\times b$
三角形		$A=\frac{1}{2}$(底 $\times$ 高) $=\frac{1}{2}(a\times h)$
平　行 四边形		$A=$ 底 $\times$ 高 $=a\times h$
梯　形		$A=\frac{\text{上底}+\text{下底}}{2}\times$ 高 $=\frac{a+b}{2}\times h$
圆		$A=\pi\times$(半径)$^2=\pi R^2$ 或 $A=\frac{\pi}{4}\times$(直径)$^2=\frac{\pi}{4}D^2$
扇　形		$A=\frac{1}{2}\times$ 弧长 $\times$ 半径 $=\frac{1}{2}lR$ 或 $A=\frac{1}{2}\times$ 圆心角(弧度) $\times$ (半径)$^2=\frac{1}{2}\alpha R^2$

名 称	图 形	面 积 公 式
弓 形		A=(扇形面积)−(三角形面积) $=\frac{1}{2}\alpha R^2-\frac{b}{2}(R-h)$
椭 圆		$A=\pi\times$(长半轴)$\times$(短半轴)$=\pi ab$

2.简单几何体的表面积公式和体积式:

名 称	图 形	表面积公式或侧面积公式	体 积 公 式
正方体		表面积$s=6a^2$	$V=a^3$
长方体		表面积$s=2(ab+ah+bh)$	V=长×宽×高$=abh$
正圆柱体		侧面积s=底面周长×高 $=2\pi rh$ $=\pi dh$	V=底面积×高 $=\pi r^2h$ $=\frac{\pi}{4}d^2h$
正棱柱体		侧面积s=底面周长×高 $=Ph$	V=底面积×高 $=Ah$

名　称	图　　形	表面积公式或侧面积公式	体　积　公　式
正圆锥体		侧面积$s=\frac{1}{2}$底面周长×母线长 $=\frac{1}{2}\pi Dl=\pi rl$ $=\pi r\sqrt{r^2+h^2}$	$V=\frac{1}{3}$底面积×高 $=\frac{1}{3}\pi r^2h$
正棱锥体			$V=\frac{1}{3}$底面积×高 $=\frac{1}{3}Ah$
正圆台体		侧面积$s=\frac{1}{2}$（上底周长＋下底周长）×母线长 $=\frac{1}{2}\pi(d+D)l$	$V=\frac{1}{3}\pi h(r^2+rR+R^2)$
正棱台体			$V=\frac{1}{3}h(A_1+\sqrt{A_1A_2}+A_2)$ 其中：h—高， A_1—上底面积， A_2—下底面积
球		表面积$s=4\pi R^2$ $=\pi D^2$	$V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{1}{6}\pi D^3$
球　缺（球冠）		表面积$s=2\pi Rh$ 或$s=\pi(r^2+h^2)$ （球冠面积）	$V=\pi h^2(R-\frac{h}{3})$ 或$V=\frac{\pi h}{6}(h^2+3r^2)$ （球缺体积）

二、简单积分表

说明：公式中的 α、a、b 均为实数；m、n 为正整数。

1. 含有 $a+bx$ 的积分

(1) $\int (a+bx)^{\alpha} dx = \frac{(a+bx)^{\alpha+1}}{b(\alpha+1)} + C$，当 $\alpha \neq -1$；

$= \frac{1}{b}\ln|a+bx| + C$，当 $\alpha = -1$；

(2) $\int \frac{x dx}{a+bx} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b^2}\ln|a+bx| + C$；

(3) $\int \frac{x^2 dx}{a+bx} = \frac{1}{b^3}\left[\frac{1}{2}(a+bx)^2 - 2a(a+bx) + a^2\ln|a+bx|\right] + C$；

(4) $\int \frac{x dx}{(a+bx)^2} = \frac{1}{b^2}\left(\frac{a}{a+bx} + \ln|a+bx|\right) + C$；

(5) $\int \frac{x^2 dx}{(a+bx)^2} = \frac{x}{b^2} - \frac{a^2}{b^3(a+bx)} - \frac{2a}{b^3}\ln|a+bx| + C$；

(6) $\int \frac{dx}{x(a+bx)} = \frac{1}{a}\ln\left|\frac{x}{a+bx}\right| + C$；

(7) $\int \frac{dx}{x^2(a+bx)} = -\frac{1}{ax} + \frac{b}{a^2}\ln\left|\frac{a+bx}{x}\right| + C$；

(8) $\int \frac{dx}{x(a+bx)^2} = \frac{1}{a(a+bx)} - \frac{1}{a^2}\ln\left|\frac{a+bx}{x}\right| + C$。

2. 含有 $\sqrt{a+bx}$ 的积分

(9) $\int x\sqrt{a+bx}\, dx = \frac{2(3bx-2a)(a+bx)^{\frac{3}{2}}}{15b^2} + C$；

(10) $\int x^2\sqrt{a+bx}\, dx = \frac{2(15b^2x^2-12abx+8a^2)(a+bx)^{\frac{3}{2}}}{105b^3} + C$；

(11) $\int \frac{x\, dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2(bx-2a)\sqrt{a+bx}}{3b^2} + C$；

(12) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2(3b^2x^2-4abx+8a^2)(\sqrt{a+bx})}{15b^3} + C$；

$$(13)\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}=\frac{1}{\sqrt{a}}\ln\frac{|\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}|}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}+C，\text{当}a>0；$$

$$=\frac{2}{\sqrt{-a}}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{a+bx}{-a}}+C，\text{当}a<0；$$

$$(14)\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a+bx}}=-\frac{\sqrt{a+bx}}{ax}-\frac{b}{2a}\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}；$$

$$(15)\int \frac{\sqrt{a+bx}}{x}dx=2\sqrt{a+bx}+a\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}；$$

$$(16)\int \frac{\sqrt{a+bx}}{x^2}dx=-\frac{\sqrt{a+bx}}{x}+\frac{b}{2}\int\frac{dx}{x\sqrt{a+bx}}.$$

3.含有$a^2\pm x^2$的积分

$$(17)\int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n}=\frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a}+C，\text{当}n=1；$$

$$=\frac{x}{2(n-1)a^2(a^2+x^2)^{n-1}}+\frac{2n-3}{2(n-1)a^2}\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}}，\text{当}n>1；$$

$$(18)\int \frac{x\,dx}{(a^2+x^2)^n}=\frac{1}{2}\ln(a^2+x^2)+C，\text{当}n=1；$$

$$=-\frac{1}{2(n-1)(a^2+x^2)^{n-1}}+C，\text{当}n>1；$$

$$(19)\int \frac{dx}{a^2-x^2}=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+C.$$

4.含有$\sqrt{a^2-x^2}$的积分

$$(20)\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C；$$

$$(21)\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx=-\frac{1}{3}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}+C；$$

$$(22)\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\frac{x}{8}(2x^2-a^2)\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a}+C；$$

$$(23)\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C；$$

$$(24)\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\sqrt{a^2-x^2}+C；$$

$$(25)\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C;$$

$$(26)\int (a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}dx=\frac{x}{8}(5a^2-2x^2)\sqrt{a^2-x^2}+\frac{3a^4}{8}\arcsin\frac{x}{a}+C;$$

$$(27)\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}+C;$$

$$(28)\int \frac{x\,dx}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}+C;$$

$$(29)\int \frac{x^2dx}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}-\arcsin\frac{x}{a}+C;$$

$$(30)\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{a}\ln\left|\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|+C;$$

$$(31)\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2x}+C;$$

$$(32)\int \frac{dx}{x^3\sqrt{a^2-x^2}}=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2a^2x^2}-\frac{1}{2a^3}\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|+C;$$

$$(33)\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx=\sqrt{a^2-x^2}-a\ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right|+C;$$

$$(34)\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}dx=-\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}-\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

5. 含有$\sqrt{x^2\pm a^2}$的积分

$$(35)\int \sqrt{x^2\pm a^2}\,dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}\pm\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C;$$

$$(36)\int x\sqrt{x^2\pm a^2}\,dx=\frac{1}{3}(x^2\pm a^2)^{\frac{3}{2}}+C;$$

$$(37)\int x^2\sqrt{x^2\pm a^2}\,dx=\frac{x}{8}(2x^2\pm a^2)\sqrt{x^2\pm a^2}-\frac{a^4}{8}\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C;$$

$$(38)\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C;$$

$$(39)\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\sqrt{x^2\pm a^2}+C;$$

$$(40)\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}\mp\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C;$$

$$(41)\int (x^2\pm a^2)^{\frac{3}{2}}dx=\frac{x}{8}(2x^2\pm 5a^2)\sqrt{x^2\pm a^2}+\frac{3a^4}{8}\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C;$$

$$(42)\int \frac{dx}{(x^2\pm a^2)^{\frac{3}{2}}}=\pm\frac{x}{a^2\sqrt{x^2\pm a^2}}+C;$$

$$(43)\int \frac{xdx}{(x^2\pm a^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}+C;$$

$$(44)\int \frac{x^2dx}{(x^2\pm a^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{x}{\sqrt{x^2\pm a^2}}+\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C;$$

$$(45)\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2\pm a^2}}=\mp\frac{\sqrt{x^2\pm a^2}}{a^2x}+C;$$

$$(46)\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+a^2}}=-\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{2a^2x^2}+\frac{1}{2a^3}\ln\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{|x|}+C;$$

$$(47)\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{2a^2x^2}+\frac{1}{2a^3}\arccos\frac{a}{x}+C;$$

$$(48)\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}dx=\sqrt{x^2+a^2}-a\ln\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{|x|}+C;$$

$$(49)\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx=\sqrt{x^2-a^2}-a\arccos\frac{a}{x}+C;$$

$$(50)\int \frac{\sqrt{x^2\pm a^2}}{x^2}dx=-\frac{\sqrt{x^2\pm a^2}}{x}+\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C;$$

$$(51)\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}}=\frac{1}{a}\ln\frac{|x|}{a+\sqrt{x^2+a^2}}+C;$$

$$(52)\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{1}{a}\arccos\frac{a}{x}+C.$$

6. 含有 $a+bx+cx^2$ 的积分

$$(53)\int \frac{dx}{a+bx+cx^2}=\frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\operatorname{arc\,tg}\frac{2cx+b}{\sqrt{4ac-b^2}}+C,\ \text{当}\ b^2<4ac;$$

$$=\frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\left|\frac{\sqrt{b^2-4ac}-b-2cx}{\sqrt{b^2-4ac}+b+2cx}\right|+C,\ \text{当}\ b^2>4ac.$$

7. 含有$\sqrt{a+bx+cx^2}$的积分

(54) $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=\frac{1}{\sqrt{c}}\ln\left|2cx+b+2\sqrt{c(a+bx+cx^2)}\right|+C$，当$c>0$；

$=-\frac{1}{\sqrt{-c}}\arcsin\frac{2cx+b}{\sqrt{b^2-4ac}}+C$，当$b^2>4ac$，$c<0$；

(55) $\int \sqrt{a+bx+cx^2}\,dx=\frac{2cx+b}{4c}\sqrt{a+bx+cx^2}+\frac{4ac-b^2}{8c}\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$；

(56) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}=\frac{1}{c}\sqrt{a+bx+cx^2}-\frac{b}{2c}\int\frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}}$.

8. 含有三角函数的积分

(57) $\int \sin ax\,dx=-\frac{1}{a}\cos ax+C$;

(58) $\int \cos ax dx=\frac{1}{a}\sin ax+C$;

(59) $\int \mathrm{tg}\,ax dx=-\frac{1}{a}\ln|\cos ax|+C$;

(60) $\int \mathrm{ctg}\,ax\,dx=\frac{1}{a}\ln|\sin ax|+C$;

(61) $\int \sin^2 ax dx=\frac{1}{2a}(ax-\sin ax\cos ax)+C$;

(62) $\int \cos^2 ax dx=\frac{1}{2a}(ax+\sin ax\cos ax)+C$;

(63) $\int \sec ax\,dx=\frac{1}{a}\ln|\sec ax+\mathrm{tg}\,ax|+C$;

(64) $\int \csc ax\,dx=-\frac{1}{a}\ln|\csc ax+\mathrm{ctg}\,ax|+C$;

(65) $\int \sec x\,\mathrm{tg}\,x dx=\sec x+C$;

(66) $\int \csc x\,\mathrm{ctg}\,x dx=-\csc x+C$;

(67) $\int \sin ax\sin bx dx=-\frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)}+\frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)}+C$，当$a\neq b$时；

(68) $\int \sin ax\cos bx dx = -\frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} - \frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} + C$，当$a \neq b$时；

(69) $\int \cos ax\cos bx dx = \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} + \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + C$，当$a \neq b$时；

(70) $\int \sin^n x dx = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}x dx$；

(71) $\int \cos^n x dx = \frac{1}{n}\cos^{n-1}x\sin x + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2}x dx$；

(72) $\int \mathrm{tg}^n x dx = \frac{1}{n-1}\mathrm{tg}^{n-1}x - \int \mathrm{tg}^{n-2}x dx$，$n>1$；

(73) $\int \mathrm{ctg}^n x dx = -\frac{1}{n-1}\mathrm{ctg}^{n-1}x - \int \mathrm{ctg}^{n-2}x dx$，$n>1$；

(74) $\int \sec^n x dx = \frac{1}{n-1}\mathrm{tg}x\sec^{n-2}x + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2}x dx$，$n>1$；

(75) $\int \csc^n x dx = -\frac{1}{n-1}\mathrm{ctg}x\csc^{n-2}x + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2}x dx$，$n>1$；

(76) $\int \sin^m x\cos^n x dx = \frac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\int \sin^m x\cos^{n-2}x dx$

$= -\frac{\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\int \sin^{m-2}x\cos^n x dx$；

(77) $\int \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\mathrm{arc\,tg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right) + C$，当$a^2>b^2$；

$= \frac{1}{\sqrt{b^2-a^2}}\ln\left|\frac{b+a\cos x+\sqrt{b^2-a^2}\sin x}{a+b\cos x}\right| + C$，当$a^2<b^2$；

9.其他形式的积分

(78) $\int x^n e^{ax} dx = \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}dx$；

(79) $\int x^\alpha \ln x dx = \frac{x^{\alpha+1}}{(\alpha+1)^2}[(\alpha+1)\ln x - 1] + C$，当$\alpha \neq -1$时；

(80) $\int x^n \sin x dx = -x^n\cos x + n\int x^{n-1}\cos x dx$；

(81) $\int x^n \cos x dx = x^n\sin x - n\int x^{n-1}\sin x dx$；

$$(82)\int e^{ax}\sin bx dx=\frac{e^{ax}(a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}+C;$$

$$(83)\int e^{ax}\cos bx dx=\frac{e^{ax}(a\cos bx+b\sin bx)}{a^2+b^2}+C;$$

$$(84)\int \arcsin\frac{x}{a}dx=x\arccos\frac{x}{a}+\sqrt{a^2-x^2}+C;$$

$$(85)\int \arccos\frac{x}{a}dx=x\arccos\frac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}+C;$$

$$(86)\int \operatorname{arctg}\frac{x}{a}dx=x\operatorname{arctg}\frac{x}{a}-\frac{a}{2}\ln(a^2+x^2)+C;$$

$$(87)\int x^n\arcsin x dx=\frac{1}{n+1}\left(x^{n+1}\arcsin x-\int\frac{x^{n+1}}{\sqrt{1-x^2}}dx\right);$$

$$(88)\int x^n\operatorname{arctg}x dx=\frac{1}{n+1}\left(x^{n+1}\operatorname{arctg}x-\int\frac{x^{n+1}}{1+x^2}dx\right).$$

10. 几个常用的定积分

$$(89)\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx dx=\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx dx=0;$$

$$(90)\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\sin nx dx=0;$$

$$(91)\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cos nx dx=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ \pi, & m=n;\end{cases}$$

$$(92)\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\sin nx dx=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ \pi, & m=n;\end{cases}$$

$$(93)\int_{0}^{\pi}\sin mx\sin nx dx=\int_{0}^{\pi}\cos mx\cos nx dx=\begin{cases}0, & m\neq n,\\ \frac{\pi}{2}, & m=n;\end{cases}$$

$$(94)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x dx=\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x dx=\begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}, & (n\text{为奇数})\\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}; & (n\text{为偶数});\end{cases}$$

$$(95)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m+1}x\cos^n x dx=\frac{2\cdot4\cdot6\cdots2m}{(n+1)(n+3)\cdots(n+2m+1)};$$

$$(96)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m}x\cos^{2n}x dx=\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)\cdot1\cdot3\cdot5\cdots(2m-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2m+2n)}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

三、习 题 答 案

第 一 章

第 一 节

1．(1) 如果把水位在水位线上 8 厘米记为 + 8 (厘米)，则水位在水位线下 2 厘米就记为 − 2 (厘米)．

2．如果把高于海面8000米的上空记为 + 8000(米)，那么就把低于海面3000米的海底记为 − 3000(米)．

3．A、B、C、D、E各点分别表示：2，−3，$-1\frac{1}{2}$，−1，4．

4．−3.5，6，$-2\frac{3}{4}$，1，$1\frac{2}{5}$，0．

5．15，3.14，$2\frac{1}{3}$，0，$\frac{1}{2}$．

6．$+1>0$，　$-1<0$，　$+4>-5$，

$-18<-17$，　$-0.27>-0.73$，　$-\frac{2}{3}>-\frac{3}{4}$，

$-\frac{3}{10}>-\frac{33}{100}$．

7．(1) +85；　(2) −13.2；　(3) +3.6；　(4) −1.2；

(5) $-\frac{3}{5}$；　(6) $+2\frac{2}{7}$；　(7) $+2\frac{2}{9}$；　(8) $+\frac{6}{11}$．

8．(1) −5；　(2) +13；　(3) −13；　(4) +5；

(5) −13；　(6) +13；　(7) −0.7；　(8) −5.439；

(9) $+\frac{5}{8}$；　(10) $+\frac{1}{6}$．

9．(1) +4；　(2) 0；　(3) $-4\frac{7}{8}$；　(4) +69.34；　(5) $-22\frac{5}{6}$．

10．(1) 0.05；　(2) 0.03；　(3) 0.2．

11．+0.07到+0.138．

12．(1) 49；　(2) $1\frac{1}{3}$；　(3) 1.2；　(4) $2\frac{3}{5}$；　(5) 10.7．

13．(1) −48；　(2) +70；　(3) 0；　(4) −3.72；　(5) $-\frac{8}{15}$；

(6) $+\frac{4}{7}$；　(7) $-2\frac{2}{5}$；　(8) $+\frac{1}{10}$；　(9) +64；　(10) $-\frac{4}{5}$．

14．(1) $+\frac{3}{5}$；　(2) $-\frac{3}{4}$；　(3) $-10\frac{1}{2}$；　(4) $+\frac{6}{43}$；　(5) $-5\frac{2}{25}$；

(6) -12.

15. (1) -1.696;　(2) -1.5;　(3) $2\frac{1}{10}$;　(4) $-\frac{4}{15}$;

(5) $-5\frac{7}{9}$;　(6) $10\frac{2}{3}$.

16. -3(厘米).

17. $5\frac{1}{4}$ (小时).

第　二　节

1. (1) $(-4)^2$;　(2) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$;　(3) $(-1.2)^4$;

(4) $10^3+\left(\frac{1}{10}\right)^2$;　(5) $\left(\frac{1}{2}\right)^4-\left(\frac{1}{3}\right)^3$.

2. (1) $-\frac{1}{8}$,　$\frac{1}{8}$,　-243,　243,　1,　-1,　0;

(2) 0.09,　-0.027,　1.69,　-2.197.

3. (1) 1×10^4;　(2) 3.4×10^6;　(3) 4.25×10^4;

(4) 9.6×10^6 (平方公里);　(5) 3×10^8 (米/秒).

4. (1) ±9;　(2) ±0.1;　(3) $\pm\frac{5}{8}$;　(4) $\pm1\frac{1}{11}$.

5. (1) 0.5;　(2) 20;　(3) $\frac{1}{16}$;　(4) $\frac{6}{13}$;

(5) -4;　(6) 0.1;　(7) -0.2.

6. (1) 57.91;　(2) 57.94;　(3) 5794;　(4) 0.5794;

(5) 27060;　(6) 0.0002706;　(7) 0.02710.

7. (1) 23.39;　(2) 23.46;　(3) 23460;　(4) 0.02346;

(5) 195500;　(6) 0.0001967;　(7) 0.5786;　(8) 14.33.

8. (1) 2.870;　(2) 5.697;　(3) 0.1962;　(4) 0.03[illegible]71;

(5) 821.2;　(6) 525.2;　(7) 0.9021;　(8) 1.650;

(9) 4.524;　(10) 28.19;　(11) 0.1486;　(12) 0.38[illegible].

9. (1) 63;　(2) 529;　(3) 2.54;　(4) 23.2;　(5) 1.732.

第一章　复　习　题

1. (1) 12;　(2) 3.8;　(3) $-20\frac{11}{12}$;　(4) 12;

(5) $-43\frac{1}{2}$;　(6) 128.36;　(7) $\frac{1}{3}$;　(8) $6\frac{4}{9}$.

2. $-0.357°C$.

3. 直径为50.12，49.98的轴是合格品.

4. $+0.05$到$+0.118$.

5. (1) 4394; (2) -74017; (3) 271.47; (4) -0.10689.

第 二 章

第 一 节

1. (1) $2a+5b$; (2) $(a+b)^2$; (3) $(a-b)^2$;
   (4) a^2-b^2; (5) $5x-7$.

2. 圆面积$A=\pi R^2$，圆周长$C=2\pi R$.

3. $\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{a\times c}{b\times d}=\frac{ac}{bd}$; $\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$.

4. (1) -4; (2) 4; (3) 1; (4) 51; (5) -5;
   (6) $-\frac{1}{4}$; (7) -5; (8) $\frac{1}{6}$; (9) 3; (10) 4.

5. (1) 2; (2) -1; (3) $\frac{3}{5}$;
   (4) 6; (5) 3; (6) 13.

6. $0.15(米)^2$. 7. 117.8(米/分). 8. 24.1(米/分).

9. 5(安培) 10. 36(伏特).

第 二 节

2. (1) $x-4$; (2) $9y^2-4$; (3) $7ab-5c^2$;
   (4) $-x^2-x+3$; (5) $0.2y^2$; (6) $b^2-1\frac{1}{2}a^2-\frac{2}{3}ab$.

3. (1) 正确; (2) 应为$a^2-2a+b-c$; (3) 应为$a+1-b-c$;
   (4) 应为$2x-y+a-1$; (5) 应为x^2-2x-2; (6) 应为x^2-2x+2.

4. (1) $4x+3$; (2) $-5x+9$; (3) $m-4n$;
   (4) $6x-5$; (5) $2x-xy-6y$; (6) $10a+9b-8c$;
   (7) $8x+11$.

5. (1) $5a^2+5a$; (2) -9; (3) $5a^3-6ab^2+5b^3$;
   (4) $-a+3b-7c$; (5) x^3+4x^2+5x-2.

6. (1) $r^2\left(4-\frac{3}{4}\pi\right)$; (2) $b^2+2h(a+b)$.

7. (1) $a^2\left(\pi-\frac{1}{4}\right)$; (2) $a^2\left(4+\frac{3}{4}\pi\right)$.

第 三 节

1. (1) $2a^5$; (2) a^{10}; (3) a^4; (4) a^{25}; (5) x^{11};

(6) b^3;　(7) y^{12};　(8) $16x^8y^4$;　(9) $a^6b^3x^6$;　(10) $\frac{4a^2}{9b^2}$.

2. (1) y^{2n};　(2) x^{2n+1};　(3) a^{6n};

(4) $s^{4n}t^{2n}$;　(5) $-\frac{m^{10}}{n^{15}}$;　(6) $-\frac{a^{3m}}{b^{3n}}$.

3. (1) 1,000,000,000;　(2) $\frac{1}{64}$;　(3) 1;

(4) 160000;　(5) 20736;　(6) $-\frac{32}{243}$.

4. (1) 应为x^6;　(2) 应为x^5;　(3) 正确;

(4) 应为x^{16};　(5) 应为$a^3b^3x^3$;　(6) 应为$36x^2y^2$.

5. (1) $-18y^4$;　(2) $-15a^4bx^3$;　(3) $\frac{1}{3}x^3y^4$;

(4) $60a^6b^6c^4$;　(5) $3x^6y^5z^2$.

6. (1) $-2x^3+2x^2-2x$;　(2) $a^2b+\frac{3}{2}a^3$;

(3) $\frac{1}{4}a^3b^2-\frac{1}{6}a^2b^3-\frac{5}{18}ab^4$;　(4) $-18bx^4+24bx^3+12bx^2$;

(5) $20x^2y^3z^2-28x^3y^4z^2+24x^4y^5z^2$.

7. (1) a^2-a-12;　(2) $3x^2-5x-2$;

(3) $6x^2+27x+27$;　(4) $-2ax-2bx-3ay-3by$;

(5) $\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{6}xy-\frac{1}{3}y^2$;　(6) $6x^2+34xy-56y^2$;

(7) $9x^3y-xy^3$;　(8) $x^3-4x^2-11x+30$;

(9) x^3-2x^2-2x+8;　(10) $-6x^4+9x^3-10x^2-13x+6$.

8. (1) $4y^2-9$;　(2) $\frac{1}{4}x^2-4y^2$;　(3) $9x^{2n}-1$;

(4) $4y^2-x^2$;　(5) $\frac{1}{4}x^2+4x+16$;　(6) $4x^2+12ax+9a^2$;

(7) $4a^4-4a^2b+b^2$;　(8) $\frac{4}{9}x^2-\frac{2}{3}xy+\frac{1}{4}y^2$;　(9) $u^4-2u^2v^2+v^4$;

(10) $4a^2b^4+12ab^2x^2y+9x^4y^2$;　(11) $x^2-y^2-z^2-2yz$.

10. (1) $8x^3+36x^2+54x+27$;　(2) $\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{2}x^2y+6xy^2-8y^3$;

(3) $8a^3+27$;　(4) $27x^3-64y^3$;

(5) $4x^2+9y^2+z^2+12xy-4xz-6yz$;　(6) a^6+b^6.

11. (1) 8099;　(2) 9996.

第四节

1. (1) $c(x-y+z)$;　(2) $4x(u+v-w)$;

(3) $-16x^2(x+1)^2$;　　(4) $-5xy(3y-2x+1)$;

(5) $2ax(7b-4b^2+1)$;　　(6) $-7ab(1+2x-7y)$;

(7) $5mn(8m^2-5n+m)$;　　(8) $(x+y)(a+b-c)$;

(9) $2a(x-y)$;　　(10) $(a-b+c)(x+y-1)$.

2. (1) $(a-b)(3+x)$;　　(2) $(x-y)(b-a)$;

(3) $(x-y)(5a-6b)$;　　(4) $(x-y)(4x-3)$;

(5) $(m+1)(m^2+1)$;　　(6) $4(y+z)(x+1)$;

(7) $x(1-z)(x^2+y)$;　　(8) $(a-b)(x-y)$;

(9) $(x-1)(x^2+1)$;　　(10) $\left(y+\frac{1}{2}\right)(x^2+y^2+2)$.

3. (1) $\left(5x+\frac{9}{10}\right)\left(5x-\frac{9}{10}\right)$;　　(2) $(3ab+8)(3ab-8)$;

(3) $(3x+4)(x+2)$;　　(4) $(x^2+y^2+xy)(x^2+y^2-xy)$;

(5) $3(3m-n)(m+3n)$;　　(6) $\left(9a^2+\frac{1}{4}\right)\left(3a+\frac{1}{2}\right)\left(3a-\frac{1}{2}\right)$;

(7) $(9x^2+y^2)(3x+y)(3x-y)$;　　(8) $(x^n+10)(x^n-10)$.

4. (1) 1000;　　(2) 197;　　(3) 508000;　　(4) $86\frac{1}{3}$.

5. (1) $(x+2)^2$;　　(2) $(a-5)^2$;　　(3) $(4x+3)^2$;　　(4) $\left(6x-\frac{1}{3}\right)^2$;

(5) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$;　　(6) $(5x+1)^2$;　　(7) $4a^2(a-1)^2$;

(8) $2(ax+by)^2$;　　(9) $(x^3-2y)^2$;　　(10) $y\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$.

6. (1) $(x+2)(x^2-2x+4)$;　　(2) $(2x-1)(4x^2+2x+1)$;

(3) $(y+3)(y^2-3y+9)$;　　(4) $(mn^2-3)(m^2n^4+3mn^2+9)$;

(5) $8(2a-1)(4a^2+2a+1)$;　　(6) $(x+y)(y^3-y^2x+yx^2-1)$.

7. (1) $(x+3)(x+4)$;　　(2) $(x-3)(x-4)$;

(3) $(x+12)(x-2)$;　　(4) $(x-2)(x-4)$;

(5) $(2x+3)(x+5)$;　　(6) $(3x-2)(x-1)$;

(7) $2(3x+1)(2x-3)$;　　(8) $2(2x+1)(x+1)$.

9. (2) 518(厘米^3);　　(3) 4(公斤);

10. 93(吨).

第 五 节

1. (1) $-3b$;　　(2) $4xy$;　　(3) $3m^3n^7$;

(4) $\frac{a}{2}$;　　(5) $\frac{2}{2a+b}$;　　(6) $\frac{x+3}{x-4}$;

(7) $\frac{x-2}{x-3}$;　　(8) $\frac{x+1}{x+2}$.

2. (1) $\frac{bc}{ac}$, $\frac{ad}{ac}$; (2) $\frac{2x}{a-b}$, $\frac{-x}{a-b}$;

(3) $\frac{16x^2}{12x^3}$, $\frac{6x(1-x)}{12x^3}$, $\frac{3(x^2-1)}{12x^3}$; (4) $\frac{(m+2)^2}{m^2-4}$, $\frac{5}{m^2-4}$;

(5) $\frac{x(x-y)}{(x+y)(x-y)^2}$, $\frac{y(x+y)}{(x+y)(x-y)^2}$.

3. (1) $1+\frac{3}{m-n}$; (2) $\frac{1}{3y}$; (3) $\frac{8a^3-9b^3+10bc^2}{12a^2b^2c}$;

(4) $\frac{2x-7}{x^2-9}$; (5) $\frac{-2x}{(x+3)(x+5)}$; (6) $\frac{y}{x}$;

(7) $\frac{-4x}{(x-3)(x+3)(x+7)}$; (8) $\frac{2m^2-10}{(m+3)^2(m+1)}$;

(9) $\frac{4x+8-x^2}{(x-1)(x-3)(x+8)}$; (10) 0.

4. (1) $\frac{5x}{21a}$; (2) $\frac{x-y}{a-b}$; (3) $\frac{x-2}{x-3}$; (4) $\frac{2b^2}{3x}$;

(5) $\frac{2(c+d)}{c}$; (6) $\frac{x-y}{2xy}$; (7) $\frac{m-1}{m(m-3)}$; (8) -2;

(9) $\frac{1}{x}$; (10) $y-1$.

第 六 节

1. (1) 应为$2a$; (2) 正确; (3) 应为5; (4) 应为5.

2. (1) $55\sqrt{5}$; (2) $\frac{8}{9}$; (3) $2ab^2\sqrt{3b}$; (4) $\frac{3}{2b}\sqrt{a}$.

3. (1) $\frac{\sqrt{5}}{20}$; (2) $\frac{\sqrt{2}}{5}$; (3) $\frac{b}{3}\sqrt{3a}$; (4) $\frac{\sqrt{2}}{4}$;

(5) $\frac{b\sqrt{a+b}}{a+b}$; (6) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$; (7) $\frac{1-\sqrt{y}}{1-y}$; (8) $\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}{2}$.

4. (1) $3\sqrt{2}$; (2) $\frac{\sqrt{6}}{2}$; (3) $5a^2b^5c^2\sqrt{a}$; (4) $x\sqrt{y^2-z^2}$;

(5) $(x+y)\sqrt{x-y}$; (6) $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a-b}$; (7) $\frac{ax-b}{b^2}\sqrt{b}$.

5. (1) $\frac{11}{4}\sqrt{2}$; (2) $\frac{3}{2}\sqrt{2}$; (3) $4\sqrt{10}-7\sqrt{6}$;

(4) $4\frac{1}{4}\sqrt{2}-3\frac{1}{3}\sqrt{3}$; (5) $a\sqrt{b}+2\sqrt{2}$; (6) 0.

6. (1) -39; (2) 2; (3) $5-2\sqrt{6}$;

(4) $x+y+2\sqrt{xy}$;　(5) $ab+2b-a+1$;　(6) $a-b$;

(7) $a^2b^4c^4$;　(8) $\frac{1}{ab}$.

第二章　复　习　题

1. $5x^2-x+5$;　(2) $2x^2-5x+2$;　(3) $-2x+6y-3z-4$.

2. (1) $18000a^{11}b^{8}$;　(2) $\frac{1}{2}x^{3m+1}y^{m+3}z$;

(3) $-5x^3y+3x^2y^2-xy^3$;　(4) $-\frac{3}{4}x^3+x^2+\frac{x}{8}$;

(5) $2a^3-4ab^2+2b^3$;　(6) $-\frac{x^2}{6}+\frac{x}{6}-1\frac{1}{6}$;

(7) $4a^3-19a+15$;　(8) $15m^4-13m^3n+19m^2n^2-2mn^3-4n^4$.

3. (1) x^4-1;　(2) x^4-8x^2+16;

(3) $x\left(\frac{1}{4}x^2+3\right)$;　(4) x^6+1;

(5) $12x^2+398x+1$.

4. (1) $x^2(x+3)^2$;　(2) $5mn(8m-5n+6)$;

(3) $8(a+b)(x-3y)$;　(4) $(x+y+a+2)(x+y-a-2)$;

(5) $(x-2y)(x-2y-6)$;　(6) $(2x^2+3y^2)(2x^2-3y^2)$;

(7) $(x+y)(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$;

(8) $(x^4+y^4)(x^2+y^2)(x+y)(x-y)$.

5. (1) $\frac{3x^2-12x+11}{(x-1)(x-2)(x-3)}$;　(2) $\frac{x-3y}{(x-y)^2}$;

(3) $-\frac{a+b}{(2a+b)^2}$;　(4) $\frac{bm-an}{ab(m-n)}$;

(5) $\frac{1}{(a-x)(c-x)}$;　(6) $\frac{3+x^2}{1-x^4}$;

(7) $x-y$;　(8) $-x-1$;

(9) $-\frac{x+2y}{2x+y}$;　(10) $1-\frac{x^2}{y^2}$;　(11) $\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}$.

6. (1) $2\sqrt{b}$;　(2) $2\sqrt{b}$;　(3) 2;

(4) y;　(5) $1+\sqrt{2}$;　(6) $\frac{b-\sqrt{b^2-a^2}}{a^2}$.

7. 31(米^3).

8. 12.56(吨).

第 三 章

第 一 节

1．(1) 5； (2) $-4\frac{8}{9}$； (3) 7；

(4) 2； (5) 6； (6) 360；

(7) -4； (8) 2； (9) $\frac{8}{3}$；

(10) -8； (11) 190； (12) -30；

(13) -5； (14) $-23\frac{1}{2}$； (15) $3\frac{3}{7}$；

(16) 40； (17) 78； (18) 0.25；

(19) $\frac{ac+bd}{a-b}$ （当$a-b\neq 0$时）； (20) 0 （当$a+b\neq 0$时）．

2．(1) $3x=7$，$x=\frac{7}{3}$； (2) $\frac{1}{7}x=0.5$，$x=3.5$；

(3) $75\%x=12$，$x=16$； (4) $\frac{x}{2}+\frac{x}{3}=5$，$x=6$；

(5) $7y-2y=10$，$y=2$； (6) $5y-2y=3$，$y=1$；

(7) $\frac{6}{7}x-\frac{3}{4}x=1$，$x=9\frac{1}{3}$； (8) $3x+8=180$，$x=57\frac{1}{3}$．

3．(1) $D=KL+d$； (2) $d=D-KL$．

4．(1) $V_0=\frac{2s-at^2}{2t}$； (2) $a=\frac{2s-2V_0t}{t^2}$．

5．$h=15$． 6．202.7（毫米）．

7．30（个）． 8．45（毫米）．

9．36.7(伏)． 10．200（转/分）．

11．128（齿）．

第 二 节

1．(1) $x=6$，$y=-3$； (2) $x=1$，$y=2$；

(3) $x=3$，$y=1$； (4) $x=3$，$y=1$；

(5) $x=3$，$y=2$； (6) $x=8$，$y=3$；

(7) $x=1$，$y=5$； (8) $x=11$，$y=4$；

(9) $x=-47$，$y=125$； (10) $x=6$，$y=3$；

(11) $I_1=25$，$I_2=15$； (12) $m=1$，$n=-2$；

(13) $x=6$，$y=-\frac{1}{2}$； (14) $x=-16b$，$y=23a$．

2．(1) $x=1$，$y=2$，$z=3$； (2) $x=2$，$y=3$，$z=-4$；

(3) $x=-2$, $y=\frac{1}{3}$, $z=2\frac{1}{3}$;　　(4) $x=5$, $y=\frac{1}{3}$, $z=-2$;

(5) $x=1$, $y=2$, $z=4$;　　(6) $x=3$, $y=5$, $z=7$.

3. (1) $x=1$, $y=\frac{5}{2}$, $z=7\frac{1}{2}$, $w=\frac{3}{2}$;

(2) $x=\frac{7}{9}$, $y=-\frac{8}{9}$, $z=-\frac{26}{9}$, $w=-\frac{5}{3}$.

4. (1) $P=I^2R$.

5. 解放前大寨大队的地富霸占土地是480亩，而广大贫下中农仅有土地144亩.

6. 30人挖土，50人运土.

7. 26人加工活塞，34人加工缸套.

8. 85%的硫酸800公斤，20%的硫酸200公斤.

9. 甲种矿石40吨，乙种矿石60吨.

第 三 节

1. (1) ± 16;　(2) $\pm\frac{2}{3}$;　(3) 0，-7;　(4) 0，$\frac{3}{2}$;

(5) 5，1;　(6) -2，1;　(7) 2，-12;　(8) 3，-5;

(9) 1，$-\frac{3}{4}$;　(10) 1，$\frac{5}{3}$;　(11) 3;　(12) $1\frac{2}{3}$;

(13) $-2\pm\sqrt{3}$;　(14) $1\pm\sqrt{3}$;　(15) $-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$;　(16) $\frac{1}{2}\pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(17) $-1\pm j2$;　(18) $\frac{3}{4}\pm j\frac{\sqrt{7}}{4}$;　(19) $-\frac{5}{6}\pm j\frac{\sqrt{59}}{6}$;　(20) 2，$-3\frac{2}{3}$.

2. 4（厘米）.　　3. 8（厘米）或18（厘米）.

4. 2.44（米）.　　5. 4（毫米）.

6. 20（秒）.

7. (1) $x_1=3$, $y_1=4$,　$x_2=4$, $y_2=3$;　(2) $x=-2$, $y=4$.

第三章 复 习 题

1. (1) $\frac{9}{13}$;　(2) $-2\frac{2}{3}$;　(3) -8;　(4) 2.

2. (1) $x=\frac{10}{11}$, $y=-3\frac{6}{11}$;　(2) $x=3$, $y=2$.

3. (1) $x=80$, $y=60$, $z=40$;　(2) $x=2$, $y=-3$, $z=\frac{1}{2}$;

(3) $x=\frac{2}{5}$, $y=0$, $z=\frac{1}{3}$, $t=2$.

4. (1) $\frac{\sqrt{6}}{4}\pm j\frac{\sqrt{10}}{4}$;　　(2) 1, $-\frac{n}{m}$.

5. (1) $k>-\frac{9}{4}$时，有两个不相等的实根，

$k=-\frac{9}{4}$时，有两个相等的实根，

$k<-\frac{9}{4}$时，有两个不相等的复根；

(2) $k<4$ 时，有两个不相等的实根；

$k=4$ 时，有两个相等的实根，

$k>4$ 时，有两个不相等的复根，

(3) $k>3$ 或$k<-3$ 时，有两个不相等的实根，

$k=\pm 3$ 时，有两个相等的实根，

$-3<k<3$时，有两个不相等的复根。

6. 0.3（吨）.

7. 车床2人，铣床6人.

8. 石英砂0.3（吨），长石粉2.9（吨）.

9. 60（毫米）.

第 四 章

第 一 节

1. (1) $7a^2b$;　(2) $12a^4b^2$;　(3) $9a^4b^2$;

(4) $9a^4+6a^2b+b^2$;　(5) $\frac{4}{3}a^2$;　(6) $\frac{4a^4}{b^2}$.

2. (1) 应为$7^4\div 7^5=7^{-1}$;　(2) 应为$(-1)^0=1$;

(3) 应为 $(-1)^{-1}=\frac{1}{-1}=-1$;　(4) 应为 $3a^{-2}=\frac{3}{a^2}$;

(5) 应为$\frac{(-x)^5}{(-x)^3}=\frac{-x^5}{-x^3}=x^2$.

3. (1) 3.6×10^{-3};　(2) 8.9×10^{-6};

(3) 1.293×10^{-3}（克/厘米^3）;　(4) 8×10^8;

(5) 1.5×10^6;　(6) 3.84×10^8（公里）.

4. (1) $\frac{1}{abc^2}$;　(2) $\left(\frac{7x+8y}{x+3y}\right)^2$;　(3) $\frac{2^3xb^4}{5ay^2}$;

(4) $\frac{b-a}{b+a}$;　(5) $\frac{c^5}{a^{10}b^4}$;　(6) $\frac{x^4y^6}{z^5}$.

5. (1) $2\sqrt{2}$; (2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; (3) $\frac{\sqrt[3]{x}}{x}$;

(4) $\sqrt{10}$; (5) $\frac{\sqrt{10}}{10}$; (6) $\frac{\sqrt[3]{245}}{7}$.

6. (1) $x^{\frac{2}{3}}$; (2) $a^{\frac{3}{2}}b^2$; (3) $(a+b)^{\frac{3}{4}}$;

(4) $a^{\frac{3}{5}}b^{-\frac{1}{5}}$; (5) $a^{-\frac{1}{4}}$; (6) $x^{\frac{1}{2}}y^{-\frac{2}{3}}$.

7. (1) 16; (2) $\frac{1}{11}$; (3) $10^{-3}=0.001$; (4) 4;

(5) $\frac{9}{4}$; (6) $\frac{1}{24}$; (7) $10^2=100$; (8) $18\sqrt{3}$.

8. (1) $\frac{1}{a^{12}b^4x^8}$; (2) $\frac{a^6}{4x^2y^4c^2b^{10}}$; (3) $\frac{x^9}{y^2}$;

(4) $\frac{25}{a^4b}$; (5) $\frac{3a}{5b^{\frac{1}{6}}c^{\frac{1}{2}}}$; (6) $4x^{\frac{4}{3}}-2x^{\frac{5}{3}}+x^2$;

(7) $x^2-xy+y^2-\frac{y^3}{x}$; (8) $x+\frac{1}{y}$; (9) $\frac{2a+1}{a+1}$.

9. (1) $y^{-2}=\frac{1}{y^2}$; (2) $\frac{a^2}{b}$; (3) $\frac{\sqrt[3]{a^2b}}{b}$; (4) $\sqrt[6]{3^5xy}$.

第 二 节

1. (1) $\log_3 729=6$; (2) $\log_2\frac{1}{2}=-1$; (3) $\log_{10}0.01=-2$;

(4) $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{32}=5$; (5) $\log_{16}4=\frac{1}{2}$; (6) $\log_{10}25=x$.

2. (1) $2^6=64$; (2) $8^{\frac{1}{3}}=2$; (3) $10^{-3}=0.001$;

(4) $2^{-3}=\frac{1}{8}$; (5) $81^{-\frac{3}{4}}=\frac{1}{27}$; (6) $a^y=N$.

3. (1) $\log_2 1=0$, $\log_3 1=0$, $\log_{10}1=0$, $\log_{\frac{1}{2}}1=0$;

(2) $\log_2 2=1$, $\log_3 3=1$, $\log_{10}10=1$, $\log_e e=1$.

4. (1) $N=27$; (2) $N=\sqrt{2}$; (3) $N=100$;

(4) $N=1$; (5) $N=5$; (6) $N=0.1$.

5. (1) 4; (2) -5; (3) 3; (4) -2; (5) -3; (6) $\frac{3}{2}$.

6. (1) 1.1761; (2) 1.3980; (3) 0.3495;

(4) 2.8751; (5) $\bar{3}.1761$.

7. (1) 0.0969; (2) 0.6117; (3) 3.7353; (4) 4.3957;
(5) 3.9057; (6) $\overline{1}.6990$; (7) $\overline{2}.3979$; (8) $\overline{3}.6561$;
(9) $\overline{5}.8527$; (10) 5.5160.

8. (1) −1.7462; (2) −0.0622; (3) −2.8999; (4) −3.0824.

9. (1) $\overline{2}.1606$; (2) $\overline{1}.4237$; (3) $\overline{5}.6999$; (4) $\overline{1}.9160$.

10. (1) 56.01; (2) 4.380; (3) 0.4011; (4) 225.1;
(5) 1840; (6) 0.0657; (7) 3112000; (8) 0.00001263;
(9) 0.01029; (10) 3.162; (11) 9.550; (12) 0.01447.

11. (1) 1.7478; (2) $\overline{3}.1590$; (3) 0.6641; (4) 0.7084;
(5) 3.4846; (6) $\overline{1}.3468$; (7) $\overline{1}.2418$; (8) $\overline{1}.4402$;
(9) $\overline{2}.8262$.

12. (1) 37.60; (2) 0.01515; (3) 216; (4) 0.003604;
(5) 0.0129; (6) 10860; (7) 0.7702; (8) −37.2.

13. (1) 4.606; (2) 7.0087; (3) −0.7342.

14. 三年中牟二黑子剥削了张大爷18.89元.

15. 4年.

16. $V_1 \doteq 7.9$公里/秒.$V_2 \doteq 11.2$公里/秒.

17. 106分.

18. 18.1%.

第 三 节

(1) 10.39; (2) 17.56; (3) 54.4; (4) 0.0374;
(5) 21; (6) 0.226; (7) 507; (8) 1.53.

第四章 复 习 题

1. (1) $a^n \cdot a^n \neq (a^n)^n \quad (n \neq 0)$; (2) $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$;
(3) $(a+a)^3 \neq a^3 + b^3$; (4) $a^0 = b^0 = 1$;
(5) $a^n \neq a^{-n} (n \neq 0)$; (6) $a^{\frac{1}{n}} \neq \frac{1}{a^n}$;
(7) $\frac{a^m}{a^n} \neq \sqrt[n]{a^m}$.

2. (1) $\frac{2.46}{a}$; (2) $\frac{y^5}{5x^3z}$; (3) $\frac{x^6}{4a^2}$;
(4) $\frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^2y} + \frac{1}{y^2}$; (5) $\frac{1}{a^4} - \frac{1}{b^6}$;
(6) $\frac{4}{a^2} - 1$; (7) $\frac{2^6 x^{12} y^6 b^{12} c^{18}}{3^6 a^{18}}$; (8) $10a^{\frac{5}{6}}$;

(9) $\dfrac{5a}{c^{\frac{1}{12}}}$;　　(10) 1;　　(11) $\dfrac{\sqrt[3]{3}}{4a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{8}{3}}}$;

(12) $4a^2+2ab^{\frac{1}{2}}+\dfrac{b}{4}$;　　(13) $x^{-1}-2+2x^{-\frac{5}{6}}-2x^{\frac{1}{6}}+x^{-\frac{2}{3}}+x$;

(14) $a-b-c+2b^{\frac{1}{2}}c^{\frac{1}{2}}$.

3. (1) 0.0145;　　(2) 0.00000007071;　　(3) 0.7094;
(4) 0.05346;　　(5) 1.911;　　(6) 0.0002911;
(7) −1015;　　(8) −0.006863.

4. 27620厘米³.　　5. 26.86（公斤）.　　6. 16.90（吨）.

7. 15（小时）.　　8. $M_t=3.01$（毫米）.

第五章

第一节

2. (1) $A=a^2$;　　(2) $c=2\pi r$;　　(3) $Q=0.2t$.

3. (1) $(-\infty,1),(1,+\infty)$; (2) $(-\infty,-1),(-1,1),(1,+\infty)$;
(3) $[0,+\infty)$;　　(4) $[-2+\infty)$;　　(5) $(-2,2)$.

4. (1) $f(3)=1$, $f(0)=-1$, $f(-1)=-1\frac{2}{3}$;

(2) $f(-2)=0$, $f(-1)=-5$, $f(0)=-6$, $f(1)=-3$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=-5$;

(3) $f(-1)=-2$, $f(1)=2$, $f(4)=\frac{1}{2}$, $f(a)=\frac{2}{a}$;

(4) $f(-4)=1\frac{1}{6}$, $f(0)=-\frac{1}{2}$, $f(\sqrt{2})=-3-\frac{5}{2}\sqrt{2}$,

$f(a+1)=\dfrac{2a+3}{a-1}$.

5. $V=\pi Dn$;　　296.73（米）;　　619.84（米）;　　800.7（米）.

第二节

1. $A(3,5)$; $B(-3,5)$; $C(2,3)$; $D(1,-4)$; $E(0,-3)$; $F(-3,-5)$;
$K(-2,0)$; $L(2,0)$; $P(4,-2)$; $Q(-4,-3)$.

4. (1) $P_1(5,-4)$，在第四象限;　　(2) $P_2(-5,4)$，在第二象限;
(3) $P_3(-5,-4)$，在第三象限.

第三节

1. (1) $l=4a$;　　(2) $Q=\dfrac{V}{t}$;　　(3) $P=\delta V$;　　(4) $\delta=\dfrac{P}{V}$.

4. $y=\frac{1}{3}x$.　　5. $P=13.6V$.　　6. $V=\frac{1}{4}F$.　　7. $p=\frac{4}{V}$.

第五章　复　习　题

1. (1) $y=3-\frac{3}{4}x$;　　(2) $y=-\frac{15}{x}$;

   (3) $y=\frac{-6}{x-2}-3$;　　(4) $y=\frac{x}{3}$.

2. $f(-1)=-\frac{2}{3}$; $f(0)=-\frac{1}{2}$; $f(1)=2$; $f(3)=10$; $f(a)=\frac{a^2+1}{a-2}$.

3. (1) 偶函数；(2) 奇函数；(3) 非奇非偶的函数；(4) 奇函数。

4. $Q=CU$.

5. (1) $V=1620t$(公里/小时);　　(2) $S=810t^2$(公里).

6. (1) $R\doteq 2.17l$;　　(2) $R=\frac{1.7}{S}$.

7. (1) $I=\frac{U}{150}$, $I(0)=0$(安), $I(15)=0.1$(安);

   (2) $I=\frac{20}{R}$, $I(200)=0.1$(安);

   (3) $P=50I^2$, $P(0.5)=12.5$(瓦), $P(1)=50$(瓦).

8. $V=x(48-2x)^2$, $(0<x<24)$.

9. $S=\frac{2V_0}{r}+2\pi r^2$.

10. $l=\left(1+\frac{\pi}{4}\right)x+\frac{2A}{x}$.

第　六　章

第　一　节

5. (1) $29°21'36''$;　　(2) $105.2°$;　　(3) $90°10'$;

   (4) $80°$;　　(5) $60°51'$;　　(6) $72°$.

6. (1) 余角为$40°$，补角为$130°$;

   (2) 余角为$45°15'$，补角为$135°15'$.

7. $64°$.　　8. $60°$.

9. $\angle 2=150°$,　　$\angle 3=30°$,　　$\angle 5=105°$.

第二节

5. 63°.

6. $\angle 3=\angle 5=\angle 7=50°$, $\angle 2=\angle 4=\angle 6=\angle 8=130°$.

7. (1) $\angle A=75°, \angle B=60°, \angle ACB=45°$;

   (2) 180°.

第三节

1. (1) 45°;　　(2) 30°;　　(3) 38°.

2. 60°.

3. (1) 105°;　　(2) 38°;　　(3) 150°.

4. 16°.

5. 30°.

6. (1) 25°;　　(2) 23°.

7. $\alpha=30°$.

8. $\alpha=\beta$.

第四节

5. 7.6(米).　　6. 9.35(米).

7.

直角边 a	4	16	5	8	0.3
直角边 b	3	12	12	15	0.4
斜　边 c	5	20	13	17	0.5

8. $BC=5$(厘米), $AB=7.07$(厘米).

9. 另一直角边为1.73(厘米), 斜边为3.46(厘米).

11. 109.6(毫米).　　12. 17.3(毫米).

13. 高为$\frac{\sqrt{3}}{2}a$,　　面积为$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

14. $BD=84$(毫米), $EC=24$(毫米), $AE=70$(毫米), $ED=10$(毫米).

第五节

1. (1) 18,　　(2) 21,　　(3) $\frac{1}{6}$,

   (4) $\frac{(a+b)c}{2b}$,　　(5) 20,　　(6) $-\frac{23}{2}$.

2. 20(厘米).

3. 150(公里).　　4. 65°C.　　5. 10(厘米).

9. $A'C'=45$(厘米)，$B'C'=37.5$(厘米).

10. 2.5(米).　　11. 35(米).　　12. 120(米).

13. 9.3(米).　　14. 8.4(米).　　15. $h_{小}=5.63$(毫米).

16. $r=300$(毫米)，$R=500$(毫米).

第六章　复　习　题

6. 282.8(毫米).

7. 96.33(毫米).

8. 34.6(米).

10. (1) 2.5(厘米);　　(2) 7(厘米).

11. $EG=1$(米)，$FH=2$(米).

第　七　章

第　一　节

1. (1)60°;　　(2) 45°;　　(3) 20°.

2. 40(毫米).　　3. 28.28(毫米).　　4. 22.5(毫米).

5. (1) 16(厘米);　　(2) 5.7(厘米);　　(3) 20.8(毫米).

6. 3.03(毫米).

7. 60°. 30°.

第　二　节

2. (1)200(毫米);　　(2) 173.2(毫米).

4. 260(厘米).

5. 23.83(毫米).

6. 1(厘米)，2(厘米)，3(厘米).

第　三　节

2. 1.31(弧度)，　2.09(弧度)，　2.62(弧度)，　3.67(弧度)，
   4.19(弧度)，　5.24(弧度)，　0.39(弧度).

3. 15°，　135°，　240°，　171.89°，
   68.76°，　18°.

4. (1) 104.72(毫米);　　(2) 73.304(厘米);　　(3) 171.89°;
   (4) 127.39°;　　(5) 50(毫米).

5. 1742(毫米).

6. 6297(毫米).　　7. 3576(毫米).

8. (1) 8831.25(毫米^2);　　(2) 13310(毫米^2);
   (3) 1675(毫米^2);　　(4) 314(厘米^2);

(5) 20(厘米^2); (6) 8500(毫米^2).

9. $R=360.6$(毫米), $\alpha=5.22$(弧度)$=299.03°$, $A=339685.2$(毫米^2).

10. $l=314$(毫米), $r=204$(毫米), $R=255$(毫米),
$\alpha\doteq1.23$(弧度)$\doteq70°$, $A=3858$(毫米^2).

第七章 复 习 题

1. 31.85(米). 2. 10.47(米).

3. 10(米). 4. 2.82(毫米).

5. 圆心角为18°或0.314弧度, 弧长为62.8毫米.

8. 6004.6(公里).

9. $AD=9$(厘米), $BE=5$(厘米), $CF=4$(厘米).

11. 7.395(厘米). 12. 477.6(毫米).

第 八 章

第 一 节

1. (1) $\sin A=\frac{5}{13}$, $\cos A=\frac{12}{13}$, $\sin B=\frac{12}{13}$, $\cos B=\frac{5}{13}$;

(2) $\sin A=\frac{5}{\sqrt{41}}$, $\cos A=\frac{4}{\sqrt{41}}$, $\sin B=\frac{4}{\sqrt{41}}$, $\cos B=\frac{5}{\sqrt{41}}$.

2. (1) $1\frac{3}{4}$; (2) $\frac{1}{2}$; (3) 0; (4) $1\frac{3}{4}$; (5) $2-\sqrt{3}$.

3. (1) $\sin5°=0.0872$, $\sin20°=0.3420$, $\cos70°=0.3420$, $\cos15°=0.9659$;

(2) $\sin41°11'=0.6585$, $\sin37°29'=0.6086$,
$\cos21°33'=0.9301$, $\cos44°59'=0.7073$;

(3) $\sin54°36'=0.8151$, $\sin79°5'=0.9819$,
$\cos57°17'=0.5404$, $\cos50°27'=0.6368$;

(4) $\cos10°55'=0.9819$, $\sin61°47'=0.8812$,
$\cos26°49'=0.8925$, $\sin89°3'=0.9998$.

4. 18°9'; 22°22'; 1°24'; 87°12'; 55°36'; 72°34'.

5. (1) $\sin20°+\sin50°\neq\sin70°$; (2) $\cos20°+\cos50°\neq\cos70°$;

(3) $\sin40°\neq2\sin20°$; (4) $\cos40°\neq2\cos20°$.

6. (1) $a=3.7093$, $b=5.9360$; (2) $c=5.9116$, $b=3.1543$;

(3) $a=3.819$, $b=3.2275$.

7. $BC\doteq3.5412$(米), $AD\doteq13.8996$(米).

8. 飞机上升高度为1500米, 水平飞行距离约为2598米.

9. 当$A=45°$时, $\operatorname{tg}A=\operatorname{ctg}A=1$; 当$0<A<45°$时, $\operatorname{tg}A<1$, $\operatorname{ctg}A>1$;
当$45°<A<90°$时, $\operatorname{tg}A>1$, $\operatorname{ctg}A<1$.

10．(1) 4；　(2) $5\sqrt{3}$；　(3) $\frac{\sqrt{3}}{3}$；　(4) 6；　(5) $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

11．$\operatorname{tg}18°6'=0.3269$；　$\operatorname{ctg}30°26'=1.7022$；　$\operatorname{tg}21°56'=0.4027$；
$\operatorname{ctg}24°31'=2.192$；　$\operatorname{tg}0°36'=0.0105$；　$\operatorname{ctg}42°16'=1.1003$；
$\operatorname{tg}53°13'=1.3375$；　$\operatorname{ctg}81°2'=0.1578$.

12．$22°8'$；$26°22'$；$21°42'$；$34°24'$；$54°$；$49°42'$；$88°27'$；$0°45'$；$35°17'$.

13．(1) $\operatorname{tg}20°+\operatorname{tg}40°\neq\operatorname{tg}60°$；　(2) $\operatorname{ctg}10°+\operatorname{ctg}20°\neq\operatorname{ctg}30°$；
(3) $\operatorname{tg}40°\neq2\operatorname{tg}20°$；　(4) $\operatorname{ctg}40°\neq2\operatorname{ctg}20°$.

14．(1) $a=8.7680$，$b=17.976$；　(2) $a=6.5275$，$c=9.571$；
(3) $b=10.2515$，$c=11.405$；　(4) $b=4$，$\alpha=36°52'$；
(5) $c=\sqrt{58}$，$\alpha=23°12'$.

15．$AB=13.4$(米)，$BC=8$(米)，$AD=5.7$(米).

16．哨所到敌人坦克的水平距离为977.3米.

17．(1) $\cos\alpha=\frac{4}{5}$，　$\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{4}$，　$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{4}{3}$，
$\sec\alpha=\frac{5}{4}$，　$\csc\alpha=\frac{5}{3}$；

(2) $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{6}}{7}$，　$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\sqrt{6}}{5}$，　$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{5\sqrt{6}}{12}$，
$\sec\alpha=\frac{7}{5}$，　$\csc\alpha=\frac{7\sqrt{6}}{12}$；

(3) $\sin\alpha=\frac{4}{5}$，　$\cos\alpha=\frac{3}{5}$，　$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{3}{4}$，
$\sec\alpha=1\frac{2}{3}$，　$\csc\alpha=1\frac{1}{4}$；

(4) $\sin\alpha=\frac{7\sqrt{74}}{74}$，　$\cos\alpha=\frac{5\sqrt{74}}{74}$，　$\operatorname{tg}\alpha=\frac{7}{5}$，
$\sec\alpha=\frac{\sqrt{74}}{5}$，　$\csc\alpha=\frac{\sqrt{74}}{7}$；

(5) $\cos\alpha=\frac{R}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}$，　$\sin\alpha=\frac{\omega L}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}$.

18．(1) 1；　(2) tg^2A；　(3) $\sec\alpha$；　(4) $\sin^2\alpha$；
(5) $\sin^2\alpha$；　(6) $\sin^2\alpha$；　(7) $\operatorname{tg}^2\alpha$；　(8) 0.

第　二　节

1．(1) $a=4.226$，　$b=9.063$，　$\angle B=65°$；

(2) $a=16.086$, $c=21.99$, $\angle B=43°$;

(3) $b=16.9236$, $c=22.09$, $\angle B=50°$;

(4) $c=13$, $\angle A=22°37'$, $\angle B=67°23'$;

(5) $b\doteq107.8$, $\angle A=11°32'$, $\angle B=78°28'$;

(6) $a\doteq99.5$, $\angle A=33°34'$, $\angle B=56°26'$.

2. 57.4(毫米).

3. 67°23'.

4. 1°9'.

5. 164.5(毫米).

6. 100(毫米).

8. $OA=43.15$(毫米), $OB=59.15$(毫米).

9. (1) 11415(毫米); (2) 624.2(厘米).

10. 148(毫米).

第八章　复　习　题

1. $\sin A=\frac{24}{25}$, $\cos A=\frac{7}{25}$, $\operatorname{tg} A=\frac{24}{7}$,

$\sin B=\frac{7}{25}$, $\cos B=\frac{24}{25}$, $\operatorname{tg} B=\frac{7}{24}$.

2. (1) 0; (2) 1; (3) 1; (4) 1.

3. (1) $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{3}{4}$, $\sec\alpha=\frac{5}{3}$, $\csc\alpha=\frac{5}{4}$;

(2) $\sin\alpha=\frac{3\sqrt{5}}{7}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3\sqrt{5}}{2}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{15}$, $\sec\alpha=\frac{7}{2}$, $\csc\alpha=\frac{7\sqrt{5}}{15}$;

(3) $\cos\alpha=\frac{24}{25}$, $\sin\alpha=\frac{7}{25}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{24}{7}$, $\sec\alpha=\frac{25}{24}$, $\csc\alpha=\frac{25}{7}$;

(4) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{2}}{10}$, $\cos\alpha=\frac{7\sqrt{2}}{10}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{7}$, $\sec\alpha=\frac{5\sqrt{2}}{7}$, $\csc\alpha=5\sqrt{2}$.

4. (1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; (2) $2(\sqrt{3}-\sqrt{2})$; (3) $\sqrt{3}$; (4) 2; (5) 3.

5. (1) $\sqrt{3}-\frac{2}{3}$; (2) $\frac{1}{4}$.

6. (1) 0; (2) 1; (3) $\operatorname{tg}^2\alpha$; (4) $\frac{1}{4}$;

(5) $2\cos^2\alpha$; (6) 1; (7) 0; (8) 1.

7. 8.66(毫米). 8. 9.4(毫米).

9. $AB=11.756$(厘米), $AC=19.022$(厘米).

10. 245(厘米^2).

11. 491(米).

第九章

第一节

2. (1) 第三象限; (2) 第一象限; (3) 第一象限; (4) 第三象限;
   (5) 第一象限; (6) 第四象限; (7) 第二象限; (8) 第四象限.

3. (1) $120°$; (2) $30°$; (3) $60°$; (4) $135°$;
   (5) $\frac{\pi}{3}$; (6) $\frac{7\pi}{4}$; (7) $\frac{2\pi}{3}$; (8) $\frac{\pi}{2}$.

4. (1) $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $tg\alpha=\frac{4}{3}$, $ctg\,\alpha=\frac{3}{4}$;

   (2) $\sin\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $tg\alpha=-\frac{1}{2}$, $ctg\alpha=-2$;

   (3) $\sin\alpha=\frac{12}{13}$, $\cos\alpha=\frac{-5}{13}$, $tg\alpha=-\frac{12}{5}$, $ctg\,\alpha=-\frac{5}{12}$;

   (4) $\sin\alpha=-\frac{3}{5}$, $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$, $tg\alpha=\frac{3}{4}$, $ctg\,\alpha=\frac{4}{3}$.

5. (1) 负; (2) 正; (3) 正; (4) 正.

8. (1) 0; (2) $(p-q)^2$; (3) 1; (4) 2.

第二节

1. (1) $\sin 150°=\frac{1}{2}$, $\cos 150°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $tg\,150°=-\frac{\sqrt{3}}{3}$, $ctg150°=-\sqrt{3}$;

   (2) $\sin 240°=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 240°=-\frac{1}{2}$, $tg240°=\sqrt{3}$, $ctg\ 240°=\frac{\sqrt{3}}{3}$;

   (3) $\sin 315°=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 315°=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $tg315°=-1$, $ctg315°=-1$;

   (4) $\sin 690°=-\frac{1}{2}$, $\cos 690°=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $tg\,690°=-\frac{\sqrt{3}}{3}$, $ctg690°=-\sqrt{3}$;

   (5) $\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$, $tg\frac{2\pi}{3}=-\sqrt{3}$, $ctg\frac{2\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$;

   (6) $\sin\frac{10\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\frac{10\pi}{6}=\frac{1}{2}$, $tg\frac{10\pi}{6}=-\sqrt{3}$, $ctg\frac{10\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

2. (1) $\sin(-420°)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos(-510°)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $tg(-300°)=\sqrt{3}$,

$ctg(-570°)=-\sqrt{3}$;

(2) $\sin(2370°)=-\frac{1}{2}$, $\cos 855°=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $tg 585°=1$, $ctg 1590°=-\sqrt{3}$;

(3) $\sin\frac{7\pi}{6}=-\frac{1}{2}$, $\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$, $tg\frac{23\pi}{4}=-1$, $ctg\left(-\frac{19\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

3. $\sin 267°=-0.9986$, $\sin 5000°=-0.6428$,
$\cos(-1751°36')=0.6639$, $\cos 552°32'=-0.9762$,
$tg(-183°41')=-0.0644$, $ctg 272°4'=-0.0361$,
$ctg(-1956°24')=2.289$, $tg 519°=-0.3839$.

4. (1) 60°, 300°; (2) 240°, 300°;
(3) 135°, 315°; (4) 60°, 240°.

5. (1) $\frac{1}{2}$; (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; (3) 6; (4) 0.

6. (1) $-\cos\alpha$; (2) $\sin\alpha$.

8. $A(400, 0)$, $B(-136.81, 375.88)$, $C(-393.93, -69.46)$.

9. (1) 冲头的运动规律为$y=r\sin\alpha$;
(2) 当$\alpha=38°$时，$y\doteq 9.24$(厘米);
当$\alpha=150°$时，$y\doteq 7.5$(厘米);
当$\alpha=235°$时，$y\doteq -12.29$(厘米);
当$\alpha=340°$时，$y\doteq -5.14$(厘米).

第 三 节

1. (1) $\angle A=65°$, $b=29.59$, $c=35$;
(2) $c=14.37$, $\angle A=39°45'$, $\angle B=73°30'$;
(3) $\angle A=36°52'$, $\angle B=53°8'$, $\angle C=90°$;
(4) 最长的边对最大的角，$\angle A=120°$;
(5) $\angle B=46°34'$, $\angle C=57°41'$, $c=76.03$.

2. 25(米).

3. 1.89(米).

4. 55(毫米)，43.3(毫米).

5. $\alpha_1=63°56'$, $\alpha_2=69°33'$.

6. $AC=3.23$(公里)，$BC=3.2$(公里)，$AD=5.06$(公里)，$BD=4.22$(公里).

7. 8.7(米).

8. 63°47'.

第九章 复习题

1. (1) $210°$, $330°$; (2) $150°$, $210°$; (3) $60°$, $240°$;
   (4) $126°52'$, $306°52'$.
2. 6276(米), 5335(米), 3138(米).
3. (1) $\mathrm{ctg}\alpha$; (2) -1; (3) $\sin^2\alpha$.
5. 敌舰离西炮台约6330米，敌舰距东炮台约4968米.
6. 约3173(米).
7. (1) 0.07(米); (2) 0.59(米); (3) 0.79(米); (4) 0.41(米).

第十章

第一节

2. (1) $-\frac{\pi}{4}$; (2) $48°36'$; (3) $51°38'$;
   (4) $-51°38'$.
3. (1) $\frac{1}{3}$; (2) $\frac{\pi}{6}$; (3) $-\frac{\pi}{6}$.

第二节

1. (1) $\frac{\pi}{6}$; (2) $\frac{3}{4}\pi$; (3) $\frac{\pi}{3}$; (4) $-\frac{\pi}{6}$;
   (5) $-70°$; (6) $-8°8'$.
2. (1) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; (2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
3. $\angle C=\arccos\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$.
4. $\alpha=\mathrm{arc\,tg}\frac{D-d}{2l}$.
5. $\alpha=\mathrm{arc\,tg}\frac{a-b}{c}$.

第十一章

第一节

1. $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$, $\mathrm{tg}\alpha=-\frac{4}{3}$, $\mathrm{ctg}\alpha=-\frac{3}{4}$.
2. (1) $\sec^2\alpha$; (2) 1; (3) 1; (4) 1;

(5) $\operatorname{ctg}\alpha$;　　(6) $\operatorname{ctg}\alpha$.

第 二 节

1. (1) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$;　　(2) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$;

(3) $-2-\sqrt{3}$;　　(4) $2-\sqrt{3}$.

2. (1) $\frac{1}{2}$;　　(2) $\sin 110°$;　　(3) 0.

3. (1) $\sin(t+120°)$;　　(2) $\sin(2t+45°)$;　　(3) $5\sin(\omega t+36°52')$;

(4) $\sqrt{5}\sin(\omega t+26°34')$.

4. $1.93\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{4}\right)$.

5. $\sin(\alpha-\beta)=-\frac{21}{221}$, $\cos(\alpha-\beta)=\frac{220}{221}$, $\cos(\alpha+\beta)=\frac{140}{221}$.

6. $\frac{84}{205}$.

第 三 节

2. $\sin 2\alpha=\frac{24}{25}$,　　$\cos 2\alpha=\frac{-7}{25}$.

4. (1) 1;　(2) $\frac{1}{2}\sin\alpha$;　(3) $\sin\alpha$;　(4) -1;　(5) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$;　(6) $\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}$.

5. $-\frac{7}{25}$.

6. $\sin\frac{\theta}{2}=\frac{7\sqrt{2}}{10}$, $\cos\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{2}}{10}$.

第 四 节

2. (1) $2\sin\alpha\cos 2\alpha$;　　(2) $\sqrt{2}\cos\alpha$;　　(3) $\cos 20°$;

(4) $\sqrt{2}\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{4}\right)$.

3. (1) $\sin\alpha+\sin 3\alpha$;　　(2) $\frac{1}{2}\sin 2\omega t$;　　(3) $\frac{1}{2}(\sin 2x+\sin 8x)$;

(4) $\cos 2\beta-\cos 2\alpha$.

第十一章 复 习 题

1. $\cos\alpha=-\frac{8}{17}$,　$\operatorname{tg}\alpha=-\frac{15}{8}$,　$\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{8}{15}$.

2. $\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\frac{4}{9}$,　　　$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\frac{\sqrt{65}}{9}$.

3. (1) $-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$;　　　(2) $\cos\alpha-\sin\alpha$;　　　(3) $2\cos\frac{\alpha}{2}$.

4. $10\sin(\omega t+23°8')$.

第十二章

第一节

3. (1) 方向相同，　　　(2) 方向相同，　　　(3) 互相垂直.

5. $\overrightarrow{MA}=-\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$,　　　$\overrightarrow{MB}=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b})$,

$\overrightarrow{MC}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$,　　　$\overrightarrow{MD}=\frac{1}{2}(\vec{b}-\vec{a})$.

6. $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{129}=11.36$,　　　$|\vec{a}-\vec{b}|=7$,　　　$\varphi=37°36'$.

7. $|\vec{V}|=14.83$(公里),　　　$\alpha=84°56'$.

8. $|\vec{F_1}|=1.879$(吨),　　　$|\vec{F_2}|=0.684$(吨).

9. $|\vec{F_1}|=732$(公斤),　　　$|\vec{F_2}|=517$(公斤).

10. $\vec{a}$的终点坐标为$\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$, $|\vec{a}|=\frac{2\sqrt{2}}{3}$,

$\vec{b}$的终点坐标为$\left(-\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$, $|\vec{b}|=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

11. $|\vec{a}|=4.123$,　　　$\varphi=75°58'$.

12. (1) 3.162, $-18°25'$;　　　(2) 3.162, $71°34'$.

13. $2\vec{a}+3\vec{b}=\frac{23}{2}\vec{i}+\frac{3}{2}(16+\sqrt{3})\vec{j}$;

$\frac{3}{2}\vec{a}+3\vec{b}=9\vec{i}+\frac{3}{2}(12+\sqrt{3})\vec{j}$;

$|\vec{a}|=\sqrt{25+144}=13$;　　　$|\vec{b}|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$;

$\vec{a}_0=\frac{5}{13}\vec{i}+\frac{12}{13}\vec{j}$;　　　$\vec{b}_0=\frac{1}{2}\vec{i}+\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$.

第二节

1. (1) $|Z|=\sqrt{2}$, $\varphi=135°$;　　　(2) $|Z|=1$, $\varphi=-60°$;
   (3) $|Z|=1$, $\varphi=0°$;　　　(4) $|Z|=1$, $\varphi=-90°$;

(5) $|Z|=5$, $\varphi=180°$; (6) $|Z|=10$, $\varphi=90°$;

(7) $|Z|=1$, $\varphi=-150°$; (8) $|Z|=5$, $\varphi=36°52'$.

2. (1) $2-j3$; (2) $-3+j2$; (3) $-j4$; (4) 8.

3. (1) $3-j$; (2) $6-j4$; (3) j; (4) $7+j6$;

(5) $-2-j5$; (6) $2a$; (7) $j2b$;

(8) $2x-j2y$; (9) $\frac{5}{2}-j\frac{13}{6}$.

4. (1) -4; (2) 20; (3) $6+j10$;

(4) $-21-j24$; (5) $3-j11$; (6) $-2+j3.5$;

(7) $a+b$; (8) -56.

5. $j^{4n+1}=j$, $j^{4n+2}=-1$, $j^{4n+3}=-j$,

$j^{4n}=1 (n=0,1,2,3\cdots)$.

6. (1) $j2$; (2) $1-j2$; (3) $-j\frac{4}{3}$; (4) $1-j2$;

(5) $-\frac{1}{5}-j\frac{12}{5}$; (6) $-j\frac{2}{3}$; (7) $-\frac{5}{34}+j\frac{37}{34}$;

(8) $\frac{39}{25}-j\frac{2}{25}$; (9) $\frac{a-b}{a+b}-j\frac{2\sqrt{ab}}{a+b}$.

7. (1) $\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+j\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$; (2) $\sqrt{13}[\cos146°18'+j\sin146°18']$;

(3) $3(\cos0°+j\sin0°)$; (4) $5\left(\cos\frac{\pi}{2}+j\sin\frac{\pi}{2}\right)$;

(5) $4(\cos\pi+j\sin\pi)$; (6) $7\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+j\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$.

8. (1) $\sqrt{2}+j\sqrt{2}$; (2) $4.596+j3.8568$;

(3) $0.9063+j0.4226$; (4) -3.

9. (1) $Z_1Z_2=4\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{6}\pi+j\sin\frac{5}{6}\pi\right)$,

$\frac{Z_1}{Z_2}=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+j\sin\frac{\pi}{6}\right)$;

(2) $10\left(\cos\frac{5}{12}\pi+j\sin\frac{5}{12}\pi\right)$; (3) $8(\cos90°+j\sin90°)$;

(4) $\cos45°+j\sin45°$; (5) $\frac{3}{2}[\cos(-90°)+j\sin(-90°)]$;

(6) $4(\cos35°+j\sin35°)$.

10. (1) $2\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$; (2) $\sqrt{7}e^{j40°54'}$;

(3) e^{j60°；　　(4) $\sqrt{13}e^{j146^\circ18'}$；

(5) $25e^{j(-53^\circ8')}$.

11. (1) $6e^{j\frac{3}{4}\pi}$；　　(2) $2\sqrt{2}\angle 80^\circ$；

(3) $2e^{j20^\circ}$；　　(4) $5.99\angle -24^\circ$.

13. (1) $42.42\angle -\frac{\pi}{4}$；　　(2) $50\angle 36^\circ52'$.

14. $Z=12+j16=20\angle 53^\circ8'$.

15. $Z=\frac{25}{4}\angle 0^\circ$.

第十二章　复　习　题

1. (2)68.39(公斤)，　119.1(公斤).
2. 439.6(公斤)，　326.3(公斤).
3. $|\vec{a}+\vec{b}|=5$，　$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{17}$，　$\vec{a}_0=\frac{3}{\sqrt{13}}\vec{i}-\frac{2}{\sqrt{13}}\vec{j}$，

   $\vec{b}$的幅角为$\frac{\pi}{4}$.
4. $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{19}$，$\vec{a}+\vec{b}$和$\vec{a}$的夹角为$83^\circ25'$.
5. (1) $r=4$，　$\varphi=-120^\circ$；

   (2) $r=2$，　$\varphi=150^\circ$；

   (3) $r=2$，　$\varphi=-60^\circ$；

   (4) $r=13$，　$\varphi=67^\circ23'$.
6. $Z_1+Z_2=5+j7$，$Z_1-Z_2=1-j3$，

   $Z_1\cdot Z_2=-4+j19$，$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{16}{29}-j\frac{11}{29}$.
7. $Z_1\cdot Z_2=\sqrt{2}e^{j(-165^\circ)}$，　$\frac{Z_1}{Z_2}=\sqrt{2}e^{j75^\circ}$.
8. 1，j，$-j$，-1.
9. 平行四边形对角线的平方和等于相邻两边平方和的二倍.

第十三章

第一节

1. (1) $\sqrt{34}$；　(2) $\sqrt{58}$；　(3) $4\sqrt{10}$；　(4) $\sqrt{73}$；

(5) 20;　(6) 8;　(7) $\sqrt{5}$;　(8) $\sqrt{205}$.

2. (1) 斜;　(2) 斜;　(3) 直;　(4) 直.

5. A、B、C在曲线上；D、E不在曲线上.

6. $xy-y-x=0$ 过原点，$x+5y=3$ 不过原点.

7. $x-3y+4=0$.

8. $y^2-4y-4x+8=0$.

9. $x^2+y^2+2y-3=0$.

第 二 节

1. (1) $K=1$，$\alpha=45°$;　(2) $K=-1$，$\alpha=135°$;
   (3) $K=-4$，$\alpha=104°2'$;　(4) $K=-\frac{5}{6}$，$\alpha\doteq140°12'$;
   (5) $K=\frac{4}{5}$，$\alpha\doteq38°39'$;　(6) $K=\frac{8}{9}$，$\alpha\doteq41°38'$.

2. (1) $y=\frac{1}{3}x+4$;　(2) $y=\frac{4}{5}x-5\frac{1}{5}$;
   (3) $y=2x+5$;　(4) $y=4x+23$;
   (5) $y=-\frac{1}{4}x-4\frac{1}{2}$;　(6) $y=-\frac{1}{6}x+2$.

3. 平行于 x 轴的方程：$y=2$，　平行于 y 轴的方程：$x=1$.

4. 平行于 x 轴的方程：$y=8$，　平行于 y 轴的方程：$x=3$.

5. (1) $y=3x-2$;　(2) $y=x+5$;
   (3) $y=2x+7$;　(4) $y=\frac{1}{3}x+2$.

6. (1) $y=x$;　(2) $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$;
   (3) $y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$;　(4) $y=-8x+24$.

8. (1) $y=2x-1$;　(2) $y-3=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+2)$;
   (3) $y+3=-\sqrt{3}(x+2)$;　(4) $y=0.4x$;
   (5) $y=2x-5$;　(6) $x=2$;
   (7) $y=3x+5$;　(8) $y=-\frac{2}{3}x-1$;
   (9) $y=3$;　(10) $y=2$;
   (11) $x=0.5$;　(12) $y=x-3$.

9. 一、三象限角的平分线方程：$y=x$，
   二、四象限角的平分线方程：$y=-x$.

10. (1) $K=\frac{2}{3}$，　$b=-2$，　$a=3$;
    (2) $K=-\frac{5}{3}$，　$b=5$，　$a=3$;

(3) $K=-\frac{1}{2}$，　$b=0$，　$a=0$；

(4) $K=2$，　$b=11$，　$a=-5\frac{1}{2}$；

(5) K不存在，　$a=3$；

(6) $K=0$，　$b=-1$；

其中：K为斜率，a为x截距，b为y截距。

11．$y=40-6t$．

12．$U=-0.1I+230$．

13．$V=0.006t+5.25$．

14．(1) 平行；　(2) 平行；　(3) 不平行也不垂直；

(4) 不平行也不垂直；　(5) 垂直；　(6) 不垂直也不平行；

(7) 垂直，　(8) 垂直．

15．(1) $\lambda=\frac{3}{2}$；　(2) $\lambda=-\frac{2}{3}$．

16．(1) $(1,\ -1)$；　(2) $(1,\ 2)$；　(3) $(16,\ -24)$；

(4) $\left(-\frac{1}{2},\ 3\right)$；　(5) $(5,\ -3)$；　(6) $\left(5,\ -\frac{1}{3}\right)$．

17．(1) $y=\frac{1}{2}x+4\frac{1}{2}$；　(2) $y=3x-2$；

(3) $y=x-5$；　(4) $y=-\frac{3}{2}x-5\frac{1}{2}$；

(5) $y=2x$．

18．13．

19．$\sqrt{5}$．

20．36（毫米）．

第十三章　复　习　题

1．$x^2+y^2=a^2$．　2．$3x^2+4y^2-16x+16=0$．

4．(1) $\frac{\sqrt{3}}{3}$；　(2) 1；　(3) 3；　(4) -2；　(5) $-\frac{1}{2}$．

5．(1) $a=2$，　$b=-4$；　(2) $a=5$，　$b=3$；

(3) $a=-3$，　$b=4$；　(4) $a=-5$．

其中a为x截距，b为y截距．

6．$y=\frac{7}{2}x-10$．　7．$y=\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}$．

9．$x=0$，$y=-\frac{1}{5}x+\frac{3}{5}$，　$y=\frac{3}{5}x+\frac{3}{5}$，交点$\left(0,\ \frac{3}{5}\right)$．

10．$x-2y+2=0$，　$2x+y-6=0$，　$x+3y-8=0$，交点$(2,\ 2)$．

第十四章

第　一　节

1．(1) $(x-3)^2+(y-2)^2=16$；　(2) $(x-3)^2+(y-5)^2=9$；

(3) $(x-3)^2+y^2=13$.

2. (1) 圆心在点(4, −2), 半径为5;

(2) 圆心在点$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, 半径为1;

(3) 圆心在点(3, 0), 半径为3;

(4) 圆心在点(0, −4), 半径为4.

3. $x^2+y^2-5x-7y+6=0$.

4. 圆心在点(30, 0), 半径为50.

5. 约1.9米.

6. (2, 2), (−2, −2).

7. $A\left(\frac{130}{3}, \frac{20\sqrt{14}}{3}\right)$, $B\left(-\frac{130}{3}, \frac{20\sqrt{14}}{3}\right)$,

$C\left(-\frac{130}{3}, \frac{-20\sqrt{14}}{3}\right)$, $D\left(\frac{130}{3}, \frac{-20\sqrt{14}}{3}\right)$.

8. $y=-\frac{3}{4}x+12\frac{1}{2}$.

9. $(x-1)^2+(y-4)^2=\frac{144}{25}$.

10. $A(7, -11)$, $B(11, -5)$, $C(0, 0)$, $D(4, -13)$.

11. $A(-1, -7)$, $B(3, -8)$, $C(6, 0)$.

12. (1) $y'=0$, (2) $3x'-4y'=0$,

(3) $x'^2+y'^2=5$.

第 二 节

1. (1) $a=3$, $b=2$, $F_1(-\sqrt{5}, 0)$, $F_2(\sqrt{5}, 0)$;

(2) $a=3$, $b=2$, $F_1(0, -\sqrt{5})$, $F_2(0, \sqrt{5})$;

(3) $a=4$, $b=3$, $F_1(-\sqrt{7}, 0)$, $F_2(\sqrt{7}, 0)$;

(4) $a=\frac{10}{3}$, $b=2$, $F_1\left(0, -\frac{8}{3}\right)$, $F_2\left(0, \frac{8}{3}\right)$;

(5) $a=5$, $b=1$, $F_1(-2\sqrt{6}, 0)$, $F_2(2\sqrt{6}, 0)$;

(6) $a=1$, $b=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $F_1\left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $F_2\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2. (1) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$; (2) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$;

(3) $\frac{x^2}{10}+y^2=1$; (4) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$.

3. $\frac{x^2}{0.64}+\frac{y^2}{0.25}=1$.

4. $\frac{x^2}{(240)^2}+\frac{y^2}{(150)^2}=1$.

5. $y=\frac{1556}{1475}\sqrt{(1475)^2-x^2}$.

6. $\frac{x^2}{(7417)^2}+\frac{y^2}{(7375)^2}=1$.

7. (1) $\frac{x'^2}{16}+\frac{y'^2}{4}=1$, (2) $\frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{4}=1$,

(3) $\frac{x'^2}{2}+\frac{y'^2}{4}=1$.

8. $\left(4,\ \frac{3}{2}\right)$, $(3,\ 2)$.

第　三　节

1. (1) $F(4,\ 0)$, $x=-4$; (2) $F\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$, $x=\frac{1}{2}$;

(3) $F(0,\ 2)$, $y=-2$; (4) $F(0,\ -2)$, $y=2$.

2. (1) $x^2=16y$; (2) $x^2=-2y$; (3) $x^2=-2y$;

(4) $y^2=-\frac{25}{2}x$; (5) $y=-x^2-2x$.

3. $x^2=11\frac{2}{8}y$.

4. $x^2=-\frac{b^2}{a}y$.

5. $y=-\frac{32}{1125}x^2+4\frac{4}{15}x$, $h=10.24$(米).

6. (1) $y'^2=-8x'$; (2) $x'^2=-\frac{1}{3}y'$;

(3) $x'^2=6y'$; (4) $y'^2=2x'$.

7. 距灯底10厘米处。

第　四　节

1. (1) $F_1(\sqrt{13},\ 0)$, $F_2(-\sqrt{13},\ 0)$, $y=\pm\frac{3}{2}x$;

(2) $F_1(3,\ 0)$, $F_2(-3,\ 0)$, $y=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}x$;

(3) $F_1(0,\ -\sqrt{29})$, $F_2(0,\ \sqrt{29})$, $y=\pm\frac{5}{2}x$;

(4) $F_1(0,\ -\sqrt{12})$, $F_2(0,\ \sqrt{12})$, $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$.

2. (1) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{13}=1$;　　(2) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$;

(3) $\frac{x^2}{15}-\frac{y^2}{6}=1$;　　(4) $x^2-y^2=16$.

3. $\frac{x^2}{3}-\frac{y^2}{5}=1$.　　4. $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{279}=1$.

5. (1) $\frac{x'^2}{5^2}-\frac{y'^2}{5^2}=1$;　　(2) $\frac{x'^2}{4^2}-\frac{y'^2}{3^2}=1$.

第十四章　复　习　题

3. $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{10}=1$.　　4. $\frac{x^2}{65}+\frac{4y^2}{65}=1$.

5. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.　　6. 4.875米.

7. $y=-0.008x^2+0.08x$, 0.128公里.

8. (1) $\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{(y-2)^2}{12}=1$;　　(2) $\frac{x^2}{4}+\frac{(y-1)^2}{13}=1$.

9. (1) $(y-4)^2=12(x-3)$;　　(2) $(x-3)^2=-8(y+1)$.

10. (1) $x'^2+y'^2=16$;　　(2) $\frac{x'^2}{16}+\frac{y'^2}{9}=1$;

(3) $x'^2=8y'$;　　(4) $\frac{y'^2}{4}-\frac{x'^2}{9}=1$.

第 十 五 章

第　一　节

1. $\begin{cases} x=R\cos t+x_0, \\ y=R\sin t+y_0. \end{cases}$

2. (1) $x^2+y^2=1$;　　(2) $y=\frac{1}{a}x^2$;

(3) $y=3x-3x_0+y_0$;　　(4) $(x-2)^2+(y+3)^2=25$;

(5) $\frac{(x-3)^2}{a^2}+\frac{(y+5)^2}{b^2}=1$.

3. $y=-\frac{5}{12}x-\frac{3}{4}$, 路程$=65$.

4. $\begin{cases} x=9t+1, \\ y=12t+1. \end{cases}$

第 二 节

3. $\rho=2R\sin\theta$.　　　　5. $\rho=56+\frac{4}{\pi}\theta$.

6. $\overset{\frown}{AB}:\rho=60+\frac{72}{\pi}\theta,\ (0\leqslant\theta\leqslant\frac{5\pi}{6})$;

$\overset{\frown}{BC}:\rho=270-\frac{180}{\pi}\theta,\quad\left(\frac{5\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant\frac{7\pi}{6}\right)$;

$\overset{\frown}{CA}:\rho=60,\quad\left(\frac{7\pi}{6}\leqslant\theta\leqslant2\pi\right)$.

7. (1) $P_1(\sqrt{2},\sqrt{2}),P_2(-3,0),\ P_3\left(-\frac{5}{2},-\frac{5}{2}\sqrt{3}\right),\ P_4(3\sqrt{3},-3)$;

(2) $A\left(2,\frac{\pi}{3}\right),\ B\left(2,\frac{4\pi}{3}\right),\ C\left(2,\frac{\pi}{4}\right),\ D\left(2,-\frac{\pi}{3}\right)$.

8. (1) $x^2+y^2=16,\quad x^2+y^2=12y,\quad y=3,\quad x=5,\quad y^2=1+2x,$
$3x^2+4y^2+24x-144=0,\quad x^2+y^2+y-x=0,$
$x^2+y^2-2x-3y=0,\quad xy=\frac{1}{2},\quad y=x$;

(2) $\rho\sin\theta=4,\quad\rho=a,\quad\rho=4\cos\theta,\ \rho^2+2\rho\sin\theta=0,$

$\rho(\cos\theta-\sin\theta)=3,\quad\rho^2\cos2\theta=4,\quad\rho=\mathrm{tg}\theta\cdot\frac{1}{\cos\theta},$

$\rho=\mathrm{ctg}\,\theta\cdot\frac{1}{\sin\theta},\ \rho=4a\,\mathrm{ctg}\theta\frac{1}{\sin\theta},\ \rho=\cos\theta-\sin\theta$.

9. (10,0), (10.2, 11′), (10.9, 1°36′), (12.4, 5°38′),
(14.9,15°38′),(20,39°14′).

第十五章 复 习 题

1. $\begin{cases}x=at\\ y=-\frac{1}{2}gt^2+bt.\end{cases}$　　2. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.　　3. $\frac{(x-3)^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$.

4. (1) $\rho^2\cos2\theta=20,\qquad\rho^2=\frac{4}{3\cos^2\theta+1},$

$\rho^2\sin2\theta=14,\qquad\rho^2=4\cos2\theta$;

(2) $16x^2+25y^2+96x-256=0,\qquad x^2-y^2+1=0,$
$2x+y=6,\qquad(x^2+y^2)^3=64x^2y^2$.

5. (1) $P_1\left(2,\frac{\pi}{6}\right),\qquad P_2\left(2,\frac{5}{6}\pi\right)$;

(2) $P_1\left(6, \frac{\pi}{3}\right)$, $P_2\left(6, -\frac{\pi}{3}\right)$.

第十六章

第一节

3. (1) 2; (2) 0; (3) $\frac{1}{3}$.

4. (1) $\frac{1}{2}$; (2) 1; (3) $\frac{1}{2}$; (4) $\frac{4}{5}$.

5. $2x^2$、$\frac{1}{3}x^2$ 为无穷小量；$\frac{1}{2x^2}$、$\frac{3}{x^2}$ 为无穷大量.

6. 1.0302. 7. (1) 2; (2) $2\Delta t$.

第二节

1. 该物体在 t 时刻的冷却速度为 $\frac{dT}{dt}$.

2. $3x^2$. 3. -2.

第三节

1. (1) $y'=7x^6$, $dy=7x^6dx$; (2) $y'=\frac{3}{2}\sqrt{x}$, $dy=\frac{3}{2}\sqrt{x}dx$;

(3) $y'=-\frac{6}{x^7}$, $dy=-\frac{6}{x^7}dx$; (4) $y'=-\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}$, $dy=-\frac{dx}{3x\sqrt[3]{x}}$;

(5) $y'=0$, $dy=0$; (6) $S'=\cos t$, $ds=\cos t dt$.

2. (1) $e^x-\cos x$; (2) $\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}$;

(3) $-\sin t+1$; (4) $\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}+\frac{1}{t^2}$.

4. (1) $\frac{1}{3}\arcsin x+\frac{x}{3\sqrt{1-x^2}}$; (2) $xe^x(2+x)$;

(3) $(t-1)\sin t-\cos t$; (4) $\frac{\sin\theta+2\theta\cos\theta}{2\sqrt{\theta}}$.

5. (1) $\frac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$; (2) $\frac{1-\ln x}{x^2}$;

(3) $-\frac{6x}{(1+x^2)^2}$; (4) $\frac{1}{(\sin t+\cos t)^2}$.

6. (1) 0, π;　　(2) $\frac{3}{25}$, $4\frac{3}{5}$.

7. (1) $-\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$;　　(2) $\frac{2x}{1+x^2}$;

(3) $6(2x+1)^2$;　　(4) $\omega\sin 2(\omega t+\varphi)$.

8. (1) $-e^{-2t}(2\cos 3t+3\sin 3t)$;

(2) $-e^{-\frac{t}{2}}\cdot \mathrm{tg}\, t$;　　(3) $-\frac{2t}{1-t^2}+e^{-t}+\frac{1}{(1-t)^2}$.

9. $A\omega$, 0.

第　四　节

1. $v=v_0-gt$, $\frac{v_0^2}{2g}$（g为重力加速度）.

2. 1米/秒，4米/秒^2.

3. $\frac{\omega_0}{k}(1+ke^{-kt})$.　　4. $\frac{E}{RC}$.

6. 角速度是13弧度/秒；角加速度是2弧度/秒^2.

7. $2x-y-1=0$,　$4x-y+4=0$.

8. $2x+y-1=0$.

9. (1) 点$\left(\frac{\pi}{2},\ 1\right)$;　(2) 点$(0,\ 0)$;　(3) 点$\left(\frac{\pi}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

10. $3x+y-6=0$.

11. 在区间$(-\infty,\ 0)$内增加，在区间$(0,2)$内减小，在区间$(2,\ +\infty)$内增加.

12. 长为6米、宽为3米.

13. 离A点1.2公里.

14. (1) 设水平射程为R，则$R=\frac{800m}{m^2+1}(m>0)$，由此可得当$m=1$，即发射角为45°时，$R$最大；

(2) 设高度为h，则$h=300m-\frac{900}{8}(m^2+1)$，由此可求得当$m=1\frac{1}{3}$时，$h$最大.

15. $r=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, $h=2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, $d:h=1:1$.

16. 底宽为$\sqrt{\frac{40}{4+\pi}}=2.366$(米).

18. 7.75;　6.929;　0.01;　0.0698.

第十六章　复　习　题

3．(1) 0；　(2) $\frac{3}{4}$；　(3) $2\frac{4}{9}$；　(4) 1；

(5) $3e$；　(6) 0；　(7) ∞；　(8) $\frac{3}{4}$．

6．(1) $y'=2(3x+1)\sin x+(3x^2+2x-1)\cos x$；

(2) $y'=\frac{1+x+\ln x}{(1+x)^2}$；　(3) $y'=\frac{\cos x}{1+\operatorname{tg}x}-\frac{\operatorname{tg}x}{(1+\operatorname{tg}x)^2\cos x}$；

(4) $y'=\frac{2x}{x^2-1}$；　(5) $y'=2\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)$；

(6) $y'=\frac{2}{x^2-1}$；　(7) $y'=-\frac{\cos 2x}{\sqrt{1-\sin 2x}}$；

(8) $y'=2x\operatorname{arc\,tg}\sqrt{x}+\frac{x^{\frac{3}{2}}}{2(1+x)}$；(9) $y'=100b(a+bx)^{99}$；

(10) $y'=\frac{x}{\sqrt{(a^2-x^2)^3}}$；　(11) $y'=\frac{1}{2}\sqrt{1-t}\cos\frac{t}{2}-\frac{1}{2\sqrt{1-t}}\sin\frac{t}{2}$；

(12) $y'=\sin^2 3t+3(t+1)\sin 6t$；　(13) $y'=\arcsin x$；

(14) $y'=\sqrt{a^2-x^2}$．

7．(1) 20；　(2) 10；　(3) $-\frac{\sqrt{2}}{T}\pi a$．

8．0．

9．(1) $9x-y-16=0$；　(2) $2x+y-3=0$；

(3) $7x-y-9=0$．

10．(1) $-\frac{1}{2}dx$；　(2) $\frac{1}{2\sqrt{x}}dx$；

(3) $\frac{a}{ax+b}dx$；　(4) $-\frac{2\pi}{T}\sin\left(\frac{2\pi}{T}t+\frac{\pi}{4}\right)dt$；

(5) $\frac{3}{2\sqrt{x-9x^2}}dx$；　(6) $-\frac{2x}{x^4-2x^2+2}dx$．

11．$\varphi=2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}$（弧度）$\doteq 294°$．

12．在图中，总电流等于流入两支路电流之和：$I=I_0+I_1$，并且电阻两端点间的电压相等：$I_0R_0=I_1R_1$，由这两式解出$I_1=\frac{IR_0}{R_1+R_0}$．

设在电阻R_1上的功率为P，则$P=I_1^2R_1=\frac{I^2R_0^2R_1}{(R_1+R_0)^2}$，$(R_1>0)$．由此可求得当$R_1=R_0$时，功率$P$最大．

第十七章

第一节

1. 39.69;　　42.63.

2. $\int_0^5 I_m \sin\omega t dt$.

4. (1) $\int_0^1 x^3 dx$;　(2) $\int_{-a}^{a} \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}dx$;　(3) $\int_{-2}^{2}(4-x^2)dx$.

5. (1) 2;　(2) 12;　(3) $\frac{\pi}{2}a^2$.

第二节

1. (1) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$;　(2) $3e^x$;　(3) $2x^{\frac{1}{2}}$;

　(4) $e^x-\cos x$;　(5) $-\frac{1}{\omega}\cos\omega t$;　(6) $\frac{1}{\omega}\sin\omega t$.

2. (1) $\frac{2}{3}$;　(2) $4\frac{2}{3}$;　(3) 1;　(4) 1;

　(5) $\frac{\pi}{4}$;　(6) $\frac{2}{\omega}$;　(7) $\frac{\pi}{6}$.

3. 117.5.　　5. 4.

6. $\sin x$、$\sin x+2$、$\sin x-2$、$\sin x+c$是$\cos x$的原函数;

　$\frac{1}{2}\sin x$、$\sin 2x$、$\sin x+2x$不是$\cos x$的原函数.

9. $\int_a^b f(x)dx=0$;　　$\int_a^b f(x)dx=0$.

10. (1) $4\frac{1}{2}$;　(2) $a+b$;　(3) $4\frac{2}{3}\sqrt{2}-3\frac{1}{3}$;

　(4) $1\frac{1}{15}$;　(5) $5\frac{1}{3}$.

第三节

1. (1) $\frac{1}{7}x^7+C$;　(2) $-\frac{1}{2x^2}+C$;　(3) $\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}+C$;

　(4) $-\frac{2}{3\sqrt{x^3}}+C$;　(5) $-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}+C$.

2. (1) $x-x^2+\frac{1}{3}x^3+C$;　(2) $\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\sin x+C$;

　(3) $\sin x+\cos x+C$;　(4) $\sqrt{\frac{2h}{g}}+C$;

(5) $\frac{t^2}{2}+t-5\ln|t|+C$; (6) $2\operatorname{tg}\theta+\theta+C$;

(7) $x-\operatorname{arctg}x+C$; (8) $\frac{2}{3}x\sqrt{x}-2\sqrt{x}+C$.

3. (1) $\frac{1}{13}(x-4)^{13}+C$; (2) $\frac{2}{9}(2+3x)^{\frac{3}{2}}+C$;

(3) $\operatorname{tg}(x+\frac{\pi}{4})+C$; (4) $-\frac{1}{2}\ln|1-2t|+C$;

(5) $-\frac{1}{2}\ln|1-x^2|+C$; (6) $\frac{1}{6}(1+2x^2)^{\frac{3}{2}}+C$;

(7) $-3\sqrt{1-x^2}+C$; (8) $\ln|1+\sin x|+C$;

(9) $\operatorname{arctg}\sin x+C$; (10) $\ln|\sin x|+C$;

(11) $-\frac{1}{6(2t-5)^3}+C$; (12) $\frac{1}{3}\ln|1+x^3|+C$.

4. (1) $\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\approx 0.067$; (2) $\frac{1}{3}(9-\sqrt{3})\approx 2.423$;

(3) $\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 0.866$; (4) 1;

(5) $\frac{(e-1)^5}{5}\approx 2.996$; (6) $\frac{T}{\pi}\cos\varphi$.

5. (1) $\arcsin\frac{x}{2}+C$; (2) $\frac{1}{2}\ln|2x+\sqrt{4x^2+25}|+C$;

(3) $\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}|+C$; (4) $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{2+3x}{2-3x}\right|+C$;

(5) $-\frac{\sin 8x}{16}+\frac{\sin 2x}{4}+C$; (6) $-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C$;

(7) $\frac{1}{2\omega}[(\omega t+\varphi)+\sin(\omega t+\varphi)\cos(\omega t+\varphi)]+C$;

(8) $-\frac{1}{2}\ln(x^2-2x+5)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{2}+C$;

(9) $\frac{2}{3}$; (10) $\frac{3\pi}{16}$.

第四节

1. $10\frac{2}{3}$. 2. $21\frac{1}{3}$. 3. $\frac{1}{3}\pi R^2h$.

4. $\frac{27}{7}K\sqrt[3]{a^7c^2}$.　　5. 2.7×10^{-3}(库仑).

6. $\frac{\pi}{\omega}I_m^2R$.　　7. 16(公斤·厘米).

第十七章　复　习　题

3. $4.5K$.

4. (1) 2;　(2) 2.5;　(3) 12;　(4) 8;
   (5) $\frac{1}{2}$;　(6) $\frac{1}{2}$;　(7) $\frac{\pi}{2}$;　(8) π.

7. 20.4米.

8. (1) $2x-\operatorname{tg}x+C$;　(2) $\sin x-2\operatorname{arctg}x+\frac{1}{4}\arcsin x+C$;

   (3) $-\frac{1}{5}\ln|7-5x|+C$;　(4) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin\sqrt{2}x+C$;

   (5) $2\left(e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}\right)+C$;　(6) $-\frac{1}{8}\cos^8x+C$;

   (7) $\frac{1}{3}\ln^3x+C$;　(8) $\frac{1}{2\sqrt{2}}\arcsin2x+C$;

   (9) $\operatorname{arctg}e^x+C$;　(10) $\frac{1}{2}\arcsin x^2+C$;

   (11) $-\frac{3}{10}(1-2x)^{\frac{5}{3}}+C$;　(12) $-\frac{2}{9}(1-x^3)^{\frac{3}{2}}+C$;

   (13) $-\sqrt{1-x^2}+\arcsin x+C$;　(14) $\frac{1}{10}\operatorname{arctg}\frac{2x}{5}+C$.

9. (1) $\frac{1}{3}\ln\frac{4}{3}$;　(2) $\frac{1}{3}(2\sqrt{2}-1)$;　(3) $5\frac{7}{9}$;

   (4) $\frac{1}{4}$;　(5) $\frac{1}{3}$;　(6) $34\frac{2}{15}$.

10. (1) 0;　(2) 0;　(3) π;
    (4) π;　(5) 0.

11. (1) $4\frac{1}{2}$;　(2) $\frac{16}{3}\sqrt{2}$;　(3) $\frac{3}{2}-\ln2$;

    (4) $2\pi+\frac{4}{3}$, $6\pi-\frac{4}{3}$.

12. $\frac{\pi}{2}$.

13. mgR, 11.2公里/秒.